CORRESPONDANCE

MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE.

TOME I.









PHYSIQUE

DE LEONARD EULER

TOME I.





Correspondance
MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE
DE QUELQUES CÉLÈBRES GÉOMÈTRES
DU XVIIIème SIÈCLE

PRÉCÉDÉE

D'UNE NOTICE SUR LES TRAVAUX DE **LÉONARD EULER**,

TANT IMPRIMÉS QU'INÉDITS

ET PUBLIÉE

SOUS LES AUSPICES DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE SAINT-PÉTERSBOURG

PAR

P.-H. Fuss,

Conseiller d'état actuel de S. M. l'Empereur de toutes les Russies, membre et secrétaire perpétuel de l'Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg, docteur en philos., membre de plusieurs académies et sociétés savantes russes et étrangères, Chevalier des ordres impériaux et royaux de St.-Stanislas, de St.-Vladimir et de Ste-Anne.

TOME I.

Avec le portrait de Léonard Euler, *gravé sur acier, 4 planches de figures et 3 fac-similés.*

ST.-PÉTERSBOURG,

1843.





A SON EXCELLENCE

Monsieur S. d'Ouvaroff

PRÉSIDENT

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

SAINT-PÉTERSBOURG

ETC. ETC. ETC.

HOMMAGE

DE RESPECT, DE DÉVOUEMENT

ET DE RECONNAISSANCE

Saint-Pétersbourg
ce 12 janvier 1843

de la part de
L'ÉDITEUR.

CORRESPONDANCE

MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE.

TOME I.

TABLE DES MATIÈRES.

Lettres | | | | Page



PRÉFACE.

Lorsque, il y a dix-sept ans, je fus appelé aux fonctions honorables de Secrétaire perpétuel de l'académie de St.-Pétersbourg, un de mes premiers soins fut l'inspection des archives de cette académie que je savais riches en grands souvenirs. J'y trouvai, entre autres, quelques paquets de la correspondance de notre immortel Euler, en date pour la plupart, des années quarantièmes et cinquantièmes du siècle dernier, c'est à dire du temps de son service en Prusse (1741 à 1766); puis, quelques lettres des quatorze années antérieures à cette époque, et où il appartenait encore à la Russie; mais rien, ou presque rien des dix-sept dernières années de sa vie, qu'il passa de nouveau au sein de notre académie. Ces lettres étaient rangées par ordre chronologique et formaient une dixaine de paquets isolés. J'y trouvai, comme je devais m'y attendre, au milieu d'une foule de noms obscurs, quelques noms illustres

qui, de nos jours encore, brillent d'un éclat impérissable dans les annales des sciences; au milieu de lettres remplies des phrases banales de l'adulation, d'affaires de service d'un intérêt passager, ou d'objets qui, alors même, n'offraient de l'intérêt qu'aux auteurs de ces lettres. je trouvai, dis-je, dans toute cette ivraie, un nombre assez considérable de grains précieux qui, aujourd'hui encore, méritent d'être conservés et offerts aux géomètres. Je n'ai qu'à citer 10 lettres de Jean Bernoulli l'aîné, l'illustre coïnventeur du calcul infinitésimal, l'ami de Leibnitz et le maître de notre Euler; 63 lettres de Daniel Bernoulli, fils et rival redouté du précédent, et auteur — on pourrait même dire, fondateur, — de l'hydrodynamique; 4 lettres de Nicolas Bernoulli, cousin germain de Daniel, connu par son ouvrage *De arte conjectandi in jure*, et qui, avec Montmort, cultiva avec tant de succès l'analyse des probabilités dont son oncle Jacques avait jeté les premiers fondements; plusieurs lettres de Gabriel Cramer de Genève, auteur de l'analyse des lignes courbes algébriques, de Lambert, célèbre géomètre d'Allemagne etc. etc.

Ce furent d'abord les lettres des Bernoulli qui attirèrent mon attention particulière Je fus assez heureux pour pouvoir en compléter la suite, ayant trouvé, dans les papiers de mon père, les copies faites de sa main, de quatre lettres de Jean Bernoulli

(les numéros 4, 5, 6 et 7 de ce recueil) et la traduction française d'une lettre de Daniel (la 17ème) qui toutes manquent à notre collection d'authographes, et dont les originaux avaient vraisemblablement été retirés avant même que cette collection fût déposée à l'académie, par la famille Euler. Il en est de même de deux lettres de Clairaut, d'une de Naudé et d'une de Poleni, dont je possède également les copies de la main de mon père.

Toutes ces lettres roulent sur des objets de science; celles des Bernoulli surtout, offrent un haut intérêt non seulement pour l'histoire de la science et l'histoire littéraire en général, mais encore sous le rapport des méthodes et des aperçus, du raisonnement et des artifices de calcul que nul géomètre ne verra sans admiration, ni sans y puiser quelque instruction. Quant à moi, la jouissance que m'a procurée l'étude de ces lettres n'a été troublée que par le regret, que j'ai éprouvé à chaque page, de ne pas pouvoir lire en même temps les réponses d'Euler. A coup sûr, celles-ci eussent décuplé la valeur de cette précieuse collection. Malheureusement tous mes efforts pour me les procurer ont été infructueux.

Nos archives renferment, en outre, tout un volume de lettres de Goldbach. Bien que ce géomètre ait joui de son vivant d'une grande réputation, l'oubli

dans lequel est tombé son nom, et l'intérêt secondaire qu'offrent ses lettres, quoique toutes savantes, m'avaient d'abord déterminé à ne pas les comprendre dans le recueil que je méditais. Or une circonstance changea tout à coup la face de cette question. J'appris qu'il existe aux archives centrales de Moscou plusieurs paquets renfermant les réponses d'Euler à Goldbach. Celles-ci ne pouvaient manquer de donner aux lettres mêmes de ce dernier un degré d'importance que, prises isolément, elles n'avaient point. Grâce à la libéralité éclairée de M. le prince Obolensky, dirigeant les archives de Moscou, je me trouvai bientôt dépositaire de cent lettres d'Euler à Goldbach, toutes pleines de recherches importantes sur différents sujets de la science et particulièrement sur la théorie des nombres *).

Les lettres d'Euler à Goldbach étaient renfermées dans quatre gros volumes qui contenaient, en outre, sa correspondance avec un grand nombre de savants distingués de ces temps-là, entre autres avec Nicolas et Daniel Bernoulli, tous deux fils de Jean. Elles

*) C'était, à ce qu'il paraît, la doctrine favorite de Goldbach; et il me semble plus que probable que, si cette liaison intime entre Euler et ce savant, liaison qui dura 36 ans sans interruption, n'eût point eu lieu, la science des nombres n'aurait guère atteint ce degré de perfection dont elle est redevable aux immortelles découvertes d'Euler.

étaient accompagnées de cinq cahiers, petit in 4to, reliés en parchemin et renfermant les minutes des lettres de Goldbach à ses nombreux correspondants, écrites nettement de sa propre main. C'est ainsi que je me vis en possession du commerce épistolaire complet qui avait existé entre Goldbach d'un côté, et Euler et les deux Bernoulli de l'autre. La correspondance avec les Bernoulli m'attira vivement; et à peine en eus-je achevé la lecture, que ma détermination de la publier également, fut arrêtée. Outre l'intérêt scientifique qu'elles offrent indubitablement sous le rapport de l'époque à laquelle elles appartiennent et du génie des auteurs, elles ont encore un titre particulier à notre attention, en nous transportant au berceau de notre académie, et en nous fournissant des données précieuses relatives à son histoire.

La correspondance de Daniel Bernoulli avec Goldbach va de 1723 à 1730; celle avec Euler commence en 1733 et continue sans interruption jusqu'en 1760 environ. Cette longue suite de lettres amicales d'une même personne, d'un caractère essentiellement franc et sincère, finit par donner une image presque *plastique* de l'homme; on sent naître pour lui une affection qu'on n'a l'habitude de vouer qu'à des personnes vivantes avec lesquelles on a passé un long temps dans une certaine intimité. Tel a été du moins le sentiment que j'ai éprouvé après avoir lu les lettres de

Daniel, et qui m'a fait supposer que les lecteurs de cette correspondance me sauraient peut-être gré si je leur présentais le même auteur tel qu'il était dans les dernières années de sa vie, et presque octogénaire. C'est ainsi qu'on le retrouve dans ses lettres adressées à Nicolas Fuss, autrefois son disciple, comme plus tard celui d'Euler. Ces lettres ont d'ailleurs le plus souvent pour objet les travaux de ce dernier, ou ceux qui furent exécutés sous sa direction, et ne peuvent donc pas être considérées comme déplacées dans un recueil qui a pour but essentiel de fournir des notices sur la vie littéraire et scientifique de ce grand géomètre. Ce fut en 1772 que, sentant l'affaiblissement progressif de sa vue, il écrivit à Bernoulli, alors professeur à Bâle, pour l'engager à lui choisir, parmi ses élèves les plus distingués, un jeune géomètre compatriote, capable de l'aider dans ses profonds et pénibles calculs. Le choix tomba sur Fuss qui, depuis 1773 jusqu'à la mort d'Euler, arrivée en 1783, eut l'insigne bonheur de jouir de sa société journalière et de ses précieuses instructions, et fut le rédacteur d'un grand nombre de ses ouvrages. Tout le monde connaît d'ailleurs l'éloge historique dont il honora la mémoire de son immortel maître. (Voir ci-dessous, la Notice sur la vie et les écrits d'Euler).

Depuis que les sciences ont cessé d'être la propriété exclusive d'un petit nombre d'initiés, ce commerce épistolaire des savants a été absorbé par la presse pé-

riodique. Le progrès est incontestable. Cependant, cet abandon avec lequel on se communiquait autrefois ses idées et ses découvertes, dans des lettres toutes confidentielles et privées, on ne le retrouve plus dans les pièces mûries et imprimées. Alors, la vie du savant se reflétait, pour ainsi dire, tout entière dans cette correspondance. On y voit les grandes découvertes se préparer et se développer graduellement; pas un chaînon, pas une transition n'y manque; on suit pas à pas la marche qui a conduit à ces découvertes, et l'on puise de l'instruction jusque dans les erreurs des grands génies qui en furent les auteurs. Cela explique suffisamment l'intérêt qui se rattache à ces sortes de correspondances, et l'empressement libéral que l'académie, lorsque je lui soumis le plan de mon recueil, daigna manifester en mettant à ma disposition les moyens non seulement de le publier, mais encore de l'orner des portraits d'Euler et de Daniel Bernoulli *) et des *fac-simile* de l'écri-

---

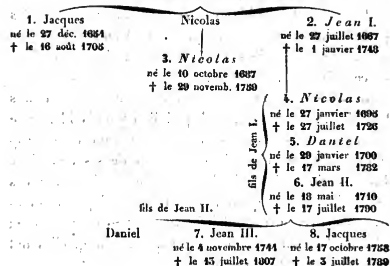
*) Le portrait d'Euler est une copie parfaitement fidèle de celui qui fut peint par Küttner et gravé à Mitau par Darbes, en 1780. J'ai donné la préférence à ce portrait parce que, selon le témoignage de mon père, il est le plus ressemblant de tous ceux qui existent. C'est un portrait de vieillard, il est vrai; mais, comme on le verra par la suite, il le représente à l'époque de sa plus grande fécondité. L'original du portrait de D. Bernoulli, qui orne le second volume de ce recueil, est peint à l'huile et se conserve à la bibliothèque de l'académie. Il lui a été donné, en 1787, par son directeur, la princesse Daschkoff.

ture de tous les savants illustres qui y ont contribué. C'est aussi cet intérêt qui me fait espérer de voir ce livre accueilli avec bienveillance et apprécié par les géomètres, sensibles au souvenir des grands noms qui ont marqué les époques de leur science.

Bien que nous n'ayons affaire ici qu'à des savants du premier ordre dont on trouve les biographies partout, j'ai cru nécessaire de rappeler en quelques mots les moments principaux de leur vie et la nature de leurs relations mutuelles, afin de placer le lecteur d'emblée *in medias res*, au milieu de cette scène imposante où le génie de l'homme se trouve, pour ainsi dire, à découvert et, tout en déployant sa force admirable, ne laisse cependant pas que d'être parfois aux prises avec les faiblesses inhérentes à la nature humaine. On en trouvera des exemples dans la jalousie démesurée de Jean Bernoulli, jalousie qui, jadis déjà, avait suscité la célèbre dispute avec son frère aîné Jacques, et qui se manifeste encore ici d'une manière tout-à-fait frappante, on peut même dire contraire à la nature, vis à vis de son fils Daniel, au point que, n'étant plus de force à lutter avec un adversaire si jeune et si puissant, il finit par se rendre coupable de plagiat envers lui; on en trouvera dans la susceptibilité excessive de Daniel à l'égard de Goldbach et de Bülffinger, dans son animosité presque maladive contre les procédés injustes de son père, et dans ses sorties passion-

nées contre D'Alembert à qui, du reste, il fait plus tard amende honorable; on en trouvera même dans les petites faiblesses d'Euler, que Daniel lui reproche avec autant de bonhomie que de franchise, dans son adhérence opiniâtre au système de Descartes, basée uniquement sur sa prévention contre les Anglais, et enfin dans l'air de présomption, avec lequel il a parfois l'habitude d'annoncer ses découvertes en faisant un usage trop fréquent du superlatif dans les titres de ses mémoires. La postérité a le droit de connaître ces faiblesses des grands hommes, et qu'un rapprochement tel que nous l'offrons dans cet ouvrage, doit inévitablement faire ressortir; elle ne leur en tiendra compte qu'en tant qu'elles ont pu influer sur leur vie littéraire.

Quant à Euler, nous renvoyons le lecteur à la notice sur ses écrits placée en tête de ce volume. La famille des Bernoulli offre un phénomène unique dans l'histoire des sciences, celui d'avoir produit, dans trois générations successives, plusieurs savants du premier ordre. Pour éviter toute confusion et pour faciliter la lecture de cet ouvrage, nous donnerons ici une espèce de tableau généalogique de cette famille remarquable, tableau dans lequel nous marquerons en lettres italiques les noms des quatre Bernoulli auxquels nous avons spécialement affaire dans cet ouvrage, et où nous placerons des numéros à côté de tous ceux qui ont illustré leur nom par des découvertes en mathématiques:



Le nom de Bernoulli paraît indiquer l'extraction italienne de cette famille; cependant, d'après la Biographie universelle, elle est originaire d'Anvers, d'où elle fut expatriée pour cause de religion, sous le gouvernement du duc d'Albe. Elle se naturalisa en Suisse, et la ville de Bâle devint le berceau de tous les grands géomètres issus de cette famille, dans l'espace d'un siècle, depuis Jacques Bernoulli, frère aîné de Jean (1654), jusqu'à Jacques, son petit-fils (1758, Daniel seul excepté, qui naquit à Groningue où son père avait occupé, pendant dix ans (1695 à 1705), une chaire de mathématiques. A l'époque où commencent les lettres de Jean B. I. (2) dans notre recueil, il était déjà sexagénaire. Euler avait 21 ans à cette époque. Il est

curieux de voir le ton d'autorité magistrale des premières lettres faire place bientôt, dans les suivantes, à cette admiration sincère qu'avaient dû inspirer au maître les rapides et brillants progrès de l'élève. Dans la 3ème déjà, il ne dissimule pas la vive satisfaction que lui ont fait éprouver les louanges accordées par Euler à un de ses ouvrages, non plus que la joie maligne qu'il ressent du dédain avec lequel Euler a traité un travail de Daniel sur le même sujet. (Voir, pour les détails de sa vie, l'éloge dans les Mémoires de l'acad. roy. des sciences de Paris, année 1748, et la Biographie universelle.)

Nicolas (4) et Daniel (5) Bernoulli assistèrent à l'inauguration de notre académie. Appelés à des fauteuils d'académicien, sur la recommandation de Goldbach qui s'était lié d'amitié avec eux dans ses voyages en Italie, ils vinrent ensemble à St.-Pétersbourg, en 1725. La tendre amitié qui unissait ces deux frères offrait un contraste d'autant plus frappant, que le spectacle scandaleux d'une polémique acharnée, qu'avaient livré, dans le siècle précédent, deux frères du même nom, n'était guère encore oublié. Nicolas mourut à St.-Pétersbourg en 1726; sa biographie écrite par son frère se trouve à la p. 266 du second volume de cette Correspondance. Daniel retourna, en 1733, dans sa patrie qu'il ne quitta plus jusqu'à sa mort, arrivée en 1782. Les Mémoires de l'académie royale des sciences de Paris de cette année contiennent son éloge, écrit par Condorcet et que, plus

tard, son neveu Daniel, fils de Jean II (6) publia en allemand, à Bâle, avec quelques changements et additions.

Nicolas B. l'aîné (3), cousin germain des précédents, fut l'éditeur de l'*Ars conjectandi* de son oncle Jacques et l'auteur de plusieurs morceaux distingués, publiés dans différents recueils. Notre Correspondance ne renferme que quatre lettres de lui, des années 1742 et 1743, mais dans lesquelles perce un esprit analytique d'une finesse remarquable. Plusieurs passages des lettres d'Euler prouvent d'ailleurs l'estime que lui portaient unanimement les géomètres de son temps.

Il nous reste à donner quelques détails sur la vie de Goldbach, la moins connue de toutes, et nous croyons ne pas pouvoir mieux faire qu'en les extrayant d'un manuscrit volumineux du célèbre Gérard-Frédéric Müller, manuscrit qui renferme l'histoire de l'académie, depuis sa fondation (1725) jusqu'à l'an 1743 inclusivement Müller avait succédé à Goldbach en qualité de Secrétaire perpétuel de l'académie, et, retiré plus tard à Moscou, avait employé ses loisis à écrire l'histoire de l'académie, d'après les documents originaux qui, à cet effet, lui furent envoyés successivement et par années. Voici ce qu'il dit de Goldbach:

«Chrétien Goldbach, homme d'un rare mérite, de vastes connaissances dans les langues et dans les

sciences et d'une modestie admirable, naquit à Königsberg en Prusse le $^{8}/_{18}$ mars 1690. Il avait, dans sa jeunesse, parcouru presque toute l'Europe, s'était lié d'amitié avec les coryphées de la science de cette époque et avait entretenu, entre autres, une correspondance suivie avec divers savants appelés à l'académie de St.-Pétersbourg. Il paraît que ce furent MM. Hermann et Bülffinger qui, lors de leur passage par Berlin, l'engagèrent à les suivre dans notre capitale où il arriva le 8 août 1725. Il n'avait alors aucun emploi public, bien qu'il portât, depuis plus de dix ans, le titre de conseiller aulique de S. M. Prussienne. Rien n'indiquait s'il avait, ou non, l'intention d'entrer au service de Russie; il paraissait, au contraire, que la simple curiosité d'un voyageur l'avait amené à St.-Pétersbourg. Ses qualités éminentes ne pouvaient cependant manquer de lui attirer différentes offres d'emplois à l'académie, où plusieurs fauteuils étaient encore vacants; mais M. Goldbach ne voulait pas du nom de professeur et ne se souciait pas non plus de faire des cours publics. La fonction de secrétaire de l'académie, d'un Fontenelle, mais d'un Fontenelle latin (car c'était dans cette langue, qu'il connaissait à fond, que se traitaient les affaires) paraissait lui être réservée. Aussi s'en chargea-t-il, sans toutefois en prendre le titre, pour cinq ans. Ses mémoires publiés dans le recueil intitulé *Commentarii* etc. prouvent avec quel succès il a cultivé la haute géométrie, les calculs différentiel et intégral,

et combien il a été heureux dans la découverte de nouvelles propriétés des nombres. Sa critique des travaux d'autrui était fine et judicieuse au possible. Il avait apporté avec lui, non cet esprit de dispute qui sent l'école, mais bien l'urbanité et les manières du grand monde. Sa force dans la langue latine, sa connaissance intime avec les auteurs classiques latins et son imagination active ont fait de lui un poète latin très heureux. Il en avait donné une preuve éclatante, déjà à l'âge de 16 ans, par sa tragédie d'*Absalon*, en vers horatiens, travail qui aurait mérité la publication si sa modestie ne s'y fût opposée *). A l'académie il n'a pu que rarement faire valoir ce talent; mais quand l'occasion s'en présentait, la conception et la verve poétique de ses pièces ne laissaient rien à désirer. Il connaissait la langue française jusqu'aux finesses de la critique d'un Vaugelas et d'un Bouhours; la langue italienne lui était également familière, et quant à l'allemand, il l'écrivait avec une pureté et une justesse grammaticale, assez rares à cette époque. On a observé généralement, comme un fait étrange, que le véritable perfectionnement de la langue allemande a commencé à l'extrémité la plus reculée de l'Allemagne, savoir à Königsberg en Prusse, et s'est répandu de là vers la Saxe supérieure. Les efforts d'une société teutonique, fondée à Leipsic par

*) Elle se trouve, parmi ses autres papiers, aux archives centrales de Moscou.

Mensen, étaient faibles en comparaison avec ce que fit Gottsched, lorsque, en 1724, il se transporta de Königsberg à Leipsic. — Gottsched que ses élèves ont traité avec tant d'ingratitude. Or, longtemps avant Gottsched, Goldbach écrivait déjà l'allemand le plus pur et le plus élégant. Il avait le coeur le plus honnête, mais sans en faire grand étalage. Connaissant bien le monde, sa manière d'être était à la fois réservée et insinuante etc. etc.»

On reconnaît aisément la main d'un ami dans cette esquisse biographique qui s'étend au long sur les nombreux voyages de Goldbach. Sa correspondance fait voir d'ailleurs que s'il ne s'est illustré dans aucune spécialité, la cause en doit être attribuée à la grande universalité de ses connaissances. Tantôt on le voit débattre avec Bayer des questions minutieuses de philologie classique et orientale; tantôt il s'engage avec le célèbre Stosch dans d'interminables controverses archéologiques; ici, c'est Bülffinger qui l'entraîne dans ses spéculations d'une métaphysique alors en vogue, mais n'aboutissant à rien; là, Euler et les Bernoulli le font causer mathématiques et l'initient dans les mystères de la haute analyse et de la science des nombres. Toujours est-il que sa correspondance est recherchée avec avidité par les plus célèbres savants du siècle, et que son talent remarquable, de quelque côté qu'il dirige ses études, le fait toujours considérer par ses contemporains

comme une espèce d'autorité. Ses manières distinguées, jointes au don de la parole et à des connaissances profondes et variées, le font remarquer à la cour, et lorsqu'il s'agit de donner un professeur à l'Empereur Pierre II, le choix tombe sur Goldbach qui s'en acquitte avec distinction jusqu'à la mort prématurée de ce Prince. En 1742, il est nommé membre du Collège des affaires étrangères et employé spécialement au déchiffrement. Dès lors, il abandonne la carrière scientifique, mais il continue à s'occuper de sciences en simple amateur. Il atteint à un rang élevé dans la hiérarchie civile de Russie, celui de conseiller privé, et meurt à Moscou, le 20 novembre 1764, à l'âge de 74 ans.

Je crois que ces courtes notices suffiront au but que je m'étais proposé, savoir de donner à mes lecteurs une échelle pour apprécier, non le mérite des auteurs de ces lettres (pour celui-là, je dois le supposer connu), mais la nature de leurs relations réciproques et le rapport qui existe entre ces lettres mêmes et l'époque de la vie des auteurs à laquelle elles appartiennent.

Quelqu'un voudrait-il me faire un reproche de ce que pour plus d'uniformité. je n'ai pas fait traduire dans une même langue toutes ces lettres? Je ne le pense pas; je considère la langue, le style, les tournures, propres à chacun de ces auteurs, comme autant de traits caractéristiques qu'il a fallu pieusement conserver, et je ne me suis permis de retrancher que les passages qui m'ont paru n'offrir absolument aucun

intérêt. On verra que ce que je livre se rapporte soit à la science, soit à la personne des auteurs, soit enfin aux corps savants dont ils faisaient partie.

Il me reste encore à dire, qu'outre les lettres dont j'ai parlé plus haut et qui n'ont point trouvé place dans ce recueil, j'aimerais à publier aussi un extrait de la correspondance entre Frédéric II et Euler, en tant qu'elle a trait à des objets scientifiques, et à annoncer que M. Jacobi, de Königsberg, qui a bien voulu s'intéresser vivement à cette publication et m'encourager de ses conseils, m'a fait espérer tout une collection de lettres d'Euler à Lagrange, lettres qu'à sa prière, M. Libri veut bien mettre à ma disposition, à l'effet de les publier. J'ai donc les matériaux tout prêts pour former un volume supplémentaire que je livrerai avec plaisir si l'accueil fait à cet ouvrage, grâce aux noms illustres qui le parent, répond à mon attente.

Je ne puis terminer cette préface, sans témoigner publiquement ma reconnaissance à mon frère cadet, M. Nicolas Fuss, maître supérieur de mathématiques à l'un de nos gymnases, qui a bien voulu partager avec moi le travail de la rédaction de ce recueil et de la révision des épreuves, et sans le secours actif duquel je n'aurais guère pu l'achever dans le court espace d'une année.

P.-H. Fuss.

St.-Pétersbourg en décembre 1842.

NOTICE

SUR

LA VIE ET LES ÉCRITS

DE

LÉONARD EULER.

LÉONARD EULER, né à Bâle le $\frac{4}{15}$ avril 1707, fut appelé à l'Académie de St.-Pétersbourg en 1727, en qualité de membre adjoint. Son ami et compatriote, Daniel Bernoulli, s'était ainsi acquitté de la promesse qu'il lui avait donnée, en lui faisant ses adieux dans leur ville natale, deux ans avant cette époque. Euler n'avait encore rien publié, excepté la dissertation physique sur le son (N. 500 de notre liste), imprimée à Bâle en 1727; on peut donc dire que c'est chez nous qu'il jeta les premiers fondements de sa gloire immortelle. Effectivement, après quatorze années de séjour à St.- Pétersbourg, en 1741, sa réputation était déjà tellement établie, qu'il reçut et accepta l'appel honorable que lui avait adressé de Berlin l'illustre Roi-philosophe, jaloux de tous les genres de gloire et méditant, au milieu des troubles de la guerre, de doter son pays d'une académie des sciences. Le séjour d'Euler à Berlin dura 25 ans; il s'y rendit à l'âge de 34 ans; il revint à St.-Pétersbourg,

sous Catherine II, en 1766, presque sexagénaire. Les plus belles années de sa vie, il les avait donc passées hors de la Russie. Aussi avait-il déployé, dans ce laps de temps, une activité prodigieuse: Les Mémoires de l'Académie de Berlin renferment 127 pièces de sa composition, et une grande partie (17) de ses ouvrages détachés datent de cette même époque. Mais, en outre, il avait continué assidûment à orner de ses travaux le Recueil de l'Académie de St.-Pétersbourg qui, de son côté, lui avait laissé sa pension et le comptait toujours parmi ses membres effectifs. Le nombre des pièces que renferment les volumes de nos Mémoires de cette époque, s'élève au-delà de 100. Chose étrange! il paraît que le désir de se faire mieux apprécier par le Roi de Prusse et par la haute société de Berlin qui, à l'exemple du Roi, affectionnait beaucoup les sciences, il paraît, dis-je, que ce désir l'avait engagé à ne livrer à l'Académie de cette ville que des travaux d'application de préférence, et à ne se servir que de la langue française. Or, l'analyse était, comme on le sait, l'admirable instrument qu'il maniait avec le plus d'habileté et de prédilection. Durant cette période, tous ses travaux de pure théorie, rédigés en latin, trouvaient donc un débouché à l'Académie de St.-Pétersbourg qui les accueillait avec empressement.

Nous venons de dire qu'à l'âge de 59 ans, Euler revint au sein de notre Académie à laquelle il n'avait pas cessé d'appartenir, et qu'il voua à son service exclusif les 17 dernières années de sa vie laborieuse, jusqu'à sa mort, arrivée le $\frac{7}{18}$ septembre 1783. Mais, nous dira-t-on, il était donc alors sur le déclin de l'âge et presque aveugle! Et cependant, voyez le tableau de sa productivité par périodes de dix en dix ans, tableau où sont comptés et les mémoires et les ouvrages détachés:

Années	nombre des pièces
de 1727 à 1733	24
1734 „ 1743	49
1744 „ 1753	125
1754 „ 1763	99
1764 „ 1772	104
1773 „ 1782	355
	total 756

Comment expliquer cet étrange phénomène? Nous avons déjà dit (Préface p. XXIV) qu'Euler avait à ses côtés, dans la personne de son jeune compatriote, Nicolas Fuss, un aide actif et pénétré d'admiration pour le génie de son illustre maître. C'est à lui qu'est due la rédaction de la plupart des 355 mémoires des années 1773 à 1782 *). Et si, outre la fécondité du génie d'Euler, on admire généralement et avec raison l'exposition remarquablement simple et lucide de ses profondes recherches et le choix habile des exemples, — si jamais on n'a remarqué le moindre affaiblissement dans ces qualités tout-à-fait essentielles et caractéristiques de ses écrits; — ceci ne

*) Voici un extrait du procès verbal de l'Académie du 17 octobre 1774: „M. Euler, le père, présenta les deux mémoires suivants: 1. *Determinatio „omnium motuum, quos chorda tensa et uniformiter crassa recipere potest;* „2 *De motu oscillatorio pendulorum ex filo tenso dependentium*, écrits par „M. Fuess qui en a fait tous les calculs avec une grande assiduité et à la „capacité duquel M. Euler donna, à cette occasion, de grands éloges, ajoutant „que, *déjà depuis longtemps*, il a écrit tous les mémoires que lui, M. Euler „a présentés à l'Académie.“ Un autre élève d'Euler, Golovine, a écrit, sous sa dictée, 70 mémoires datés de cette même époque. (Voir l'Éloge, édition de St.-Pétersbourg, page 65).

prouve-t-il pas que le disciple s'était profondément imbu de l'esprit du maître, qu'il était digne du sort glorieux qui lui était échu, et que cette profonde reconnaissance et cette admiration que les géomètres vouent, encore de nos temps, à la mémoire d'Euler, est due en partie aussi à celui qui, avec un dévouement sans bornes et sans exemple, consacra dix belles années de sa vie au service de son incomparable maître et calcula et rédigea plus d'un tiers de ses immortels travaux? Il m'est doux de rappeler à l'attention des savants ce fait presque oublié et peut-être unique dans l'histoire des sciences, et de le mettre en évidence par des chiffres irrécusables. Ou je me trompe, ou ce service, rendu par Fuss aux géomètres de son temps et des temps à venir, est un monument non moins impérissable que les nombreux travaux par lesquels, plus tard, il a enrichi lui-même le domaine des sciences.

Mais, une conséquence plus générale encore à déduire du phénomène frappant que nous venons d'expliquer, c'est que le génie, pour se développer dans toute sa vigueur et pour produire tout l'effet dont il est susceptible, a besoin d'un appui qui, malheureusement, ne lui est prêté que fort rarement. Si Euler, — sexagénaire et frappé de cécité, — a encore pu déployer une aussi remarquable activité, qu'aurait-il fait à l'âge où l'esprit est à son maximum de fécondité, si alors déjà, il avait eu l'assistance qui, plus tard, fut accordée à ses infirmités physiques. Et combien d'idées lumineuses et de grandes conceptions ne sont-elles par perdues irréparablement, parce que le génie, impatient d'avancer et avide des succès à mesure qu'il avance, néglige souvent de *fixer* ses découvertes, par crainte de l'ennui, inséparable du travail de rédaction.

Revenons à notre sujet. Je me suis contenté de rappeler, dans ce qui précède, les moments principaux de la vie d'Euler. Quant aux détails de cette vie éminemment riche, il faut les supposer connus de chaque géomètre. Cependant, — tant est vif encore l'intérêt qui se rattache à ce nom illustre, — beaucoup de personnes distinguées, sachant que mon père a passé dix ans dans les relations les plus intimes avec Euler, m'ont demandé des renseignements sur sa vie privée et surtout sur sa manière de travailler. Je m'estime heureux de pouvoir satisfaire, en quelque sorte, à ce désir légitime, et je tâcherai de retracer ici quelques détails qui me sont connus par tradition et que ma mémoire a fidèlement conservés; car, bien souvent, le pieux souvenir que mon père, durant toute sa vie, gardait de son illustre maître, lui fournissait le sujet de ses entretiens avec moi *).

---

*) Nos promenades du soir en été, nous conduisaient souvent au cimetière de Smolenskoïé pour y retrouver la pierre sépulcrale d'Euler. Mon père qui, comme de raison, avait assisté à son enterrement, se rappelait à peu près l'endroit où il était placé, mais la pierre ne s'y trouvait plus. Dans ces promenades, l'illustre aïeul (après la mort d'Euler, mon père avait épousé sa petite-fille) était presque l'unique objet de notre conversation; et combien de fois le disciple reconnaissant ne se reprocha-t-il pas de ne pas avoir mieux veillé à la conservation du tombeau du maître. Ce fut déjà après la mort de mon père, qu'à l'occasion de l'enterrement d'une belle-fille d'Euler, le hasard fit découvrir la pierre si longtemps cherchée, et partant aussi, l'endroit où gisaient les cendres du grand géomètre qui avait illustré son siècle. Cette nouvelle fut accueillie avec transport par l'Académie qui s'empressa, cinquante ans après la mort de son célèbre membre, de lui ériger, sur la même place, un monument simple, mais durable, en granit de Finlande, avec l'inscription: *Leonhardo Eulero Academia Petropolitana.*

Il paraît qu'avant l'arrivée de mon père, qui eut lieu en mai 1773, Euler s'était laissé aider tantôt par l'un, tantôt par l'autre des nombreux élèves qu'il comptait parmi ses collègues. Dans un grand in-folio que je conserve soigneusement et qui renferme les premières ébauches des mémoires d'Euler, antérieurs à l'époque mentionnée, je crois reconnaître surtout la main de Krafft, ainsi que celles de J.-A. Euler et de Lexell; mais je m'aperçois aussi que, souvent, ils se sont contentés d'ébaucher simplement les mémoires, sans se donner ensuite la peine de les rédiger finalement, ce qui fait que ce volume laissera vraisemblablement encore quelque chose à glaner. La fin de ce volume, ainsi que trois autres qui le suivent, et que je possède également, sont écrits de la main de mon père. Euler avait dans son cabinet une grande table qui occupait tout le milieu de la pièce et dont le dessus était recouvert d'ardoise. C'est sur cette table qu'il écrivait, ou plutôt indiquait ses calculs en gros caractères, tracés avec de la craie*). Chaque matin, son élève se présentait chez lui pour lui faire lecture soit de sa vaste correspondance (dont la conduite lui était entièrement confiée), soit des feuilles politiques, soit enfin de quelque nouvel ouvrage digne d'attention; on s'entretenait de diverses matières de la science, et le maître, à cette occasion, se prêtait avec complaisance à lever les doutes et à résoudre les difficultés que l'élève avait rencontrées dans ses études. Quand la table était couverte de calculs, ce qui arrivait souvent, le maître confiait au disciple ses conceptions toutes fraîches et récentes,

*) Quand il voulait prendre de l'exercice, ce qui arrivait à des heures régulières du jour, il avait l'habitude de se promener autour de cette table, en glissant la main le long des bords, pour se guider. Ces bords, par le fréquent usage, étaient lisses et luisants comme du bois poli.

et lui exposait la marche de ses idées et le plan général de la rédaction, en lui abandonnant le soin du développement des calculs, du choix des exemples et de l'exécution des détails; et ordinairement, celui-ci lui apportait dès le lendemain le croquis du mémoire inscrit dans le grand livre dont nous avons parlé ci-dessus (*Adversaria mathematica*). Ce croquis approuvé, la pièce était rédigée au net et présentée immédiatement à l'Académie. La force de la mémoire que le vieillard avait conservée, et que peut-être la privation de la vue avait encore aiguisée, l'aidait admirablement dans ces sortes d'entretiens, ainsi que dans la lecture des ouvrages de son célèbre émule, Lagrange**), et bien des fois, pour faire de tête les calculs les plus compliqués, il lui fallait moins de temps qu'à un autre la touche à la main; et encore ne se trompait-il que fort rarement.

Tout ce que je pourrais ajouter encore à ce peu de notices sur la vie d'Euler, ne serait au fond qu'une répétition de ce qui a déjà été dit ailleurs, ou ne servirait qu'à mieux faire ressortir peut-être l'un ou l'autre des traits déjà connus de son caractère privé. Des deux éloges académiques dont il a été l'objet, celui de mon père doit être considéré comme le plus authentique sous le rapport biographique; je le crois aussi préférable à celui de Condorcet sous le rapport de l'analyse des travaux d'Euler. Les deux éloges ont été plus d'une fois reproduits dans les éditions récentes des ouvrages de notre grand géomètre; naguère encore dans celle

*) Euler ne vit du reste pas les grands ouvrages de cet illustre géomètre. La Mécanique analytique, les Leçons sur le calcul des fonctions et le Traité de la résolution des équations numériques, parurent après sa mort.



qu'on avait entreprise à Bruxelles et dont, je crois, l'interruption n'est guère à regretter. L'édition française de l'Eloge de St.-Pétersbourg n'est, d'ailleurs, pas encore épuisée. Cette pièce fut lue à l'Académie, en séance extraordinaire, peu de semaines après la mort du grand homme, le 23 octobre 1783. L'auteur avait pris soin d'y ajouter une liste, complète au possible, de tous ses écrits. Elle contient, en premier lieu, l'énumération des ouvrages détachés, par ordre chronologique; viennent ensuite les pièces insérées dans les différents recueils académiques, à commencer par ceux de l'Académie de St.-Pétersbourg, et enfin, une liste de 208 mémoires alors manuscrits, et disposés par ordre des dates de leur présentation. Les travaux inédits non présentés, qui pouvaient se trouver encore parmi les papiers d'Euler à une date antérieure, n'entraient point, à ce qu'il paraît, dans le plan de cette liste; peut-être n'en soupçonnait-on point l'existence. Toutes les pièces, marquées dans la liste comme manuscrites, à l'exception d'un très petit nombre seulement (voir ci-dessous), sont publiées, depuis longtemps, soit dans les volumes des Mémoires de l'Académie de St.-Pétersbourg qui ont paru depuis 1783, soit dans les *Opuscula analytica* (1783*) — 1785) et dans le IV volume de la seconde édition des Leçons de calcul intégral (1794). Le total des dissertations imprimées d'Euler, s'élève à présent à 712, dont

500 dans les cinq Recueils de l'Académie de St.-Pétersbourg,

43 dans les *Opuscula analytica* et dans les *Institutiones Calculi integralis* (seconde édition, vol. IV), publiées également à St.-Pétersbourg,

---

*) La publication de ce recueil avait commencé déjà du vivant d'Euler.

127 dans les Mémoires de l'Académie de Berlin,
13 dans les *Opuscula varii argumenti*,
29 dans les recueils des académies de Paris, de Londres, de Turin, de Leipzic etc.

Des 32 ouvrages publiés séparément, la moitié, savoir 16, et nommément les ouvrages les plus marquants et les plus volumineux, ont paru à St.-Pétersbourg sous les auspices de notre Académie; tels sont: l'Arithmétique, l'Algèbre, les Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, les traités de mécanique, de dioptrique, de musique, de science navale, la théorie des mouvements de la lune, les lettres à une princesse d'Allemagne, les Opuscules analytiques etc.

Si l'on considère que, de nos jours encore, les géomètres se trouvent continuellement dans le cas de recourir aux travaux d'Euler, on concevra aisément tout le prix qu'ils ont dû attacher à la publication de la liste dont nous venons de parler. Elle fournissait du moins un inventaire complet de cette succession littéraire, la plus riche que jamais un savant ait léguée à la postérité; mais la manière dont cette liste était disposée en rendait l'usage assez incommode. Cette considération m'avait engagé, il y a bien des années, à la rédiger, pour mon propre usage, par ordre systématique des matières. Le temps et le soin que j'y avais mis ont été amplement récompensés par la grande facilité que ma nouvelle liste me fournissait dans la recherche de tel travail d'Euler dont je me trouvais momentanément avoir besoin. Beaucoup de personnes m'ont assuré que la publication de cette liste serait encore accueillie avec plaisir par les géomètres, ce qui m'a déterminé à la placer en tête de ce recueil. Peut-être trouvera-t-on à redire à l'ordre que j'ai adopté çà et là dans la suite des mémoires; mais on n'ira pas, je

l'espère, exiger une succession d'idées rigoureusement conséquente entre des pièces décousues et pour la plupart indépendantes les unes des autres. Après avoir établi les divisions générales et les sous-divisions, j'y ai classé les mémoires, en réunissant par groupes ceux qui m'ont semblé avoir quelque analogie de sujet entre eux, et en me conformant le plus souvent à l'ordre chronologique. Dans les cas, assez fréquents, où le même article pouvait appartenir à deux divisions différentes, je l'ai placé aux deux endroits, mais, bien entendu, sans le compter doublement, ou je me suis contenté de renvois. Lorsque le titre d'un mémoire était trop général, j'y ai ajouté une courte indication du contenu, en tant que cela pouvait se faire, sans devenir trop prolixe et sans le secours de figures. J'ai enrichi l'inventaire dressé par mon père de 21 pièces imprimées et d'un manuscrit qui manquaient dans la liste de l'Éloge; mais, d'un autre côté, j'ai remarqué dans cette dernière, parmi les pièces inédites, neuf titres que je ne retrouve dans aucun recueil imprimé, et qui n'existent pas non plus en manuscrit. Enfin cinq pièces manuscrites, présentées à l'Académie et marquées par conséquent dans l'Éloge, se conservent effectivement encore aux archives de l'Académie; elles sont consignées à la page CXIX de notre liste. Il paraît que la première de ces pièces, présentée déjà en 1774, a été mise au rebut par l'auteur lui-même; la seconde, sur le mouvement du sang dans les artères, est incomplète; la troisième, la description d'un manomètre, ne saurait guère offrir de l'intérêt aux physiciens de nos jours; les deux dernières enfin, sur deux problèmes de la théorie des nombres, sont d'origine apocryphe, vu qu'il y est dit qu'elles ont été calculées, sous la direction d'Euler, par un nommé Wilbrecht qui fut, pendant quelque temps, son élève.

J'ai encore à faire observer que le total de ma liste (756 numéros) doit peut-être subire une petite réduction; car, d'abord, il est fort probable que les numéros

455 et 456
679 et 682
685 et 686
743 et 744

sont identiques, et se rapportent à quatre et non à huit mémoires différents. Il paraît que le mode étrange, adopté par l'Académie de Berlin dans le premier tome de ses Mémoires, savoir de ne pas publier les dissertations *in extenso*, mais d'en donner seulement de maigres extraits, avait engagé Euler à recueillir dans un volume à part, les mémoires qu'il avait lus à cette époque, ce qui apparemment a donné naissance au recueil qu'il publia, de 1746 à 1751, sous le titre d'*Opuscula varii argumenti*. Ensuite, — et je crois qu'on m'en saura gré, — j'ai cité sous trois différents numéros, autant de théorèmes différents d'une même dissertation dont le contenu est fort hétérogène. C'est la pièce intitulée: *Theoremata quaedam analytica, quorum demonstratio adhuc desideratur (Op. anal. II. p.* 76); elle se rencontre aux-numéros 102, 357 et 415. Enfin, j'ai cru devoir marquer de deux numéros différents les deux parties d'une même pièce, toutes les fois qu'elles ont été présentées à l'Académie à deux diverses reprises. Les dates de la présentation des mémoires, là où elles manquent (*Commentarii, Novi Commentarii* et *Acta*), ont été vérifiées par moi d'après les procès verbaux de l'Académie de ces temps-là.

J'ajouterai finalement que je n'ai pas encore eu le temps de confronter avec ma liste les nombreux manuscrits d'Euler, tant

ceux qui se conservent aux archives de l'Académie, que ceux qui m'appartiennent en particulier, ce qui fait que je n'ai pu citer aujourd'hui qu'une seule pièce inédite non contenue dans l'Éloge (v. ci-dessous page CXIX). Je me propose d'employer à ce travail le premier loisir que me laisseront mes nombreuses occupations, et en cas de succès, de compléter ma liste, avant d'en faire tirer une édition à part que je destine à l'usage de ceux à qui l'acquisition de cette Correspondance paraîtra trop coûteuse.

LISTE SYSTÉMATIQUE

DES OUVRAGES

DE

LÉONARD EULER.

TABLE DES MATIÈRES.

ABRÉVIATIONS

adoptées pour indiquer les Recueils dans lesquels se trouvent insérés les mémoires d'Euler.

Abh. der St. Petersb. ökon. Gesellsch. — Abhandlungen der St. Petersburgischen ökonomischen Gesellschaft. (Tome VI. 1767). (1)

A. — Acta Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae. (Tomes I — VI, chacun composé de deux parties, années 1777 — 1782). (89)

A. Erud. Lips. — Acta Eruditorum Lipsiensia. (Années 1733. 1744. 1773). (3)

Comm. — Commentarii Academiae imp. sc. Petropolitanae. (Tomes I — XIV, années 1726 — 1746). (73)

Inst. Calc. int. — Institutiones Calculi integralis. (Seconde édition. St.-Pétersb. 1794. 4.). (29*)

J. litt. de l'All. — Journal littéraire de l'Allemagne. (Année 1751). (1)

Mém. — Mémoires de l'Académie imp. des sc. de St.-Pétersbourg. (Tomes I — XI, années 1803 — 1822). (58)

Mém. de Berl. — Mémoires de l'Académie roy. des sc. de Berlin. (Tomes I — XXIII. XXV, années 1745 — 1767. 1769). (120)

Mém. de Paris. — Mémoires de l'Académie roy. des sc. de Paris. (Années 1765. 1778). (2)

Misc. Berol. — Miscellanea Berolinensia. (Tome VII, année 1743). (5)

Misc. Taur. — Miscellanea Taurinensia. (Tomes II, III, années 1760 — 1765). (6)

N. A. — Nova Acta Academiae imp. sc. Petropolitanae. (Tomes I — XV, années 1783 — 1802). (101)

---

*) Dans ce nombre, il y a 15 dissertations, insérées aussi ailleurs, nommément dans les *Opuscula analytica* et les Recueils de l'Académie de St.-Pétersbourg. Elles sont comptées doublement et doivent être déduites du total.

N. Comm. — Novi Commentarii Academiae imp. sc. Petropolitanae (Tomes I — XX; le t. XIV est composé de deux parties. Années 1747 — 1775). (179)

N. Mém. de Berl. — Nouveaux Mémoires de l'Académie roy. des sc. de Berlin. (Années 1772. 1776). (2)

Op. anal. — Opuscula analytica. (T. I. II. St.-Pétersb. 4. 1783. 1785). (29)

Op. var. arg. — Opuscula varii argumenti (T. I. II. III. Berlin. 4. 1746 — 1751). (13)

Philos. Transact. — Philosophical Transactions, London. 1749. 1750. 1751. (3)

Rec. d. p. cour. de Paris. — Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'Académie roy. des sc. de Paris. (Tomes II. IV. V. VII. VIII. IX.) (12)

Verhand. van het Genootsch. te Vlissingen — Mémoires de la Société de Vlissingue. (Tome IX). (1)

LISTE

COMPLÈTE ET SYSTÉMATIQUE

DES OUVRAGES DE LÉONARD EULER.

(Les astérisques marquent les ouvrages non consignés dans la liste annexée à l'*Eloge*).

A) OUVRAGES PUBLIÉS.

ARITHMÉTIQUE. THÉORIE DES NOMBRES. ANALYSE INDÉTERMINÉE.

Arithmétique élémentaire.

1\. 1. Anleitung zur Arithmetik. *Ouvrage séparé. St.-Pétersb.* 1738. 2 vol. 8.

Théorie des nombres. Analyse indéterminée.

2\. 2. De numeris amicabilibus. *Op. var. arg. II.* 1750. *p.* 23.

3\. 3. Découverte d'une loi extraordinaire des nombres. *Journal littéraire de l'Allemagne* 1751. *Janv. et févr.*

4\. 4. Specimen de usu observationum in mathesi pura. *N. Comm. VI.* 1756. 1757. *p.* 185.

5\. 5. De relatione inter tres pluresve quantitates instituenda. *Op. anal. II.* 1775. *p.* 91.

6\. 6. De insigni promotione scientiae numerorum. *Op. anal. II.* 1775. *p.* 275.

7\. 7. Theoremata circa divisores numerorum. *N. Comm. I.* 1747. 1748. *p.* 20.

36. 36. **De mirabilibus proprietatibus numerorum pentagonalium.** *A. IV.* I. **1780.** *p.* **56.**

37. 37. **Considerationes super theoremate Fermatiano: De resolutione numerorum in numeros polygonales.** *Op. anal. II.* **1774.** *p.* **3.**

38. 38.* Illustratio paradoxi circa progressionem numerorum idoneorum sive congruorum. *N. A. XV.* **1778.** *p.* **29.**

39. 39. Speculationes circa quasdam insignes proprietates numerorum. *A. IV.* II. **1780.** *p.* **18.**

40. 40. Miscellanea analytica. *Op. anal. I.* **1775.** *p.* **329.**

1) n étant un nombre premier, ce produit: $1.2.3....(n-1)$ augmenté de l'unité, sèra toujours divisible par n. — 2) Trouver quatre nombres entiers tels que les produits de ces nombres, pris deux à deux, augmentés de l'unité, soient des carrés. — 3) Trouver les nombres x et y tels que la formule $(\frac{xx+1}{x})^2 + (\frac{yy+1}{y})^2$ soit un carré. — 4) Trouver deux nombres tels que leur somme soit un carré, et la somme de leurs carrés une 4ème puissance. — 5) La formule $1 + Az + Bzz + Cz^3 + \ldots$ étant le produit des facteurs $1 + \alpha z$, $1 + \beta z$, $1 + \gamma z \ldots$ trouver la somme de toutes les puissances des α, β, $\gamma \ldots$ — 6) Trouver cinq nombres tels que les produits de ces nombres pris deux à deux, augmentés de l'unité, soient des carrés.

41. 41. Novae demonstrationes circa resolutionem numerorum in quadrata. *A. Erudit. Lips.* **1773.** *p.* **193.**

42. 42*. De novo genere quaestionum arithmeticarum, pro quibus solvendis certa methodus adhuc desideratur. *N. A. XI.* **1777.** *p* **78.**

La question, qui fait le sujet de ce mémoire, consiste à trouver tous les nombres entiers N, tels que les formules $A^2 + B^2$ et $A^2 + NB^2$ deviennent l'une et l'autre à la fois des carrés.

43. 43. Solutio succincta et elegans problematis quo quaeruntur tres numeri tales, ut tam summae quam differentiae binorum fiant quadrata. *Mém. VI.* **1780.** *p.* **54.**

44. 44. De tribus pluribusve numeris inveniendis, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum. *Mém. IX.* 1780. *p.* 3.

45. 45. Resolutio facilis quaestionis difficillimae, qua haec formula generalis: $vvzz(axx+byy)^2+4xxyy(avv+bzz)^2$ ad quadratum reduci postulatur. *Mém. IX.* 1780. *p.* 14.

46. 46. Solutio problematis Fermatiani, de duobus numeris, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum. *Mém. X.* 1780. *p.* 3.

47. 47. Solutio problematis difficillimi, quo hae duae formulae: $aaxx+bbyy$ et $aayy+bbxx$ quadrata reddi debent. *Mém. XI.* 1780. *p.* 12.

48. 48. Investigatio binorum numerorum formae: $xy(x^4-y^4)$, quorum productum sive quotus sit quadratum. *Mém. XI.* 1780. *p.* 31.

49. 49. De binis numeris, quorum summa, sive aucta sive minuta tam unius quam alterius quadrato, producat quadrata. *Mém. XI.* 1780. *p.* 46.

50. 50. Dilucidationes circa binas summas duorum biquadratorum inter se aequales. *Mém. XI.* 1780. *p.* 49.

51. 51. Methodus nova et facilis formulas cubicas et biquadraticas ad quadratum reducendi. *Mém. XI.* 1780. *p.* 69.

52. 52. De casibus, quibus formulam $x^4 \pm mxxyy + y^4$ ad quadratum reducere licet. *Mém. VII.* 1782. *p.* 10.

53. 53. De solutione problematum Diophanteorum per numeros integros. *Comm. VI.* 1732. 1733. *p.* 175.

54. 54. Resolutio formulae Diophanteae:

$$ab(maa+nbb)=cd(mcc+ndd)$$

per numeros rationales. *N. A. XIII.* 1778. *p.* 45.

55. 55. De problematibus indeterminatis, quae videntur plus quam determinata. *N. Comm. VI.* 1756. 1757. *p.* 85.

56. 56. De casibus quibusdam maxime memorabilibus in analysi indeterminata, ubi imprimis insignis usus calculi angulorum in analysi Diophantea ostenditur. *A. II.* II. 1778. *p.* 85.

68. 68. Resolutio aequationis: $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ per numeros tam rationales quam integros. *N. Comm. XVIII.* 1773. *p.* 185.

69. 69. De resolutione hujus aequationis: $0=a+bx+cy+dxx+exy+fyy+gxxy+hxyy+ixxyy$ per numeros rationales. *Mém. XI.* 1780. *p.* 58.

70. 70. De criteriis aequationis $fxx+gyy=hzz$, utrum ea resolutionem admittat, nec ne? *Op. anal. I.* 1774. *p.* 211.

71. 71. Problema Diophanteum singulare. *N. Comm. XIX.* 1774. *p.* 112.

Trouver deux nombres dont le produit, augmenté ou diminué de l'un quelconque de ces nombres, devienne un nombre carré.

72. 72. Solutio quorundam problematum Diophanteorum. *N. Comm. XX.* 1775. *p.* 48.

Sur des nombres carrés, composés de carrés de diverses manières.

73. 73. Solutio generalis problematum quorundam Diophanteorum, quae vulgo non nisi solutiones speciales admittere videntur. *N. Comm. VI.* 1756. 1757. *p.* 155.

74. 74. Novae demonstrationes circa resolutionem numerorum in quadrata. *A. I.* II. 1777. *p.* 48.

75. 75. De tribus numeris quadratis, quorum tam summa, quam summa productorum ex binis sit quadratum. *A. III.* I. 1779. *p.* 30.

76. 76. De singulari genere quaestionum Diophantearum, et methodo maxime recondita eas resolvendi. *N. A. IX.* 1777. *p.* 3.

77. 77. De binis formulis $xx+myy$ et $xx+nyy$ inter se concordibus et discordibus. *Mém. VIII.* 1780. *p.* 3.

78. 78. De insigni promotione analysis Diophanteae. *Mém. XI.* 1780. *p.* 1.

79. 79. Regula facilis problemata Diophantea per numeros integros expedite resolvendi. *Mém. IV.* 1778. *p.* 3.

80. 80. De methodo Diophanteae analoga in analysi infinitorum. *N. Comm. V.* 1754. 1755. *p.* 84.

81. 81. Specimen singulare analyseos infinitorum indeterminatae. *N. A. III.* **1776.** *p.* **47.**

82. 82. Problematis ad analysin infinitorum indeterminatam referendi solutio. *Mém. XI.* **1781.** *p.* **92.**

83. 83. Problema algebraicum, ob affectiones prorsus singulares memorabile. *N. Comm. XV.* **1770.** *p.* **75.**

Trouver neuf nombres $A, B, C,$
$D, E, F,$
$G, H, I,$
tels qu'ils satisfassent aux douze conditions suivantes:

1. $AA+DD+GG=1$;	4. $AB+DE+GH=0$;
2. $BB+EE+HH=1$;	5. $AC+DF+GI=0$;
3. $CC+FF+II=1$;	6. $BC+EF+HI=0$;
7. $AA+BB+CC=1$;	10. $AD+BE+CF=0$;
8. $DD+EE+FF=1$;	11. $AG+BH+CI=0$;
9. $GG+HH+II=1$;	12. $DG+EH+FI=0$.

84. 84. Solution d'une question curieuse qui ne paraît soumise à aucune analyse sur la marche du cavalier sur l'échiquier. *Mém. de Berlin. XV.* **1759.** *p.* **310.**

85. 85. Recherches sur une nouvelle espèce de carrés magiques. *Verhand. van het Genootsch. te Vlissingen. IX.* **1782.** *p.* **85.**

ANALYSE ALGÉBRIQUE.

86. 1. Anleitung zur Algebra. *Ouvrage séparé. St.-Pétersb.* **1770.** 2. vol. 8.

87. 2. Introductio in Analysin infinitorum. *Ouvrage séparé. Lausanne.* **1748.** 2 vol. 4.

Théorie générale des fractions.

88. 3. Nova methodus fractiones quascunque rationales in fractiones simplices resolvendi. *A. IV.* I. **1780.** *p.* **32.**

89. 4. De fractionibus continuis. *Comm. IX.* **1737.** *p.* **98.**

90. 5. De fractionibus continuis observationes. *Comm. XI.* 1739. *p.* 32.

91. 6. De formatione fractionum continuarum. *A. III.* I. 1779. *p.* 3.

92. 7. Specimen algorithmi singularis. *N. Comm. XI.* 1762. 1763. *p.* 53.

93. 8. De resolutione irrationalium per fractiones continuas, ubi simul nova quaedam singularis species minimi exponitur. *N. Comm. XVIII.* 1773. *p.* 218.

94. 9. Observationes analyticae. *Op. anal. I.* 1774. *p.* 85. Fractions continues.

95. 10. De transformatione serierum in fractiones continuas, ubi simul haec theoria non mediocriter amplificatur. *Op. anal. II.* 1775. *p.* 138.

96. 11. Summatio fractionis continuae, cujus indices progressionem arithmeticam constituunt, dum numeratores omnes sunt unitates; ubi simul resolutio aequationis Riccatianae per hujusmodi fractiones docetur. *Op. anal. II.* 1775. *p.* 217.

97. 12. De resolutione fractionum compositarum in simpliciores. *Mém. I.* 1779. *p.* 3.

98. 13. De resolutione fractionum transcendentium in infinitas fractiones simplices. *Op. anal. II.* 1775. *p.* 102.

99. 14.* Observationes circa fractiones continuas. *Mém. IV.* 1779. *p.* 52.

100. 15. De fractionibus continuis Wallisii. *Mém. V.* 1780. *p.* 24.

101. 16. Commentatio in fractionem continuam qua Ill. La Grange potestates binomiales expressit. *Mém. VI.* 1780. *p.* 3.

Quantités imaginaires.

102. 17. Omnes plane quantitates imaginariae, quaecunque in calculo analytico occurrere possunt ad hanc formam simplicissimam $a + b\sqrt{-1}$ ita revocari possunt, ut litterae a et b quantitates reales denotent. (Fait partie du mémoire intitulé: Theoremata quaedam analytica quorum demonstratio adhuc desideratur). *Op. anal. II.* 1775. *p.* 76. (V. 357. 415).

Théorie des équations.

solum radices ipsae, sed etiam quaevis earum potestates exprimi possint. *N. A. IV.* 1776. *p.* 55.

117. 32. De innumeris generibus serierum maxime memorabilium, quibus omnium aequationum algebraicarum non solum radices ipsae, sed etiam quaecunque earum potestates exprimi possunt. *N. A. IV.* 1776. *p.* 74.

118. 33. De constructione aequationum ope motus tractorii, aliisque ad methodum tangentium inversam pertinentibus. *Comm. VIII.* 1736. *p.* 66.

119. 34. De constructione aequationum. *Comm. IX.* 1737. *p.* 85.

S é r i e s.

120. 35. De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt. *Comm. V.* 1730. 1731. *p.* 36.

121. 36. Variae observationes circa series infinitas. *Comm. IX.* 1737. *p.* 160.

122. 37. De productis ex infinitis factoribus ortis. *Comm. XI.* 1739. *p.* 3.

123. 38. De seriebus quibusdam considerationes. *Comm. XII.* 1740. *p.* 53.

124. 39. De serierum determinatione, seu nova methodus inveniendi terminos generales serierum. *N. Comm. III.* 1750. 1751. *p.* 36.

125. 40. De seriebus divergentibus. *N. Comm. V.* 1754. 1755. *p.* 205.

126. 41. Observationes analyticae. *N. Comm. XI.* 1765. *p.* 124.

127. 42. Exercitationes analyticae. *N. Comm. XVII.* 1772. *p.* 173.

128. 43. Varia artificia in serierum indolem inquirendi. *Op. anal. I.* 1775. *p.* 48.

129. 44. Demonstratio gemina theorematis Newtoniani, quo traditur relatio inter coëfficientes cujusvis aequationis algebraicae et summas potestatum radicum ejusdem. *Op. var. arg. II.* 1750. *p.* 108.

130. 45. Demonstratio theorematis Newtoniani, de evolutione potestatum binomii, pro casibus quibus exponentes non sunt numeri integri. *N. Comm. XIX.* 1774. *p.* 103.

131. 46. Nova demonstratio, quod evolutio potestatum binomii Newtoniani etiam pro exponentibus fractis valeat. *N. A. V.* 1776. *p.* 52.

132. 47. De serie maxime memorabili, qua potestas binomialis quaecunque exprimi potest. *Mém. IV.* 1779. *p.* 75.

133. 48. Plenior expositio serierum illarum memorabilium, quae ex unciis potestatum binomii formantur. *N. A. VIII.* 1776. *p.* 32.

134. 49. De mirabilibus proprietatibus unciarum, quae in evolutione binomii ad potestatem quamcunque evecti occurrunt. *A. V.* I. 1776. *p.* 74.

135. 50. De insignibus proprietatibus unciarum binomii ad uncias quorumvis polynomiorum extensis. *A. V.* II. 1776. *p.* 76.

136. 51. Demonstratio insignis theorematis numerici circa uncias potestatum binomialium. *N. A. XV.* 1778. *p.* 33.

137. 52. De unciis potestatum binomii, earumque interpolatione. *Mém. IX.* 1781. *p.* 57.

138. 53. De extractione radicum ex quantitatibus irrationalibus. *Comm. XIII.* 1741 — 1743. *p.* 16.

139. 54. Nova ratio quantitates irrationales proxime exprimendi. *N. Comm. XVIII.* 1773. *p.* 136.

140. 55. De inventione quotcunque mediarum proportionalium citra radicum extractionem. *N. Comm. XIV.* I. 1769. *p.* 188.

141. 56. De progressionibus harmonicis observationes. *Comm. VII.* 1734. 1735. *p.* 150.

142. 57. Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques. *Mém. de Berlin. XVII.* 1761. *p.* 83.

143. 58. Meditationes circa singulare serierum genus. *N. Comm. XX.* 1775. *p.* 140.

Voici la forme générale de cette série:

$$1 + \frac{1}{2^m}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{3^m}\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) +$$
$$\frac{1}{4^m}\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}\right) + \text{etc.}$$

144. 59. De termino generali serierum hypergeometricarum. *N. A. VII.* **1776.** *p.* **42.**

145. 60. Variae considerationes circa series hypergeometricas. *N. A. VIII.* **1776.** *p.* **3.**

146. 61. Insignes proprietates serierum sub hoc termino generali contentarum:

$$x = \tfrac{1}{2}\left(a+\frac{b}{\sqrt{k}}\right)\left(p+q\sqrt{k}\right)^{n} + \tfrac{1}{2}\left(a-\frac{b}{\sqrt{k}}\right)\left(p-q\sqrt{k}\right)^{n}.$$

N. Comm. XVIII. **1773.** *p.* **198.**

147. 62. De progressionibus arcuum circularium quorum tangentes secundum certam legem procedunt. *N. Comm. IX.* **1762. 1763.** *p.* **40.**

148. 63. Dilucidationes super formulis, quibus sinus et cosinus angulorum multiplorum exprimi solent, ubi ingentes difficultates diluuntur. *N. A. IX.* **1777.** *p.* **54.**

149. 64. Observationes generales circa series, quarum termini secundum sinus vel cosinus angulorum multiplorum progrediuntur. *N. A. VII.* **1776.** *p.* **87.**

150. 65. Methodus facilis inveniendi series per sinus cosinusve angulorum multiplorum procedentes, quarum usus in universa theoria astronomiae est amplissimus. *N. A. XI.* **1777.** *p.* **94.**

151. 66. Diquisitio ulterior super seriebus secundum multipla cujusdam anguli progredientibus. *N. A. XI.* **1777.** *p.* **114.**

152. 67. De seriebus memorabilibus, quibus sinus et cosinus angulorum multiplorum exprimere licet. *Mém. V.* **1780.** *p.* **57.**

153. 68. Variae observationes circa angulos in progressione geometrica procedentes. *Op. anal. I.* **1775.** *p.* **345.**

154. 69. Exercitatio analytica. *N. A. VIII.* **1776.** *p.* **69.**

Le cosinus de tout angle peut être exprimé par un produit d'un nombre infini de facteurs, savoir:

$$\cos\frac{\pi}{2n} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{9n^2}\right)\left(1-\frac{1}{25n^2}\right)\text{ etc.}$$

il se présente ici la question intéressante de savoir comment, en supposant la valeur de ce produit inconnue, on puisse trouver d'une manière facile sa valeur $\cos\frac{\pi}{2n}$.

155. 70. Observationes circa novum et singulare serierum genus. *N. Comm. XX.* **1775.** *p.* **123.**

156. 71. Consideratio quarundam serierum, quae singularibus proprietatibus sunt praeditae. *N. Comm. III.* **1750. 1751.** *p.* **86.**

157. 72. Investigatio quarundam serierum, quae ad rationem peripheriae circuli ad diametrum definiendam maxime sunt accomodatae. *N. A. XI.* **1779.** *p.* **133.**

158. 73. De novo genere talium serierum. *N. A. XI.* **1779.** *p.* **150.**

159. 74. Consideratio progressionis cujusdam ad circuli quadraturam inveniendam idoneae. *Comm. XI.* **1739.** *p.* **116.**

160. 75. De seriebus, in quibus producta ex binis terminis contiguis datam constituunt progressionem. *Op. anal. I.* **1775.** *p.* **3.**

161. 76. Proposita quacunque progressione ab unitate incipiente, quaeritur quot ejus terminos ad minimum addi opporteat, ut omnes numeri producantur. *Op. anal. I.* **1775.** *p.* **296.**

162. 77. Dilucidationes in capita postrema Calculi mei differentialis de functionibus inexplicabilibus. *Mém. IV.* **1780.** *p.* **88.**

163. 78. De eximio usu methodi interpolationum in serierum doctrina. *Op. anal. I.* **1775.** *p.* **157.**

164. 79. De transformatione seriei divergentis
$1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 + \ldots$
in fractionem continuam. *N. A. II.* **1776.** *p.* **36.**

165. 80. Specimen transformationis singularis serierum. *N. A. XII.* **1778.** *p.* **58.**

166. 81. De serie Lambertina, plurimisque ejus insignibus proprietatibus. *A. III.* II. **1779.** *p.* **29.**

167. 82. Evolutio producti infiniti $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)$ etc. in seriem simplicem. *A. IV.* I. **1780.** *p.* **47.**

168. 83. De evolutione potestatis polynomialis cujuscunque:
$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^n.$$
N. A. XII. **1778.** *p.* **47.**

169. 84. De usu functionum discontinuarum in analysi. *N. Comm. XI.* **1765.** *p.* **3.**

170. 85. Disquisitiones analyticae super evolutione potestatis trinomialis $(1 + x + xx)^n$. *N. A. XIV.* **1778.** *p.* **75.**

NB. A cette catégorie appartiennent aussi plusieurs problèmes contenus dans le mémoire intitulé *Observationes analyticae.* (Voir ci-dessus *N.* 126. *N. Comm. XI.* 1765. *p.* 124).

171. 86. Methodus generalis summandi progressiones. *Comm. VI.* 1732. 1733. *p.* 68.

172. 87. Inventio summae cujusque seriei ex dato termino generali. *Comm. VIII.* 1736. *p.* 9.

173. 88. De summatione innumerabilium progressionum. *Comm. V.* 1730. 1731. *p.* 91.

174. 89. De summis serierum reciprocarum. *Comm. VII.* 1734. 1735. *p.* 123.

175. 90. Dissertatio altera de summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum. *Misc. Berol. VII.* 1743. *p.* 172.

176. 91. Methodus universalis serierum convergentium summas quam proxime inveniendi. *Comm. VIII.* 1736. *p.* 3.

177. 92. Methodus universalis series summandi ulterius promota. *Comm. VIII.* 1736. *p.* 147.

178. 93. De seriebus potestatum reciprocis methodo nova et facillima summandis. *Op. anal. II.* 1775. *p.* 257.

179. 94. De singulari ratione differentiandi et integrandi, quae in summis serierum occurrit. *N. A. VI.* 1776. *p.* 3.

180. 95. De summatione serierum in quibus terminorum signa alternantur. *N. A. II.* 1776. *p.* 46.

181. 96. De numero memorabili in summatione progressionis harmonicae naturalis occurrente. *A. V.* II. 1781. *p.* 45.

182. 97. Summatio progressionum:
$\sin \varphi^\lambda + \sin 2\,\varphi^\lambda + \sin 3\,\varphi^\lambda \ldots + \sin n\,\varphi^\lambda$
$\cos \varphi^\lambda + \cos 2\,\varphi^\lambda + \cos 3\,\varphi^\lambda \ldots + \cos n\,\varphi^\lambda.$
N. Comm. XVIII. 1773. *p.* 24.

183. 98. De summis serierum numeros Bernoullianos involventium. *N. Comm. XIV.* I. 1769. *p.* 129.

184. 99. De plurimis quantitatibus transcendentibus, quas nullo

modo per formulas integrales exprimere licet. *A. IV.* II. 1780. *p.* 31.

185. 100. Exercitatio analytica, ubi imprimis seriei maxime generalis summatio traditur. *N. A. IX.* 1777. *p.* 41.

186. 101. De summa seriei ex numeris primis formatae: $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} - \frac{1}{29} + \frac{1}{31} - \ldots$ ubi numeri primi formae $4n - 1$ habent signum positivum, formae autem $4n + 1$ signum negativum. *Op. anal. II.* 1775. *p.* 240.

187. 102. De summatione serierum in hac forma contentarum:

$$\frac{a}{1} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^4}{16} + \cdots$$

Mém. III. 1779. *p.* 26.

188. 103. Nova methodus summas serierum infinitarum per formulas differentiales investigandi. *Mém. V.* 1780. *p.* 45.

189. 104. De la controverse entre MM. Leibnitz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires. *Mém. de Berlin. V.* 1749. *p.* 139.

190. 105. De formulis exponentialibus replicatis. *A. I.* I. 1777. *p.* 38.

191. 106. Observationes analyticae variae de combinationibus. *Comm. XIII.* 1741 — 1743. *p.* 64.

192. 107. Solutio quaestionis curiosae ex doctrina combinationum. *Mém. III.* 1779. *p.* 57.

CALCUL INFINITÉSIMAL.

Calcul différentiel.

193. 1. Institutiones Calculi differentialis, cum ejus usu in analysi finitorum ac doctrina serierum. *Ouvrage séparé. Berlin* 1755. 4. Seconde édition: *Tessin* 1787. 2 vol. 4.

194. 2. De infinities infinitis gradibus tam infinite magnorum quam infinite parvorum. *A. II.* I. 1778. *p.* 102.

195. 3. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive Solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. *Ouvrage séparé. Lausanne* 1744. 4.

196. 4. Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova ac facilis. *Comm. VIII.* **1736.** *p.* **159.**

197. 5. Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum. *N. Comm. X.* **1764.** *p.* **94.**

198. 6. Methodus facilis ducendi radios osculi ex methodo maximorum et minimorum petita. *N. A. VII.* **1776.** *p.* **83.**

199. 7. De insigni paradoxo, quod in analysi maximorum et minimorum occurrit. *Mém. III.* **1779.** *p.* **16.**

Voir *Géométrie analytique*, à l'article des *Courbes des ordres supérieurs*, plusieurs mémoires qui se rapportent aux *maxima* et *minima*.

Calcul intégral.

200. 8. Institutiones Calculi integralis. *Ouvrage séparé. St.-Pétersb.* **1768 — 1770.** **3** vol. **4.** Seconde édition: *St.-Pétersb.* **1792 — 1794.** **4** vol. **4.**

201. 9. Methodus integrandi formulas differentiales rationales unicam variabilem involventes. *Comm. XIV.* **1744 — 1746.** *p.* **3.**

202. 10. Methodus facilior atque expeditior integrandi formulas differentiales rationales. *Comm. XIV.* **1744 — 1746.** *p.* **99.**

203. 11. Nova methodus integrandi formulas differentiales rationales sine subsidio quantitatum imaginariarum. *A. V.* I. **1781.** *p.* **3.**

204. 12. De integratione formularum differentialium irrationalium. *A. IV.* I. **1780.** *p.* **4.** *Inst. Calc. int. IV. p.* **3.**

205. 13. Theoremata circa reductionem formularum integralium ad circuli quadraturam. *Misc. Berol. VII.* **1743.** *p.* **91.**

206. 14. Consideratio formularum, quarum integratio per arcus sectionum conicarum absolvi potest. *N. Comm. VIII.* **1760. 1761.** *p.* **129.**

207. 15. De reductione formularum integralium ad rectificationem ellipsis et hyperbolae. *N. Comm. X.* **1764.** *p.* **3.**

208. 16. Speculationes super formula integrali $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{(aa+2bx+cxx)}}$, ubi simul egregiae observationes circa fractiones continuas occurrunt. *A. VI.* II. **1775.** *p.* **62.** *Inst. Calc. int. IV. p.* **31.**

209. 17. De integratione formulae $\int \frac{dx\sqrt{(1+x^4)}}{1-x^4}$ aliarumque similium. *Inst. Calc. int. IV.* 1776. *p.* 36.

210. 18. Quatuor theoremata maxime notatu digna in calculo integrali. *N. A. VII.* 1776 *p.* 22.

Sur les courbes algébriques dont les arcs indéfinis s sont exprimés par une même formule intégrale, savoir $s = \int d\varphi \sin \varphi^{n-1}$.

211. 19. Formae generales differentialium, quae etsi nulla substitutione rationales reddi possunt, tamen integrationem per logarithmos et arcus circulares admittunt. *N. A. XI.* 1777. *p.* 27.

212. 20. Integratio formulae cujusdam differentialis maxime irrationalis, quam tamen per logarithmos et arcus circulares expedire licet. *N. A. IX.* 1777. *p.* 118.

213. 21. De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus, quas tamen per logarithmos et arcus circulares integrare licet. *Inst. Calc. int. IV.* 1777. *p.* 183.

214. 22. Evolutio formulae integralis

$$\int \frac{dz(3+zz)}{(1+zz)\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)}}$$

per logarithmos et arcus circulares. *N. A. IX.* 1777. *p.* 127.

215. 23. Integratio succincta formulae maxime memorabilis

$$\int \frac{dz}{(3 \pm zz)\sqrt[3]{(1 \pm 3zz)}}.$$

N. A. X. 1777. *p.* 20.

216. 24. Specimen integrationis abstrusissimae, hac formula

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt[4]{(2xx-1)}}$$

contentae. *N. A. IX.* 1777. *p.* 98.

217. 25. Memorabile genus formularum differentialium maxime irrationalium, quas tamen ad rationalitatem perducere licet. *Inst. Calc. int. IV.* 1777. *p.* 48.

218. 26.* Theorema maxime memorabile circa formulam integralem

$$\int \frac{d\varphi \cos \lambda\varphi}{(1+aa-2a\cos\varphi)^{n+1}}.$$

Inst. Calc. int. IV. 1778. *p.* 194.

219. 27. Disquisitio conjecturalis super formula integrali

$$\int \frac{d\varphi \cos i\varphi}{(\alpha + \beta \cos \varphi)^n}.$$

Inst. Calc. int. IV. 1778. *p.* 217.

220. 28. **Demonstratio theorematis insignis per conjecturam eruti, circa integrationem formulae**

$$\int \frac{d\varphi \cos i\varphi}{(1 + aa - 2a \cos \varphi)^{n+1}}.$$

Inst. Cal. int. IV. 1778. *p.* 242.

221. 29. De resolutione formulae integralis $\int x^{m-1}\, dx\, (\Delta + x^n)^\lambda$ in seriem semper convergentem, ubi simul insignia artificia circa serierum summationem explicantur. *Inst. Calc. int. IV.* 1779. *p.* 60.

222. 30. **De inventione integralium, si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur.** *Misc. Berol. VII.* 1743. *p.* 129.

223. 31. Nova methodus quantitates integrales determinandi. *N. Comm. XIX.* 1774. *p.* 66. *Inst. Calc. int. IV. p.* 260.

224. 32. Comparatio formulae integralis
225. 33.

$$\int \frac{x^{p-1}\, dx}{\sqrt[n]{(1 - x^n)^{n-q}}}$$

a termino $x = 0$ usque ad $x = 1$ extensae. (Deux mémoires). *N. A. V.* 1776. *p.* 86. 118. *Inst. Calc. int. IV. p.* 295. 326.

226. 34. De valoribus integralium a termino variabilis $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extensarum. *Inst. Calc. int. IV.* 1781. *p.* 337.

227. 35. Investigatio formulae integralis $\int \frac{x^{m-1}\, dx}{(1 + x^k)^n}$, casu quo post integrationem statuitur $x = \infty$. *Op. anal. II.* 1775. *p.* 42. *Inst. Cal. int. IV. p.* 346.

228. 36. Investigatio valoris integralis

$$\int \frac{x^{m-1}\, dx}{1 - 2x^k \cos \theta + x^{2k}}$$

a termino $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extensi. *Op. anal. II.* 1775. *p.* 55. *Inst. Calc. int. IV. p.* 358.

229. 37. Methodus inveniendi formulas integrales, quae certis casi-

bus datam inter se teneant rationem, ubi simul methodus traditur fractiones continuas summandi. *Op. anal. II.* 1775. *p.* 178. *Inst. Cal. int. IV. p.* 378.

230. 38. Methodus facilis inveniendi integrale hujus formulae:

$$\int \frac{dx}{x} \cdot \frac{x^{n+p} - 2x^n \cos \zeta + x^{n-p}}{x^{2n} - 2x^n \cos \theta + 1}$$

casu quo post integrationem ponitur $x = 1$ et $x = \infty$. *N. A. III.* 1776. *p.* 3.

231. 39. De valore formulae integralis

$$\int \left(\frac{z^{m-1} \pm z^{n-m-1}}{1 \pm z^n} \right) dz$$

casu quo post integrationem ponitur $z = 1$. *N. Comm. XIX.* 1774. *p.* 3.

232. 40. Observationes circa integralia talium formularum:

$$\int x^{p-1} dx (1-x)^{\frac{q-1}{n}},$$

posito post integrationem $x = 1$. *Misc. Taurin. III.* 1762—1765. *p.* 156. b.

233. 41. Evolutio formulae integralis $\int x^{f-1} dx (lx)^{\frac{m}{n}}$ integratione a valore $x = 0$ ad $x = 1$ extensa. *N. Comm. XVI.* 1771. *p.* 91. *Inst. Calc. int. IV. p.* 78.

234. 42. De valore formulae integralis

$$\int \left(\frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}} \right) \cdot \frac{dz}{z} (l.z)^{\mu}$$

casu quo post integrationem ponitur $z = 1$. *N. Comm. XIX.* 1774. *p.* 30. *Inst. Calc. int. IV. p.* 122.

235. 43*. Observationes in aliquot theoremata Ill. de la Grange. *Op. anal. II.* 1775. *p.* 16.

236. 44. De integratione formulae $\int \frac{dx\, lx}{\sqrt{(1-xx)}}$ ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensa. *A. I.* II. 1777. *p.* 3. *Inst. Calc. int. IV. p.* 154.

237. 45. Evolutio formulae integralis $\int dx \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{lx} \right)$ a termino $x = 0$ usque ad $x = 1$ extensae. *N. A. IV.* 1776. *p.* 3.

238. 46. De valore formulae integralis

$$\int \frac{x^{a-1}dx}{lx} \cdot \frac{(1-x^b)(1-x^c)}{1-x^n}$$

a termino $x=0$ usque ad $x=1$ extensae. *A. I.* II. 1777. *p.* 29.

239. 47. Speculationes analyticae. *N. Comm. XX.* 1775. *p.* 59.
Intégrale définie de la formule $\frac{x^\alpha - x^\beta}{lx} dx$.

240. 48. De vero valore hujus formulae integralis $\int dx\,(l\,\frac{1}{x})^n$ à termino $x=0$ usque ad $x=1$ extensae. *N. A. VIII.* 1776. *p.* 15.

241. 49. De integralibus quibusdam inventu difficillimis. *Mém. VI.* 1780. *p.* 30.

242. 50. De integrationibus maxime memorabilibus ex calculo imaginariorum oriundis. *N. A. VII.* 1777. *p.* 99.

243. 51. Supplementum ad dissertationem praecedentem circa integrationem formulae $\int \frac{z^{m-1}dz}{1-z^n}$, casu quo ponitur

$$z = v(\cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi).$$

N. A. VII. 1777. *p.* 134.

52. De summo usu calculi imaginariorum in analysi. *N. A. III.* 1776. *p.* 25. (V. 103).

53. Ulterior disquisitio de formulis integralibus imaginariis. *N. A. X.* 1777. *p.* 3. (V. 104 .

54. De insigni usu c lculi imaginariorum in calculo iutegrali. *N. A. XII.* 1777. *p.* 3. (V. 105).

244. 55. De integrationibus difficillimis, quarum integralia tamen aliunde exhiberi possunt. *N. A. XIV.* 1777. *p.* 62.

245. 56. Uberior explicatio methodi singularis integralia alias maxime abscondita investigandi. *N. A. IV.* 1776. *p.* 17.

246. 57. Innumera theoremata circa formulas integrales, quorum demonstratio vires analyseos superare videtur. *N. A. V.* 1776. *p.* 3.

247. 58. De iterata integratione, dum aliquis exponens pro variabili assumitur. *N. A. VII.* 1776. *p.* 64.

248. 59. De expressione integralium per factores. *N. Comm. VI.* 1756. 1757. *p.* 115.

249. 60. Constructio aequationum quarundam differentialium, quae indeterminatarum separationem non admittunt. *A. Erud. Lips.* 1733. *p.* 369.

250. 61. Specimen de constructione aequationum differentialium sine indeterminatarum separatione. *Comm. VI.* 1732. 1733. *p.* 168.

251. 62. Constructio aequationis differentialis $ax^n dx = dy + y^2 dx$. *Comm. VI.* 1732. 1733. *p.* 231.

252. 63. De aequationibus differentialibus, qui certis tantum casibus integrationem admittunt. *Comm. X.* 1738. *p.* 40.

253. 64. De variis integrabilitatis generibus. *N. Comm. XVII.* 1772. *p.* 70.

254. 65. De integratione aequationum differentialium. *N. Comm. VIII.* 1760. 1761. *p.* 3.

255. 66. De formulis differentialibus, quae per duas pluresve quantitates datas multiplicatae, fiant integrabiles. *N. A. VII.* 1776. *p.* 3.

256. 67. Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad primum gradum. *Comm. III.* 1728. *p.* 124.

257. 68. De aequationibus differentialibus secundi gradus. *N. Comm. VII.* 1758. 1759. *p.* 163.

258. 69. De formulis differentialibus secundi gradus, quae integrationem admittunt. *N. A. XI.* 1777. *p.* 3.

259. 70. Methodus singularis resolvendi aequationes differentiales secundi gradus. *Inst. Calc. int. IV.* 1779. *p.* 525.

260. 71. De formulis integralibus implicatis earumque evolutione et transformatione. *Inst. Calc. int. IV.* 1778. *p.* 544.

261. 72. De integratione aequationum differentialium altiorum graduum. *Misc. Berol. VII.* 1743. *p.* 193.

262. 73. Methodus aequationes differentiales altiorum gradunm integrandi ulterius promota. *N. Comm. III.* 1750. 1751. *p.* 3.

263. 74. **Observationes singulares circa aequationes differentiales lineares.** *N. A. XIV.* **1778.** *p.* **52.**

264. 75.* Integratio generalis aequationum differentialium linearium cujuscunque gradus et quotcunque variabiles involventium. *Mém. IV.* **1779.** *p.* **43.**

265. 76. De aequationibus differentialibus cujuscunque gradus, quae denuo differentiatae integrari possunt. *Inst. Calc. int. IV.* **1781.** *p.* **564.**

266. 77. Specimen aequationum differentialium indefiniti gradus, earumque integratio. *Inst. Calc. int. IV.* **1781.** *p.* **577.**

267. 78. Exempla quarundam memorabilium aequationum differentialium, quas adeo algebraice integrare licet, etiamsi nulla via pateat variabiles a se invicem separandi. *N. A. XIII.* **1778.** *p.* **3.**

268. 79. De resolutione aequationis $dy + ayy\,dx = bx^m\,dx$. *N. Comm. IX.* **1762. 1763.** *p.* **154.**

269. 80. De integratione aequationis differentialis

$$\frac{m\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{(1-y^4)}}.$$

N. Comm. VI. **1756. 1757.** *p.* **37.**

270. 81. Integratio aequationis

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4)}}.$$

N. Comm. XII. **1766. 1767.** *p.* **3.**

271. 82. Observationes circa aequationem differentialem

$$y\,dy + My\,dx + N\,dx = 0.$$

N. Comm. XVII. **1771.** *p.* **105.**

272. 83. Integratio aequationis differentialis:

$$dy + yy\,dx = \frac{A\,dx}{(a+2bx+cxx)^2}.$$

Mém. III. **1779.** *p.* **3.**

273. 84. Analysis facilis aequationem Riccatianam per fractionem continuam resolvendi. *Mém. VI.* **1780.** *p.* **12.**

274. 85. Methodus nova investigandi omnes casus, quibus hanc

aequationem differentio-differentialem: $ddy(1-axx)-bxdxdy-cydx^2=0$ resolvere licet. *Inst. Calc. int. IV.* 1780. *p.* 533.

275. 86. Consideratio aequationis differentio-differentialis:

$$(a+bx)ddz+(c+ex)\frac{dx\,dz}{x}+(f+gx)\frac{zdx^2}{x^2}=0.$$

N. Comm. XVII. 1772. *p.* 125.

276. 87. Constructio aequationis differentio-differentialis: $Aydu^2+(B+Cu)du\,dy+(D+Eu+Fuu)ddy=0$, sumto elemento du constante. *N. Comm. VIII.* 1760. 1761. *p.* 150.

277. 88. Recherches sur l'intégration de l'équation differentio-différentielle $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)=aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+\frac{b}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)+\frac{c}{x^2}\cdot z.$ *Misc. Taurin. III.* 1762 — 1765. *p.* 60. b.

278. 89. Exposition de quelques paradoxes dans le calcul intégral. *Mém. de Berlin. XII.* 1756. *p.* 300.

279. 90. Investigatio functionum ex data differentialium conditione. *N. Comm. IX.* 1762. 1763. *p.* 170.

280. 91. De formulis integralibus duplicatis. *N. Comm. XIV.* I. 1769. *p.* 72. *Inst. Calc. int. IV. p.* 416.

281. 92. Plenior explicatio circa comparationem quantitatum in formula integrali $\int\frac{Zdz}{\sqrt{(1+mz^2+nz^4)}}$ contentarum, denotante Z functionem quamcunque rationalem ipsius z^2. *A. V.* II. 1775. *p.* 3. *Inst. Calc. int. IV. p.* 446.

282. 93. Dilucidationes super methodo elegantissima qua Ill. de la Grange usus est in integranda aequatione differentiali $\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{dy}{\sqrt{Y}}$. *A. II.* I. 1778. *p.* 20. *Inst. Calc. int. IV. p.* 465.

283. 94. Methodus succinctior comparationes quantitatum transcendentium in forma $\int\frac{Pdz}{\sqrt{(A+2Bz+Czz+2Dz^3+Ez^4)}}$ contentarum inveniendi. *Inst. Calc. int. IV.* 1777. *p.* 504.*)

*) Ce mémoire est consigné dans la liste de l'*Eloge* sous la titre: *Supplementum in Calculi integralis Tom. I. Cap. VI.*

284. 95. Recherches sur quelques intégrations remarquables dans l'analyse des fonctions à deux variables, connues sous le nom de différences partielles. *N. A. XV.* 1777. *p.* 3.

285. 96. Intégration d'une espèce remarquable d'équation différentielle, dans l'analyse des fonctions à deux variables. *Mém. XI.* 1777. *p.* 131.

286. 97.* De transformatione functionum duas variabiles involventium. *Mém. III.* 1779. *p.* 43.

287. 98. De insignibus proprietatibus formularum integralium praeter binas variabiles etiam earum differentialia cujuscunque ordinis involventium. *N. A. IX.* 1777. *p.* 81.

288. 99. Solutio problematis analytici difficillimi. *Mém. XI.* 1782. *p.* 125.

Calcul des variations.

289. 100. Elementa calculi variationum. *N. Comm. X.* 1764. *p.* 51.

290. 101. Methodus nova ac facilis calculum variationum tractandi. *N. Comm. XVI.* 1771. *p.* 35. *Inst. Calc. int. IV. p.* 590.

CALCUL DES PROBABILITÉS. ARITHMÉTIQUE POLITIQUE.

291. 1. Eclaircissements sur le mémoire de M. de la Grange (Misc. Taur. Vol. V. p. 167) concernant la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations. *N. A. III.* 1777. *p.* 289.

292. 2. Observationes in Cel. Dan. Bernoulli Dijudicationem maxime probabilem plurium observationum discrepantium atque verisimillimam inductionem inde formandum. *A. I.* I. 1777. *p.* 24.

293. 3. Solution d'une question très difficile dans le calcul des probabilités. *Mém. de Berlin. XXV.* 1769. *p.* 285.

294. 4. Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain. *Mém. de Berlin. XVI.* 1760. *p.* 144.

295. 5. Sur les rentes viagères. *Mém. de Berlin. XVI.* 1760. *p.* 165.

296. 6. Eclaircissements sur les caisses mortuaires, calculées sous la direction de M. Euler, par M. *N. Fuss.* *Ouvrage séparé.* *St.-Pétersbourg.* 1776. 4.

297. 7. Solutio quaestionis ad calculum probabilitatis pertinentis: quantum duo conjuges persolvere debeant, ut suis haeredibus, post utriusque mortem, certa argenti summa persolvatur. *Op. anal. II.* 1776. *p.* 314.

298. 8. Sur l'avantage du banquier au jeu de Pharaon. *Mém. de Berlin. XX.* 1764. *p.* 144.

299. 9. Calcul de probabilité dans le jeu de rencontre. *Mém. de Berlin. VII.* 1751. *p.* 255.

300. 10. Sur la probabilité des séquences dans la loterie génoise. *Mém. de Berlin. XXI.* 1765. *p.* 191.

301. 11. Solutio quarundam quaestionum ex calculo probabilium. *Op. anal.* 1781. *II. p.* 330.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

302. 1. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Comm. VIII.* 1741. *p.* 128.

303. 2. De symptomatibus quatuor punctorum in eodem plano sitorum. *A. VI.* I. 1775. *p.* 3.

304. 3. De centro similitudinis. *N. A. IX.* 1777. *p.* 154.

305. 4. Proprietates triangulorum, quorum anguli certam inter se rationem tenent. *N. Comm. XI.* 1767. *p.* 67.

306. 5. Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum. *N. Comm. XI.* 1767. *p.* 103.

307. 6. Dilucidationes super problemate quodam geometrico, olim a Jac. Bernoulli tractato. *Mém. I.* 1779. *p.* 26.

308. 7. Solutio completa ejusdem problematis de quadrisectione trianguli per duas rectas inter se normales. *Mém. I.* 1779. *p.* 49.

309. 8. Geometrica et sphaerica quaedam. *Mém. V.* 1780. *p.* 96.

310. 9. Variae demonstrationes geometricae. *N. Comm. I.* 1750. *p.* 49.

311. 10. Solutio facilis problematis geometrici, quo quaeritur circulus, qui tres alios circulos datos tangat. *N. A. VI.* 1779. *p.* 95.

312. 11. Solutio facilis problematis geometrici, quo quaeritur sphaera, quae quatuor alias datas tangat. *Mém. II.* 1779. *p.* 17.

313. 12. De variis modis circuli quadraturam numeris proxime exprimendi. *Comm. IX.* 1744. *p.* 222.

13. Consideratio progressionis cujusdam ad circuli quadraturam inveniendam idoneae. *Comm. XI.* 1750. *p.* 116. (V. 159).

314. 14. Considerationes cyclometricae. *N. Comm. XVI.* 1772. *p.* 160.

315. 15. Annotationes in locum quendam Cartesii, ad circuli quadraturam spectantem. *N. Comm. VIII.* 1764. *p.* 157.

316. 16. Problematis cujusdam Pappi Alexandrini constructio. *A. IV.* I. 1780. *p.* 91.

317. 17. Solutio problematis geometrici circa lunulas a circulis formatas. *Comm. IX.* 1744. *p.* 207.

318. 18. Elementa doctrinae solidorum. *N. Comm. IV.* 1758. *p.* 109.

319. 19. De corporibus regularibus per doctrinam sphaericam determinatis; ubi simul nova methodus globos sive coelestes sive terrestres charta obducendi traditur. *A. II.* I. 1778. *p.* 3.

320. 20. Demonstratio nonnullorum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita. *N. Comm. IV.* 1758. *p.* 140.

321. 21. Solutio problematis de inveniendo triangulo, in quo rectae ex singulis angulis latera opposita bisecantes sint rationales. *N. Comm. XVIII.* 1773. *p.* 171.

322. 22. Investigatio trianguli, in quo distantiae angulorum ab ejus centro gravitatis rationaliter exprimantur. *N. A. XII.* 1778. *p.* 101.

323. 23. Solutio problematis difficillimi a Fermatio propositi. *N. Comm. II.* 1749. *p.* 49.

Trouver un triangle rectangle, exprimé en nombres rationels, dans lequel le carré de chaque cathète, moins la surface du triangle même, produise un nombre carré.

324. 24. Solutio problematis de inveniendo triangulo, in quo rectae, ex singulis angulis latera opposita bisecantes, sint rationales. *N. Comm. XVIII.* 1773. *p.* 171.

325. 25. Solutio facilior ejusdem problematis. *Mém. II.* 1779. *p.* 10.

326. 26. Investigatio quadrilateri, in quo singulorum angulorum sinus datam inter se teneant rationem; ubi artificia prorsus singularia in analysi Diophantea occurrunt. *Mém. V.* 1780. *p.* 73.

327. 27.* Problème de géométrie, résolu par l'analyse de Diophante. *Mém. VII.* 1782. *p.* 3.

Trouver les trois côtés d'un triangle dont les lignes, tirées des angles par le centre de gravité du triangle, soient toutes trois exprimées en nombres rationels.

TRIGONOMÉTRIE ET ANALYSE TRIGONOMÉTRIQUE.

328. 1. Methodus facilis computandi angulorum sinus ac tangentes tam naturales quam artificiales. *Comm. XI.* 1750. *p.* 194.

329. 2. Subsidium calculi sinuum. *N. Comm. V.* 1760. *p.* 164.

330. 3. Quomodo sinus et cosinus angulorum multiplorum per producta exprimi queant. *Op. anal. I.* 1774. *p.* 353.

331. 4. De multiplicatione angulorum per factores expedienda. *N. A. V.* 1776. *p.* 27.

332. 5. Principes de trigonométrie sphérique, tirés de la méthode des plus grands et des plus petits. *Mém. de Berlin. IX.* 1753. *p.* 223.

333. 6. Trigonometria sphaerica universa, ex primis principiis breviter et dilucide derivata. *A. III.* I. 1779. *p.* 72.

334. 7. De mensura angulorum solidorum. *A. II.* II. 1778. *p.* 31.

335. 8. Speculationes super area triangulorum sphaericorum. *N. A. X.* 1778. *p.* 47.

336. 9. Eléments de trigonométrie sphéroïdique tirés de la méthode des plus grands et des plus petits. *Mém. de Berlin. IX.* 1753. *p.* 258.

TRACÉ DES CARTES.

337. 1. De repraesentatione superficiei sphaericae super plano. *A. I.* I. 1777. *p.* 107.

338. 2. De projectione geographica Delisliana in mappa generali Imperii Russici usitata. *A. I.* I. 1777. *p.* 143.

339. 3. De projectione geographica superficiei sphaericae. *A. I.* I. 1777. *p.* 133.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Géométrie des courbes en général.

1. Introductio in analysin infinitorum. ***Ouvrage séparé.*** *Lausanne.* 1748. 2. vol. 4. (V. 87).

340. 2. De infinitis curvis ejusdem generis, seu methodus inve-
341. 3. niendi aequationes pro infinitis curvis ejusdem generis. (Deux mémoires). *Comm. VII.* 1734. 1735. *p.* 174. 184.

342. 4. Evolutio generalior formularum comparationi curvarum inservientium. *N. Comm. XII.* 1766. 1767. *p.* 42.

343. 5. Démonstration sur le nombre des points où deux lignes d'un ordre quelconque peuvent se couper. *Mém. de Berlin. IV.* 1748. *p.* 234.

344. 6. Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes. *Mém. de Berlin. IV.* 1748. *p.* 219.

Sections coniques.

345. 7. Sur quelques propriétés des sections coniques qui conviennent à une infinité d'autres lignes courbes. *Mém. de Berlin. I.* 1745. *p.* 53. 71.

346. 8. Uberior evolutio comparationis quam inter arcus sectionum conicarum instituere licet. *A. V.* II. 1775. *p.* 23.

347. 9. Solutio problematis geometrici. *N. Comm. III.* 1750. 1751. *p.* 224.

Les diamètres conjugués d'une ellipse étant donnés de nombre et de position, trouver ses axes principaux.

348. 10. Demonstratio theorematis et solutio problematis in Actis Erud. Lips. propositorum.
N. Comm. VII. 1758. 1759. *p.* 128.
Une ellipse étant coupée en deux moitiés par un diamètre quelconque, il s'agit de partager l'une de ces moitiés en deux parties telles que leur différence soit géométriquement asignable.

349. 11. De ellipsi minima dato parallelogrammo rectangulo circumscribenda. *A. IV.* II. 1780. *p.* 3.

350. 12. Solutio problematis maxime curiosi, quo inter omnes ellipses, quae circa datum triangulum circumscribi possunt, ea quaeritur, cujus area sit omnium minima. *N. A. IX.* 1777. *p.* 146.

351. 13. Problema geometricum: inter omnes ellipses, quae per data quatuor puncta traduci possunt, eam definire, quae habet aream minimam. *N. A. IX.* 1777. *p.* 132.

352. 14. Specimen alterum methodi novae quantitates transcendentes inter se comparandi: De comparatione arcuum ellipsis. *N. Comm. VII.* 1758. 1759. *p.* 3.

NB. Le *Specimen primum* voir ci-dessous N. 424.

353. 15. Solutio problematum rectificationem ellipsis requirentium. *Comm. VIII.* 1736. *p.* 86.

354. 16. Nova series infinita maxime convergens, perimetrum ellipsis exhibens. *N. Comm. XVIII.* 1773. *p.* 71.

355. 17. Animadversiones in rectificationem ellipsis. *Op. var. arg. II.* 1750. *p.* 121.

356. 18. De curvis hyperbolicis, quae intra suas asymptotas spatium finitum includunt. *N. A. VIII.* 1777. *p.* 116.

357. 19. Praeter circulum nulla datur curva algebraica, cujus singuli arcus per arcus circulares simpliciter exprimi queant. *Op. anal. II.* 1775. *p.* 76. Mémoire intitulé: *Theoremata quaedam analytica quorum demonstratio adhuc desideratur.* (Voir 102. 415).

Courbes des ordres supérieurs.

358. 20. De curvis triangularibus. *A. II.* II. 1778. *p.* 3.

359. 21. Problematis cujusdam geometrici prorsus singularis evolutio. *N. Comm. XVI.* 1771. *p.* 140.

Trouver une courbe telle qu'en lui menant une tangente quelconque, laquelle coupe une ligne droite donnée, la ligne qui partage en deux également l'angle compris entre la tangente et la droite donnée, soit constamment normale à la courbe.

360. 22. Evolutio problematis cujus solutio analytica est difficillima, dum synthetica per se est obvia. *N. A. VIII.* 1777. *p.* 73.

Trouver autour d'un point donné une ligne courbe telle que la distance du point fixe donné, au centre du cercle osculateur, soit partout la même.

361. 23. Problema geometricum ob singularia symptomata imprimis memorabile. *N. A. VIII.* 1777. *p.* 87.

Tracer autour d'un point donné une ligne courbe telle que l'aire du secteur compris entre un arc quelconque et les deux droites tirées de ses extrémités au point donné, soit proportionelle au carré de l'arc, c'est-à-dire que $S^2 = 4n\Sigma$, S étant l'arc et Σ la surface du secteur.

362. 24. Réflexion sur un problème de géometrie traité par quelques géomètres et qui est néanmoins impossible. *Mém. de Berlin. X.* 1754. *p.* 173.

Trouver une ligne courbe autour d'un point fixe telle que si l'on tire par ce point fixe une ligne droite quelconque qui coupe la courbe en deux points, les tangentes menées à ces points fassent entre elles un angle droit.

363. 25. Solutio de invenienda curva quam format lamina utcunque elastica et gravis. *Comm. III.* 1728. *p.* 70.

364. 26. De miris proprietatibus curvae elasticae sub aequatione $y = \int \frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ contentae. *A VI.* II. 1775. *p.* 34.

365. 27. De figura curvae elasticae contra objectiones quasdam Ill. d'Alembert. *A. III.* II. **1779.** *p.* **188.**

366. 28. Demonstratio theorematis Bernoulliani, quod ex evolutione curvae cujuscunque rectangulae in infinitum continuatae tandem cycloides nascantur. *N. Comm. X.* **1764.** *p.* 179.

367. 29. De duplici genesi tam epicycloidum quam hypocycloidum. *A. V.* I. 1775. *p.* **48.**

368. 30. De curva hypergeometrica hac aequatione expressa:

$$y = 1 . 2 . 3 \ldots x.$$

N. Comm. XIII. **1778.** *p.* **3.**

369. 31. De novo quodam curvarum tautochronarum genere. *Comm. II.* **1727.** *p.* **126.**

370. 32. De innumerabilibus curvis tautochronis in vacuo. *Comm. IV.* **1729.** *p.* **49.**

371. 33. Curva tautochrona in fluido resistentiam faciente secundum quadrata celeritatum. *Comm. IV.* **1729.** *p.* **67.**

372. 34. Solutio singularis casus circa tautochronismum. *Comm. VI.* **1732. 1733.** *p.* **28.**

373. 35. Dilucidationes de tautochronis in medio resistente. *N. Comm. X.* **1764.** *p.* **156.**

374. 36. Quomodo, data quacunque curva, invenire opporteat aliam, quae cum data quodammodo juncta ad tautochronismum producendum sit idonea. *Comm. V.* **1730. 1731.** *p.* **143.**

375. 37. De tautochrona in medio rarissimo, quod resistit in ratione multiplicata quacunque celeritatis. *N. Comm. XVII.* **1772.** *p.* **349.**

376. 38. Dilucidationes de tautochronismo. *N. Comm. XVII.* **1772.** *p.* **362.**

377. 39. De vera tautochrona in fluido. *N. Comm. XVII.* **1772.** *p.* **333.**

378. 40. De linea celerrimi descensus in medio quocunque resistente. *Comm. VII.* **1734. 1735.** *p.* **135.**

379. 41. Considerationes circa brachystochronas. *A. I.* II. **1777.** *p.* **70.**

392. 54. Considerationes de trajectoriis orthogonalibus. *N. Comm. XIV.* I. 1769. *p.* 46.

393. 55. Considerationes super trajectoriis tam rectangulis quam obliquangulis. *N. A. I.* 1775. *p.* 3.

394. 56. De trajectoriis reciprocis tam rectangulis quam obliquangulis. *A. VI.* II. 1775. *p.* 3.

395. 57. De problemate trajectoriarum orthogonalium ad superficies translato. *Mém. VII.* 1782. *p.* 33.

396. 58. De problemate curvarum synchronarum, ejusque imprimis inverso. *Mém. IX.* 1781. *p.* 20.

397. 59. Methodus nova et generalis problema synchronarum inversum aliaque ejusdem generis resolvendi. *Mém. IX.* 1781. *p.* 35.

398. 60. Commentatio de curvis tractoriis. *N. A. II.* 1775. *p.* 3.

399. 61. De tractoriis compositis. *N. A. II.* 1775. *p.* 28.

400. 62. De viribus centripetis ad curvas non in eodem plano sitas describendas requisitis. *N. A. III.* 1776. *p.* 111.

401. 63.* Methodus facilis omnia symptomata linearum curvarum non
402. 64.* in eodem plano sitarum investigandi. (Deux mémoires). *A. VI.* I. 1782. *p.* 19. 37.

403. 65. De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta jungente. *Comm. III.* 1728. *p.* 110.

404. 66. Accuratior evolutio problematis de linea brevissima in superficie quacunque ducenda. *N. A. XV.* 1779. *p.* 44.

405. 67. De curva rectificabili in superficie sphaerica. *N. Comm. XV.* 1770. *p.* 195.

406. 68. De lineis rectificabilibus in superficie sphaeroidica quacunque geometrica ducendis. *N. A. III.* 1776. *p.* 57.

407. 69. De curvis rectificabilibus in superficie coni recti ducendis. *A. V.* I. 1776. *p.* 60.

408. 70. De lineis curvis non in eodem plano sitis, quae maximi vel minimi proprietate sunt praeditae. *Mém. IV.* 1779. *p.* 18.

409. 71. Solutio problematis (e methodo tangentium inversa) mense Novembris **1743** (in Actis Erud. Lips.) propositi. *Acta Erud. Lips.* **1744.** *p.* **315.**

410. 72. De insigni promotione methodi tangentium inversae. *N. Comm. X.* **1764.** *p.* **135.**

411. 73. De methodo tangentium inversa ad theoriam solidorum translata. *N. A. VI.* **1776.** *p.* **77.**

412. 74. Solutio trium problematum difficiliorum ad methodum tangentium inversam pertinentium. *Mém. X.* **1781.** *p.* **16.**

Rectification des courbes.

413. 75. Investigatio binarum curvarum, quarum arcus eidem abscissae respondentes summam algebraicam constituunt. *Comm. VIII.* **1736.** *p.* 23.

414. 76. De reductione linearum curvarum ad arcus circulares. *N. Comm. II.* **1749.** *p.* **3.**

415. 77. Nulla prorsus datur curva algebraica, cujus singuli arcus simpliciter per logarithmos exprimi queant. *Op. anal. II.* **1775.** *p.* **76.** Mémoire intitulé: *Theoremta quaedam analytica, quorum demonstratio adhuc desideratur.* (V. **102. 357**).

416. 78. De curvis algebraicis, quarum omnes arcus per arcus circulares metiri licet. *Mém. XI.* **1781.** *p.* **114.**

417. 79. De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudo per arcus parabolicos metiri potest. *N. A. V.* **1776.** *p.* **59.**

418. 80. De infinitis curvis algebraicis, quarum longitudo arcui parabolico aequatur. *Mém. XI.* **1781.** *p.* **100.**

419. 81. De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus ellipticos metiri licet. *N. A. V.* **1776.** *p.* **71.**

420. 82. De infinitis curvis algebraicis, quarum longitudo indefinita arcui elliptico aequatur. *Mém. XI.* **1781.** *p.* **95.**

421. 83. De binis curvis algebraicis inveniendis, quarum arcus infinite inter se sint aequales. *N. A. IV.* **1776.** *p.* **96.**

422. 84. De binis curvis algebraicis eadem rectificatione gaudentibus. *Mém. XI.* **1781.** *p.* **102.**

423. 85. Observationes de comparatione arcuum irrectificabilium. *N. Comm. VI.* 1756. 1757. *p.* 58.

424. 86. Specimen novae methodi curvarum quadraturas et rectificationes aliasque quantitates transcendentes inter se comparandi. *N. Comm. VII.* 1758. 1759. *p.* 83. (Voir ci-dessus *N.* 352).

425. 87. De curvis algebraicis quarum longitudo exprimitur hac formula integrali $\int \frac{v^{m-1}dv}{\sqrt{(1-v^{2n})}}$. *N. A. VI.* 1776. *p.* 36.

426. 88. De arcubus curvarum aeque amplis eorumque comparatione. *N. Comm. XII.* 1766. 1767. *p.* 17.

427. 89. De duabus pluribusve curvis algebraicis, in quibus si a terminis fixis arcus aequales abscindantur, eorum amplitudines datam inter se teneant rationem. *N. A. VI.* 1776. *p.* 63.

428. 90. Sur le point de rebroussement de la seconde espèce de M. le Marquis de l'Hôpital. *Mém. de Berlin. V.* 1749. *p.* 203.

429. 91. Methodus facilis investigandi radium osculi, ex principio maximorum et minimorum petita. *N. A. VII.* 1776. *p.* 83.

430. 92. De curvis, quarum radii osculi tenent rationem duplicatam distantiae a puncto fixo, earumque mirabilibus proprietatibus. *Mém. IX.* 1781. *p.* 47.

Développement des courbes.

431. 93. Investigatio curvarum quae evolutae sui similes producunt. *Comm. XII.* 1740. *p.* 3.

432. 94. Investigatio curvarum, quae similes sint suis evolutis vel primis, vel secundis, vel tertiis, vel adeo ordinis cujuscunque. *N. A. I.* 1775. *p.* 75.

95. Demonstratio theorematis Bernoulliani, quod ex evolutione curvae cujuscunque rectangulae in infinitum continuatae tandem cycloides nascantur. *N. Comm. X.* 1764. *p.* 179. (V. ci-dessus. *N.* 366).

Surfaces courbes.

433. 96. Recherches sur la courbure des surfaces. *Mém de Berlin. XVI.* 1760. *p.* 119.

434. 97. Evolutio insignis paradoxi circa aequalitatem superficierum. *N. Comm. XIV.* I. 1769. *p.* 104.

435. 98. Investigatio superficierum, quarum normales ad datum planum productae, sint omnes inter se aequales. *N. A. X.* 1777. *p.* 41.

436. 99. De superficie conorum scalenorum aliorumque corporum conicorum. *N. Comm. I.* 1747. 1748. *p.* 3.

437. 100. De superficie coni scaleni, ubi imprimis ingentes difficultates, quae in hac investigatione occurrunt, perpenduntur. *N. A. III.* 1776. *p.* 69.

438. 101. De solidis, quorum superficiem in planum explicare licet. *N. Comm. XVI.* 1771. *p.* 3.

439. 102. De corporibus cylindricis incurvatis. *N. A. XII.* 1778. *p.* 91.

MÉCANIQUE.

Mécanique, en général.

440. 1. Recherches sur la connaissance mécanique des corps. *Mém. de Berlin.* 1758. *p.* 131.

441. 2. Mechanica, sive motus scientia analytice exposita. *Ouvrage séparé. St.-Pétersbourg.* 1736. 2 tomes. 4.

442. 3. Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum. *Ouvrage séparé. Rostock.* 1765. 4.

443. 4. De proprietatibus triangulorum mechanicis. *A. III.* II. 1779. *p.* 126.

Principes d'équilibre et de mouvement.

444. 5. Découverte d'un nouveau principe de mécanique. *Mém. de Berlin. VII.* 1750. *p.* 185.

445. 6. Harmonie entre les principes généraux de repos et de mouvement de M. de Maupertuis. *Mém. de Berlin. VII.* 1751. *p.* 169.

446. 7. Sur le principe de la moindre action. *Mém. de Berlin. VII.* 1751. *p.* 199.

447. 8. Examen de la dissertation de M. le prof. König, insérée
448. 9. dans les Actes de Leipzic pour le mois de mars 1751, (Deux mémoires). *Mém. de Berl. VII.* 1751. *p.* 219. 240.

449. 10. Dissertatio de principio minimae actionis una cum examine objectionum Cl. Prof. Königii contra hoc principium factorum. *Ouvrage séparé. Berlin.* 1753. 8.

450. 11. Lettre à M. Mérian sur le même sujet. *Mém. de Berlin, VI.* 1750. *p.* 522.

451. 12. Essai d'une démonstration métaphysique du principe général de l'équilibre. *Mém. de Berlin. VII.* 1751. *p.* 246.

452. 13. Dilucidationes super aliquot casus aequilibrii difficiliores. *A. III.* II. 1779. *p.* 106.

453. 14. Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flexibilium quam elasticorum. *N. Comm. XV.* 1771. *p.* 381.

454. 15. De gemina methodo tam aequilibrium quam motum corporum flexibilium determinandi, et utriusque egregio consensu. *N. Comm. XX.* 1776. *p.* 286.

455. 16. De motu corporum flexibilium. *Op. var. arg. III.* 1751, *p.* 88.

456. 17. Sur le mouvement des corps flexibles. *Mém. de Berlin. I.* 1745. *p.* 54. *H.*

457. 18. De motu corporum flexibilium. *Comm. XIV.* 1744 — 1746. *p.* 182.

458. 19. De pressione funium tensorum in corpora subjecta, eorum-
459. 20. que motu a frictione impedito; ubi praesertim methodus traditur motum corporum tam perfecte flexibilium quam utcunque elasticorum non in eodem plano sitorum determinandi. (Deux mémoires). *N. Comm. XX.* 1776. *p.* 304. 327.

460. 21.* Accuratior evolutio formularum pro filorum flexibilium aequilibrio et motu inventorum. *A. VI.* II. 1782. *p.* 148.

461. 22. De aequilibrio et motu corporum flexuris elasticis junctorum. *N. Comm. XIII.* 1769. *p.* 259.

462. 23. De problemate quodam mechanico satis obvio at solutu difficillimo. *A. II.* II. **1778.** *p.* **150.**

463. 24. Solutio gemina problematis, quo motus corporis, filo alicubi alligati, super plano horizontali quaeritur. *A. II.* II. **1778.** *p.* **162.**

464. 25. De motu libero plurium corporum filis colligatorum super plano horizontali. *A. IV.* I. **1780.** *p.* **107.**

465. 26.* Solutio problematis mechanici. *N. A. III.* **1779.** *p.* **142.**

L'auteur considère deux cylindres parallèles entre eux, sur un plan horizontal, avec un fil qui les enveloppe, en passant au dessous de l'un et au dessus de l'autre: il suppose que chacun de ces cylindres soit représenté par la section circulaire d'un plan qui le coupe, et que ces deux sections avec le fil soient situées dans un même plan vertical. On demande quelles lois suivra le mouvement de ces cylindres, si l'on donne un choc à l'un d'eux, ou à tous les deux à la fois?

466. 27. De motu globi heterogenei super plano horizontali, una cum dilucidationibus necessariis super motu vacillatorio. *N. A. I.* **1775.** *p.* **119.**

467. 28. Consideratio motus plane singularis, qui in filo perfecte flexili locum habere potest. *N. A. II.* **1775.** *p.* **103.**

468. 29. Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum. *N. Comm. XX.* **1776.** *p.* **189.**

469. 30. Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi. *N. Comm. XX.* **1776.** *p.* **208.**

470. 31. De motu quodam maxime memorabili, satis quidem simplici, at solutu difficillimo. *N. A. V.* **1779.** *p.* **149.**

471. 32. De motu corporum in superficiebus mobilibus. *Op. var. arg. I.* **1746.** *p.* **1.**

Mouvement des projectiles.

33 — 41. Voir *neuf* mémoires sur les trajectoires: *Géométrie analytique*, à l'article *Courbes des ordres supérieurs.* (N. 387 — 395)

Pesanteur et descente des corps.

472. 42. De motu gravium citissimo super curvis specie datis. *N. Comm. XVII.* **1773.** *p.* **488.**

473. 43. Enodatio maximi paradoxi in problemate quodam mechanico occurrentis. *Mém. X.* **1781.** *p.* **7.**

474. 44. De descensu baculi super hypomochlio cylindrico fixo delabentis. *A. VI.* I. **1775.** *p.* **117.**

475. 45. Solutio problematis mechanici non parum curiosi. *Mém. VII.* **1782.** *p.* **23.**

476. 46. Solutio problematis mechanici. *N. A. XIII.* **1782.** *p.* **64.**
Un fil de longueur indéterminée est passé plusieurs fois et tout entier autour d'un disque circulaire; son extrémité est attachée dans un point, et plus bas, à une distance égale au rayon du disque, se trouve un plan incliné sur lequel on pose le disque de manière que lorsqu'il descend en vertu de sa pesanteur, il déroule par le bas le fil dont il est enveloppé. On demande son mouvement.

Mouvement de rotation des corps.

477. 47. Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable. *Mém. de Berlin. XIV.* **1758.** *p.* **154.**

478. 48. Du mouvement d'un corps solide quelconque, lorsqu'il tourne autour d'un axe mobile. *Mém. de Berl. XVI.* **1760.** *p.* **176.**

479. 49. De collisione corporum gyrantium. *N. Comm. XVII.* **1773.** *p.* **272.**

480. 50. De collisione corporum pendulorum, tam obliqua, quam motu gyratorio perturbata. *N. Comm. XVII.* **1773.** *p.* **315.**

481. 51. De motu globi circa axem obliquum quemcunque gyrantis et super plano horizontali incedentis. *A. VI.* II. **1775.** *p.* **107.**

Mouvement d'oscillation.

482. 52. De minimis oscillationibus corporum tam rigidorum quam flexibilium, methodus nova ac facilis. *Comm. VII.* **1740.** *p.* **99.**

483. 53. De oscillationibus fili flexilis quotcunque ponduscnlis onusti. *Comm. VIII.* 1741. *p.* 30.

484. 54. De novo genere oscillationum. *Comm. XI.* 1750. *p.* 128.

485. 55. De motu oscillatorio corporum flexibilium. *Comm. XIII.* 1751. *p.* 124.

486. 56. De motu oscillatorio duorum corporum ex filo super trochleas traducto suspensorum. *A. II.* II. 1778. *p.* 137.

487. 57. De motu oscillatorio tabulae suspensae et a vento agitatae. *N. A. IV.* 1775. *p.* 131.

488. 58. De motu oscillatorio penduli circa axem cylindricum plano horizontali incumbentem. *N. A. VI.* 1780. *p.* 145.

489. 59. De motu tautochrono pendulorum compositorum. *N. Comm. III.* 1753. *p.* 286.

490. 60. De oscillationibus minimis penduli quotcunque ponduscnlis onusti. *N. Comm. XIX.* 1775. *p.* 289.

491. 61. De motu oscillatorio penduli cujuscunque dum arcus datae amplitudinis absolvit. *A. I.* II. 1777. *p.* 159.

492. 62. De motu oscillatorio mixto plurium pendulorum ex eodem corpore mobili suspensorum. *A. III.* I. 1779. *p.* 89.

493. 63. De motu oscillatorio pendulorum ex filo tenso dependentium. *A. III.* II. 1774. *p.* 95.

494. 64. De motu penduli circa axem cylindricum fulcro datae figurae incumbentem mobilis, remota frictione. Dissertatio prior. *A. IV.* II. 1780. *p.* 133.

495. 65. De eodem argumento, sed habita frictionis ratione, dissertatio altera. *A. IV.* II. 1780. *p.* 164.

496. 66. De motu oscillatorio binarum lancium ex libra suspensarum. *N. Comm. XIX.* 1775. *p.* 302.

497. 67. Explicatio motus oscillatorii mirabilis in libra majori observati. *N. Comm. XIX.* 1775. *p.* 325.

498. 68. Determinatio motus oscillatorii in dissertatione Cel. Dan. Bernoulli (*N. Comm. XVIII. p.* 247) pertractati, ex primis mechanicae principiis petita. *N. Comm. XVIII.* 1774. *p.* 268.

499. 69. De oscillationibus minimis funis libere suspensi. *A. V.* I. 1774. *p.* 157.

Mouvement vibratoire Théorie du son. Théorie mathématique de la musique.

500. 70. Dissertatio physica de sono. *Ouvrage séparé. Bâle.* 1727. 4.

501. 71. De motu aëris in tubis, inaequaliter amplis. *N. Comm. XVI.* 1772. *p.* 281.

502. 72. Conjectura physica de propagatione soni (et luminis). *Op. var. arg. II.* 1750. *p.* 1.

503. 73. De la propagation du son. *Mém. de Berlin. XV.* 1759. *p.* 185.

504. 74. Supplément aux recherches sur la propagation du son. *Mém. de Berlin. XV.* 1759. *p.* 210.

505. 75. Continuation des recherches sur la propagation du son. *Mém. de Berlin. XV.* 1759. *p.* 241.

506. 76. Eclaircissements plus détaillés sur la génération et la propagation du son et sur la formation de l'écho. *Mém. de Berlin. XXI.* 1765. *p.* 335.

507. 77. Lettre à M. de la Grange contenant des recherches sur la propagation des ébranlements dans un milieu élastique. *Misc. Taur. II.* 1760. 1761. *p.* 1.

508. 78. De propagatione pulsuum per medium elasticum. *N. Comm. I.* 1750. *p.* 67.

509. 79. De chordis vibrantibus disquisitio. *N. Comm. XVII.* 1773. *p.* 381.

510. 80. De motu turbinatorio chordarum musicarum; ubi simul universa theoria tam aequilibrii quam motus corporum flexibilium simulque etiam elasticorum breviter explicatur. *N. Comm. XIX.* 1775. *p.* 340.

511. 81. Eclaircissements sur le mouvement des cordes vibrantes. *Misc. Taur. III.* 1762 — 1765. *p.* 1.

512. 82. Determinatio omnium motuum, quos chorda tensa et uniformiter crassa recipere potest. *A. III.* II. 1774. *p.* 116.

513. 83. Animadversiones in solutionem Bernoullianam de motu chordarum ex duabus partibus diversae crassitiei compositarum. (Tom. XVI. Nov. Comm. p. 257). *N. Comm. XVII.* **1773.** *p.* **410.**

514. 84. De motu vibratorio chordarum ex partibus quotcunque diversae crassitiei compositarum. *N. Comm. XVII.* **1773.** *p.* 422.

515. 85. De motu vibratorio chordarum crassitie utcunque variabili praeditarum. *N. Comm. XVII.* 1773. *p.* 432.

516. 86. De motu vibratorio chordarum inaequaliter crassarum. *N. Comm. IX.* 1764. *p.* 246.

517. 87. Recherches sur le mouvement des cordes inégalement épaisses. *Misc. Taur. III.* 1762 — 1765. *p.* 27.

518. 88. Dilucidationes de motu chordarum inaequaliter crassarum. *A. IV.* II. 1780. *p.* 99.

519. 89. Sur le mouvement d'une corde qui, au commencement, n'a été ébranlée que dans une partie. *Mém. de Berlin, XXI.* 1765. *p.* 307.

520. 90. Sur les vibrations des cordes. *Mém. de Berl. IV.* **1748.** *p.* **69.**

521. 91. Remarques sur les mémoires de Dan. Bernoulli qui roulent sur la courbe que fait une corde tendue mise en vibration, et sur les différentes espèces de vibrations des cordes. *Mém. de Berlin. IX.* **1753.** *p.* **196.**

522. 92. De perturbatione motus chordarum ab earum pondere oriunda. *A. V.* 1. 1774. *p.* 180.

523. 93. De motu vibratorio fili flexilis corpusculis quotcunque onusti. *N. Comm. XI.* 1764. *p.* 215.

524. 94. De motu vibratorio laminarum elasticarum, ubi plures novae vibrationum species hactenus non pertractatae evolvuntur. *N. Comm. XVII.* **1773.** *p.* **449.**

525. 95. Investigatio motuum, quibus laminae et virgae elasticae contremiscunt. *A. III.* I. **1779.** *p.* **103.**

96. De aequilibrio et motu corporum flexuris elasticis junctorum. *N. Comm. XIII.* **1768.** *p.* **259.** **(V. 461).**

Forces motrices.

Forces centrales.

quarrée des distances vers deux points fixes donnés, trouver le cas où la courbe décrite par ce corps sera algébrique. *Mém. de Berlin. XVI.* **1760.** *p.* **228.**

538. 110. De motu corporis ad duo virium centra attracti. *N. Comm. X.* **1766.** *p.* **207.**

539. 111. De motu corporis ad duo centra virium fixa attracti. *N. Comm. XI.* **1767.** *p.* **152.**

540. 112. Considérations sur le problème des trois corps. *Mém. de Berlin. XIX.* **1763.** *p.* **194.**

541. 113. De motu trium corporum se mutuo attrahentium super eadem linea recta. *N. A. III.* **1776.** *p.* **126.**

542. 114. De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium. *N. Comm. XI.* **1767.** *p.* **144.**

543. 115. De momentis virium respectu axis cujuscunque inveniendis; ubi plura insignia symptomata circa binas rectas, non in eodem plano sitas, explicantur. *N. A. VII.* **1780.** *p.* **191.**

544. 116. Methodus facilis omnium virium momenta respectu axis cujuscunque determinandi. *N. A. VII.* **1780.** *p.* **205.**

117. De viribus centripetis ad curvas non in eodem plano sitas describendas requisitis. *N. A. III.* **1776.** *p.* **111.** (V. **400**).

Pression et choc des corps.

545. 118. De pressione ponderis in planum cui incumbit. *N. Comm. XVIII.* **1774.** *p.* **289.**

546. 119. De communicatione motus in collisione corporum. *Comm. V.* **1735.** *p.* **159.**

547. 120. De communicatione motus in collisione corporum sese non directe percutientium. *Comm. IX.* **1744.** *p.* **50.**

548. 121. Sur la force de la percussion et sa véritable mesure. *Mém. de Berlin. I.* **1745.** *p.* **21.**

HYDROSTATIQUE ET HYDRODYNAMIQUE.

Equilibre et mouvement des fluides.

562. 1. Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides. *Mém. de Berlin. XI.* **1755.** *p.* **207.**

563. 2. De statu aequilibrii ac motus fluidorum. *N. Comm. XIII.* **1769.** *p.* **305.**

564. 3. Principes généraux du mouvement des fluides. *Mém. de Berlin. XI.* **1755.** *p.* **274.**

565. 4. Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides. *Mém. de Berlin. XI.* **1755.** *p.* **316.**

566. 5. Principia motus fluidorum. *N. Comm. VI.* **1761.** *p.* **271.**

567. 6. De statu aequilibrii ac motus fluidorum. (V. ci-dessus N. 563). Sectio secunda: De principiis motus fluidorum. *N. Comm. XIV.* I. **1770.** *p.* **270.**

568. 7. Ejusdem dissertationis Sectio tertia: De motu fluidorum lineari, potissimum aquae. *N. Comm. XV.* **1771.** *p.* **219.**

569. 8. De motu fluidorum a diverso caloris gradu oriunda. *N. Comm. XI.* **1767.** *p.* **232.**

570. 9. De figura quam ventus fluido stagnanti inducere valet. *A. I.* I. **1777.** *p.* **190.**

571. 10. Recherches sur le mouvement des rivières. *Mém. de Berl. XVI.* **1760.** *p.* **101.**

572. 11. De vi fluminis ad naves sursum trahendas applicanda. *A. IV.* I. **1780.** *p.* **119.**

573. 12. De motu et reactione aquae per tubos mobiles transfluentis. *N. Comm. VI.* **1761.** *p.* **312.**

574. 13. Sur le mouvement de l'eau par des tuyaux de conduite. *Mém. de Berlin. VIII.* **1752.** *p.* **111.**

Résistence des fluides.

575. 14. Tentamen theoriae de frictione fluidorum. *N. Comm. VI.* **1761.** *p.* **338.**

576. 15. Dilucidationes de resistentia fluidorum. *N. Comm. VIII.* **1763.** *p.* **197.**

16. De vera tautochrona in fluido. *N. Comm. XVII.* 1772. *p.* 333. (V. 377).

17. De tautochrona in medio rarissimo, quod resistit in ratione multiplicata quacunque celeritatis. *N. Comm. XVII.* 1772. *p.* 349. V. 375).

577. 18. Essai d'une théorie de la résistence qu'éprouve la proue d'un vaisseau dans son mouvement. *Mém. de Paris.* 1778. *p.* 597.

Machines hydrauliques et pneumatiques. Moulins à vent.

578. 19*. Recherches sur l'effet d'une machine hydraulique de J.-A. Segner. *Mém. de Berlin. VI.* 1750. *p.* 311.

579. 20. Application de la machine hydraulique de M. Segner à toutes sortes d'ouvrages, et de ses avantages sur les autres machines hydrauliques dont on se sert ordinairement. *Mém. de Berlin. VII.* 1751. *p.* 271.

580. 21. Théorie plus complète des machines qui sont mises en mouvement par la réaction de l'eau. *Mém. de Berlin. X.* 1754. *p.* 227.

581. 22. De cochlea Archimedis. *N. Comm. V.* 1760. *p.* 259.

582. 23. Sur l'action des scies. *Mém. de Berlin. XII.* 1756. *p.* 267.

583. 24. Discussion plus particulière de diverses manières d'élever de l'eau par le moyen des pompes avec le plus grand avantage. *Mém. de Berlin. VII.* 1752. *p.* 149.

584. 25. Maximes pour arranger le plus avantageusement les machines destinées à élever de l'eau par le moyen de pompes. *Mém. de Berlin. VII.* 1752. *p.* 185.

585. 26. Recherches sur une nouvelle manière d'élever de l'eau, proposée par M. Demour. *Mém. de Berl. VI.* 1751. *p.* 305.

586. 27. Recherches plus exactes sur l'effet des moulins à vent. *Mém. de Berlin. XII.* 1756. *p.* 165.

587. 28. De constructione molaurm alatarum. *N. Comm. IV.* 1758. *p.* 41.

ARCHITECTURE CIVILE ET HYDRAULIQUE.

588. 1. Sur la force des colonnes. *Mém. de Berlin. XIII.* **1757.** *p.* 252.

589. 2. Determinatio onerum quae columnae gestare valent. *A. II.* I. **1778.** *p.* 121.

590. 3. Examen insignis paradoxi in theoria columnarum occurrentis. *A. II.* I. **1778.** *p.* 146.

591. 4. De altitudine columnarum sub proprio pondere corruentium. *A. II.* I. **1778.** *p.* 163.

592. 5. Cogitationes de aggeribus construendis. *N. Comm. IX.* **1764.** *p.* 352.

593. 6. Regula facilis pro dijudicanda firmitate pontis aliusve corporis similis, ex cognita firmitate moduli. *N. Comm. XX.* **1776.** *p.* 271.

SCIENCE NAVALE.

594. 1. Scientia navalis, seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus. *Ouvrage séparé. St.-Pétersbourg.* **1749.** 2 tomes. 4.

595. 2. Théorie complète de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux. *Ouvrage séparé. St.-Pétersb.* **1773.** 8.

3. Essai d'une théorie de la résistance qu'éprouve la proue d'un vaisseau dans son mouvement. *Mém. de Paris.* **1778.** *p.* 597. (V. 577).

4. De vi fluminis ad naves sursum trahendas applicanda. *A. IV.* I **1780.** *p.* 119. (V. 572).

596. 5. Examen des efforts qu'ont à soutenir toutes les parties d'un vaisseau dans le roulis et dans le tangage. *Rec. d. p. cour. de Paris. VIII.* **1759.**

597. 6. Examen artificii, naves a principio motus interno propellendi, quod quondam ab acut. Jac. Bernoulli est propositum. *N. Comm. I.* **1750.** *p.* **106.**

598. 7. De promotione navium sine vi venti. *Rec. d. p. cour. de Paris. VIII.* 1753.

599. 8. De motu cymbarum remis propulsarum in fluviis. *Comm. X.* 1747. *p.* 22.

600. 9. Mémoire sur la force des rames. *Mém. de Berlin. III.* 1747. *p.* 180.

601. 10. Meditationes super problemate nautico de implantatione malorum. *Rec. d. p. cour. de Paris. II.* 1727.

ARTILLERIE.

602. 1. Neue Grundsätze der Artillerie, aus dem Englischen des Hrn. Robins übersetzt und mit Anmerkungen bereichert. *Ouvrage séparé. Berlin.* 1745. 8.

603. 2. De ictu glandium contra tabulam explosarum. *N. Comm. XV.* 1770. *p.* 414.

ASTRONOMIE.

Mouvement des corps célestes.

604. 1. Theoria motuum planetarum et cometarum, continens methodum facilem ex aliquot observationibus orbitas cum planetarum tum cometarum determinandi. *Ouvrage séparé. Berlin.* 1744. 4.

605. 2. Recherches sur le mouvement des corps célestes en général. *Mém. de Berlin. III.* 1747. *p.* 93.

606. 3. Recherches sur le mouvement de rotation des corps célestes. *Mém. de Berlin. XV.* 1759. *p.* 265.

607. 4. Considerationes de motu corporum coelestium. *N. Comm. X.* 1766. *p.* 544.

608. 5. De motu corporum coelestium a viribus quibuscunque perturbato. *N. Comm. IV.* 1758. *p.* 161.

609. 6. Methodus facilis motus corporum coelestium utcunque perturbatos ad rationem calculi astronomici revocandi. *N. Comm. XII.* 1768. *p.* 129.

610. 7. Annotatio quarundam cautelarum in investigatione inaequalitatum, quibus corpora coelestia in motu perturbantur, observandorum. *N. Comm. XIII.* 1769. *p.* 159.

611. 8. Nouvelle méthode de déterminer les dérangements dans le mouvement des corps célestes, causés par leur action mutuelle. *Mém. de Berlin. XIX.* 1763. *p.* 141.

612. 9. Nova methodus motus planetarum principalium ad tabulas astronomicas reducendi. *N. Comm. XVIII.* 1774. *p.* 354.

613. 10. Nova methodus motum planetarum determinandi. *A. II.* II. 1778. *p.* 277.

614. 11. De motu planetarum et orbitarum determinatione. *Comm. VII.* 1740. *p.* 67.

615. 12. Cautiones necessariae in determinatione motus planetarum observandae. *A. III.* II. 1779. *p.* 295.

616. 13. De variis motuum generibus, qui in satellitibus planetarum locum habere possunt. *A. IV.* I. 1780. *p.* 255.

617. 14. Investigatio perturbationum, quibus planetarum motus ob actionem eorum mutuam afficiuntur. *Rec. d. p. cour. de Paris. VIII.* 1756.

618. 15. Remarques générales sur le mouvement diurne des planètes. *Mém. de Berlin. XIV.* 1758. *p.* 194.

619. 16. De perturbatione motus planetarum a figura eorum non sphaerica oriunda. *N. Comm. III.* 1753. *p.* 235.

620. 17. De perturbatione motus planetarum et cometarum. *A. V.* I. 1781. *p.* 297.

621. 18. De relaxatione motus planetarum. *Op. var. arg. I.* 1746. *p.* 245.

Orbites des planètes et des comètes.

622. 19.* Part of a letter concerning the contraction of the orbits of the planets. Translated from the French by T. S. *Philosoph. Transact.* 1750. *p.* 356.

623. 20. De circulo maximo fixo in coelo constituendo, ad quem orbitae planetarum et cometarum referantur. *N. Comm. XX.* 1776. *p.* 509.

624. 21. Mémoire sur la plus grande équation des planètes. *Mém. de Berlin.* 1746. *p.* 225.

625. 22. Solutio problematum quorundam astronomicorum. *Comm. VII.* 1740. *p.* 97.

1. La plus grande équation d'une planète étant donnée, trouver l'excentricité de l'orbite. 2. Problème inverse. 3. L'excentricité de l'orbite d'une planète étant donnée, trouver l'anomalie moyenne, à laquelle réponde la plus grande équation.

Planètes et satellites.

a) Terre.

626. 23. Enodatio difficultatis, super figura Terrae a vi centrifuga oriunda. *N. A. II.* 1775. *p.* 121.

627. 24. Theoria parallaxeos ad figuram Terrae sphaeroidicam accomodata. *A. III.* I. 1779. *p.* 241.

628. 25.* Part of a letter, concerning the gradual approach of the Earth to the sun. *Philosoph. Transact.* 1749. *p.* 203.

629. 26. Investigatio accuratior phaenomenorum, quae in motu Terrae diurno a viribus coelestibus produci possunt. *N. Comm. XIII.* 1769. *p.* 202.

630. 27. Quantum motus Terrae a luna perturbetur, accuratius inquiritur. *N. Comm. I.* 1750. *p.* 428.

631. 28. De motibus maxime irregularibus, qui in systemate mundano locum habere possunt, una cum methodo hujusmodi motus per temporis spatium quantumvis magnum prosequendi. *A. IV.* I. 1780. *p.* 280.

632. 29. De perturbatione motus Terrae ab actione Veneris oriunda. *N. Comm. XVI.* 1772. *p.* 426.

633. 30. Réflexions sur les inégalités dans le mouvement de la Terre, causées par l'action de Vénus, avec une table des corrections du lieu de la Terre. *A. II.* I. 1778. *p.* 297.

634. 31. Investigatio perturbationum, quae in motu Terrae ab actione Veneris producitur, cum tabula perturbationum istarum. *A. II.* I. 1778. *p.* 308.

635. 32. Solutio problematis astronomici: Ex datis tribus stellae fixae altitudinibus et temporum differentiis invenire elevationem poli et declinationem stellae. *Comm. IV.* 1735. *p.* 98.

636. 33. Consideratio super problemate astronomico praecedente *A. I.* I. 1777. *p.* 269.

637. 34. De inventione longitudinis locorum ex observata lunae distantia a quadam stella fixa cognita. *A. IV.* II. 1780. *p* 301.

638. 35. Méthode pour déterminer la longitude des lieux par l'observation d'occullations des étoiles fixes par la lune. *Mém. de Berlin. III.* 1747. *p.* 178.

b) L u n e.

639. 36. Theoria motuum Lunae, exhibens omnes corporum inaequalitates; cum additamento. *Ouvrage séparé. Berlin.* 1753. 4.

640. 37. Theoria motuum Lunae, nova methodo pertractata, una cum tabulis astronomicis, unde ad quodvis tempus loca Lunae expedite computare licet. *Ouvrage séparé. St.-Pétersbourg.* 1772. 4.

641. 38. Théorie de la Lune et spécialement sur l'équation séculaire. *Rec. d. p. cour. de Paris. IX.* 1770.

642. 39. De theoria Lunae ad majorem perfectionis gradum evehenda. *A. I.* II. 1777. *p.* 281.

643. 40. Considerationes de theoria motus Lunae perficienda et imprimis de ejus variatione. *N. Comm. XIII.* 1769. *p.* 120.

644. 41. Réflexions sur les diverses manières dont on peut représenter le mouvement de la Lune. *Mém. de Berlin. XIX.* 1763. *p.* 180.

645. 42.* Letter on the proposed question by the academy of St.-Petersburgh whether the theory of Isaac Newton is

sufficient to explain all the irregularities which are found in the motion of the Moon? *Philosoph. Transact.* 1751. *p.* 263.

646. 43. Nouvelles recherches sur le vrai mouvement de la Lune. *Rec. d. p. cour. de Paris. IX.* 1772.

647. 44. De la parallaxe de la Lune, tant par rapport à sa hauteur qu'à son azimut, dans l'hypothèse de la terre sphéroïdique. *Mém. de Berlin. V.* 1749. *p.* 326.

648. 45. Sur l'atmosphère de la Lune, prouvée par la dernière éclipse annullaire du soleil. *Mém. de Berlin. IV.* 1748. *p.* 103.

649. 46. Méthode pour trouver le vrai lieu géocentrique de la Lune par l'observation de l'occultation d'une étoile fixe. *Mém. de Berlin. III.* 1747. *p.* 174.

650. 47. Méthode pour trouver les vrais moments tant des nouvelles que des pleines Lunes. *Mém. de Berlin. III.* 1747. *p.* 154.

651. 48. Sur l'accord des deux dernières éclipses du Soleil et de la Lune avec mes tables, pour trouver les vrais moments des plénilunes et des novilunes. *Mém. de Berl. IV.* 1748. *p.* 86.

652. 49. Sur le mouvement des noeuds de la Lune et sur la variation de son inclinaison à l'écliptique. *Mém. de Berlin. I.* 1745. *p.* 40.

653. 50. De motu nodorum Lunae, ejusque inclinationis ad eclipticam variatione. *N. Comm. I.* 1750. *p.* 387.

654. 51. Nouvelle manière de comparer les observations de la Lune avec la théorie. *Mém. de Berlin. XIX.* 1763. *p.* 221.

c) Saturne et Jupiter.

655. 52. Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter. *Rec. d. p. cour. de Paris. VI.* 1748.

656. 53. Du mouvement des apsides des satellites de Jupiter. *Mém. de Berlin. XIX.* 1763. *p.* 311.

657. 54. Recherches sur les irrégularités du mouvement de Jupiter et de Saturne. *Rec. d. p. cour. de Paris. VII.* 1752.

658. 55. De figura apparente annuli Saturni, pro ejus loco quocunque respectu terrae. *A. I.* I. 1777. *p.* 276.

659. 56. De apparitione et disparitione annuli Saturni. *A. I.* I. 1777. *p.* 288.

Comètes.

660. 57. Beantwortung verschiedener Fragen über die Beschaffenheit, Bewegung und Wirkung der Cometen. *Ouvrage séparé. Berl.* 1744. 8.

661. 58. Fortsetzung dieser Beantwortung. *Ouvrage séparé. Berlin.* 1744. 8.

662. 59. Determinatio facilis orbitae Cometae, cujus transitum per eclipticam bis observare licuit. *A. IV.* I. 1780. *p.* 243.

663. 60. Commentatio hypothetica de periculo, a nimia Cometae appropinquatione metuendo. *N. Comm. XIX.* 1775. *p.* 499.

664. 61. Recherches physiques sur la cause de la queue des Comètes, (de la lumière boréale et de la lumière zodiacale). *Mém. de Berlin. II.* 1746. *p.* 117.

665. 62. Determinatio orbitae Cometae Anno 1742 observati. *Misc. Berol. VII.* 1743. *p.* 1.

666. 63. Recherches et calculs sur l'orbite de la Comète de 1769 exécutés sous la direction de M. Euler, par M. Lexell. *Ouvrage séparé. St.-Pétersbourg.* 1770. 4.

Voir aussi les articles: *Mouvement des corps célestes* et *Orbites des planètes et des comètes*

Soleil et étoiles fixes.

667. 64. Determinatio orbitae solaris. *Comm. VII.* 1740. *p.* 86.

668. 65. Methodus ex observato transitu Veneris per solem inveniendi parallaxin Solis, sive Expositio methodorum, cum pro determinanda parallaxi Solis ex observato transitu Veneris per Solem, tum pro inveniendis longitudinibus locorum super terra ex observationibus eclipsium Solis, una cum calculis et conclusionibus inde deductis. *N. Comm. XIV.* II. 1770. *p.* 321.

669. 66. De eclipsibus solaribus in superficie terrae per projectionem repraesentandis. *A. IV.* II. **1780.** *p.* **308.**

670. 67. Réflexions sur la dernière éclipse du Soleil du **25** juillet **1748.** *Mém. de Berlin. IV.* **1748.** *p.* **250.**

68. Sur l'accord des deux dernières éclipses du Soleil et de la lune avec mes tables, pour trouver les vrais moments des plénilunes et des novilunes. *Mém. de Berlin. IV.* **1748.** *p.* **86.** (V. **651**).

671. 69. Methodus computandi aequationem meridiei. *Comm. VIII.* **1741.** *p.* **48.**

672. 70. De la variation de la latitude des étoiles fixes et de l'obliquité de l'écliptique. *Mém. de Berlin. X.* **1754.** *p.* **296.**

673. 71. Réflexions sur les divers degrés de lumière du Soleil et des autres corps célestes. *Mém. de Berlin. VI.* **1750.** *p.* **280.**

674. 72. Sur l'effet de la réfraction dans les observations terrestres. *A. I.* II. **1777.** *p.* **129.**

675. 73. De trajectu citissimo stellae per duos circulos almucantarath datos, pro qualibet elevatione poli. *N. Comm. XX.* **1776.** *p.* **503.**

Aberration de la lumière. Précession des équinoxes. Nutation de l'axe terrestre.

676. 74. Mémoire sur l'effet de la propagation successive de la lumière dans l'apparition tant des planètes que des comètes. *Mém. de Berlin. II.* **1746.** *p.* **141.**

677. 75. Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la terre. *Mém. de Berlin. V.* **1749.** *p.* **289.**

678. 76. Avertissement au sujet des recherches sur la précession des équinoxes. *Mém. de Berlin. VI.* **1750.** *p.* **412.**

Tables astronomiques.

679. 77. Sur de nouvelles Tables astronomiques pour calculer la place du soleil. *Mém. de Berlin. I.* **1745.** *p.* **36.** *H.*

680. 78. Emendatio Tabularum astronomicarum per loca planetarum geocentrica. *Comm. XII.* **1750.** *p.* **109.**

681. 79. Tabulae astronomicae solis et lunae. *Ouvrage séparé. Berlin.* 1746. 4.

682. 80. Novae Tabulae astronomicae motuum solis et lunae. *Op. var. arg. I.* 1746. *p.* 137.

683. 81. Novae et correctae Tabulae ad loca lunae computanda. *Ouvrage séparé. Berlin.* 1746. 4.

684. 82. Novae Tabulae lunares singulari methodo constructae, quarum ope loca lunae ad quodvis tempus expedite computare licet. *Ouvrage séparé. St.-Pétersbourg.* 1772. 8.

OPTIQUE.

685. 1. Nova theoria lucis et colorum. *Op. var. arg.* 1746. *I. p.* 169.

686. 2. Sur la lumière et les couleurs. *Mém. de Berlin. I.* 1745. *p.* 17. *H.*

3. Conjectura physica de propagatione (soni et) luminis. *Op. var. arg. II.* 1750. *p.* 1 (V. 502).

687. 4. Explicatio phaenomenorum, quae a motu lucis successivo oriuntur. *Comm. XI.* 1750. *p.* 150.

688. 5. Réflexions sur quelques nouvelles expériences optiques, communiquées à l'Académie par M. Wilson. *A. I.* I. 1777. *p.* 71.

689. 6. Dioptrica. *Ouvrage séparé. St.-Pétersb.* 1769 — 1771. 3 tomes. 4.

690. 7. Précis d'une théorie générale de Dioptrique. *Mém. de Paris.* 1765. *p.* 555.

691. 8. De la réfraction de la lumière en passant pas l'atmosphère, selon les divers degrés tant de la chaleur que de l'élasticité de l'air. *Mém. de Berlin. X.* 1754. *p.* 131.

9. Sur l'effet de la réfraction dans les observations terrestres. *A. I.* II. 1777. *p.* 129. (V. 674).

692. 10. Recherches physiques sur la diverse réfrangibilité des rayons de lumière. *Mém. de Berlin. X.* 1754. *p.* 200.

693. 11. Vera theoria refractionis et dispersionis radiorum lucis, rationibus et experimentis confirmata. *A. I. I.* 1777. *p.* 174.

694. 12. Disquisitio de vera lege refractionis radiorum diversicolorum. *N. Comm. XII.* 1768. *p.* 166.

695. 13. Examen d'une controverse sur la loi de réfraction des rayons de différentes couleurs, par rapport à la diversité des milieux transparents par lesquels ils sont transmis. *Mém. de Berlin. IX.* 1753. *p.* 294.

696. 14. Réflexions sur la manière d'examiner la réfraction du verre par le moyen des prismes. *Mém. de Berlin. XXII.* 1766. *p.* 202.

697. 15. Expériences pour déterminer la réfraction de toutes sortes de liqueurs transparentes. *Mém. de Berlin. XII.* 1756. *p.* 235.

698. 16. Essai d'une explication physique des couleurs engendrées sur des surfaces extrêmement minces. *Mém. de Berlin. VIII.* 1752. *p.* 262.

699. 17. De motu et attritu lentium, dum super catinis poliuntur. *N. Comm. VIII.* 1763. *p.* 254.

700. 18. Nouvelle manière de perfectionner les verres objectifs des lunettes. *Mém. de Berlin. XVII.* 1761. *p.* 181.

701. 19. Constructio lentium objectivarum ex duplici vitro. *Ouvrage séparé. St.-Pétersbourg.* 1762. 4.

702. 20. Recherches sur la confusion des verres dioptriques causée par leur ouverture. *Mém. de Berlin. XVII.* 1761. *p.* 107.

703. 21. Recherches sur les moyens de diminuer ou de réduire même à rien la confusion causée par l'ouverture des verres. *Mém. de Berlin. XVII.* 1761. *p.* 147.

704. 22. Considérations sur les difficultés qu'on rencontre dans l'exécution des verres objectifs délivrés de toute confusion. *Mém. de Berlin. XVIII.* 1762. *p.* 117.

705. 23. Sur la confusion que cause, dans les instruments dioptriques, la diverse réfrangibilité des rayons. *Mém. de Berl. XVIII.* 1762. *p.* 195.

706. 24. Recherches sur les lunettes à trois verres qui représentent les objets renversés. *Mém. de Berlin. XIII.* **1757.** *p.* **323.**

707. 25. Sur la perfection des lunettes astronomiques qui représentent les objets renversés. *Mém. de Berlin. XVII.* **1761.** *p.* **212.**

708. 26. Des lunettes à trois verres qui représentent les objets debout. *Mém. de Berlin. XX.* **1764.** *p.* **200.**

709. 27. Considérations sur les nouvelles lunettes d'Angleterre de M. Dollond, et sur le principe qui en est le fondement. *Mém. de Berlin. XVIII.* **1762.** *p.* **226.**

710. 28. Recherches sur les nouvelles lunettes de cinq et six verres et sur leur perfection ultérieure. *Misc. Taurin. III.* **1762 — 1765.** *p.* **92.**

711. 29. De phaenomenis coeli per segmenta sphaerica diaphana spectati. *N. Comm. XI.* **1767.** *p.* **185.**

712. 30. Annotatio in dissertationem Cel. Kratzensteinii de tubi iconantidiptici sive duplicantis emendatione. *A. III.* **I.** *p.* **201.**

713. 31.* Lettre sur la perfection des lunettes. *Mém. de Paris.* **1756.** *p.* **214.** Ed. in 8. *p.* **338.**

714. 32. Sur la perfection des verres objectifs des lunettes. *Mém. de Berlin. III.* **1747.** *p.* **274.**

715. 33. Sur les avantages des verres objectifs composés de deux verres simples. *Mém. de Berlin. XVIII.* **1762.** *p.* **249.**

716. 34. Construction des objectifs composés de deux différentes sortes de verre qui ne produisent aucune confusion, ni par leur ouverture, ni par la différente réfrangibilité des rayons, avec la manière la plus avantageuse d'en faire des lunettes. *Mém. de Berlin. XXII.* **1766.** *p.* **119.**

717. 35. Construction des objectifs composés, propres à détruire toute la confusion dans les lunettes. *Mém. de Berlin. XXII.* **1766.** *p.* **171.**

718. 36. Méthode pour porter les verres objectifs des lunettes à un plus haut degré de perfection. *Mém. de Berlin. XXIII.* **1767.** *p.* **131.**

719. 37. Disquisitio de lentibus objectivis triplicatis, quae vel nullam confusionem pariant, vel etiam datam confusionem a reliquis lentibus ortam destruere valeant. *N. Comm. XVIII.* 1774. *p.* 377.

720. 38. Règles générales pour la construction tant des télescopes que des microscopes. *Mém. de Berl. XVII.* 1761. *p.* 201.

721. 39. De telescopiis quatuor pluribusve (6. 7) lentibus instructis eorumque perfectione. *N. Comm. XII.* 1768. *p.* 224.

722. 40. Règles générales pour la construction des télescopes et des microscopes, de quelque nombre de verres qu'ils soient composés. *Mém. de Berlin. XIII.* 1757. *p.* 283.

723. 41. De applicatione lentium objectivarum ad omnis generis telescopia, ubi agitur de perfectione telescopiorum 1. primi generis, nullam imaginem realem continentium; 2. secundi generis, seu astronomicorum, unicam imaginem realem continentium; 3. tertii generis, duas imagines reales continentium. *N. Comm. XVIII.* 1774. *p.* 415.

724. 42. Détermination du champ apparent que découvrent tant les télescopes que les microscopes. *Mém. de Berlin XVII.* 1761. *p.* 191.

725. 43. Recherches sur les microscopes simples et sur les moyens de les perfectionner. *Mém. de Berlin. XX.* 1764. *p.* 105.

726. 44. Recherches sur les microscopes à trois verres, et les moyens de les perfectionner. *Mém. de Berlin. XX.* 1764. *p.* 117.

727. 45. Emendatio laternae magicae ac microscopii solaris. *N. Comm. III.* 1753. *p.* 363.

728. 46. De novo microscopiorum genere ex sex lentibus composito. *N. Comm. XII.* 1768. *p.* 195.

729. 47. Instruction détaillée pour porter les lunettes au plus haut degré de perfection, calculée sous la direction de M. Euler par M. N. Fuss. *Ouvrage séparé. St.-Pétersb.* 1774. 4.

730. 48. Recherches sur les télescopes à réflexion et les moyens de les perfectionner. *Mém. de Berlin. XVIII.* 1762. *p.* 143.

731 49. Recherches sur une autre construction des télescopes à réflexion. *Mém. de Berlin. XVIII.* 1762. *p.* 185.

PHYSIQUE.

732. 1. Inquisitio physica in causam fluxus et refluxus maris. *Rec. d. p. cour. de Paris. IV.* 1740.

733. 2. De statu aequilibrii maris a viribus solis et lunae sollicitati. *A. IV.* I. 1780. *p.* 132.

734. 3. Tentamen explicationis phaenomenorum aëris. *Comm. II.* 1729. *p.* 347.

735. 4. Conjectura circa naturam aëris, pro explicandis phaenomenis in atmosphaera observatis. *A. III.* I. 1779. *p.* 162.

5. Recherches physiques sur la cause de la queue des comètes, de la lumière boréale es de la lumière zodiacale. *Mém. de Berlin. II.* 1746. *p.* 117. (V. 664).

736. 6. Determinatio caloris et frigoris graduum pro singulis terrae locis ac temporibus. *Comm. XI.* 1750. *p.* 82.

737. 7. Dissertatio de igne, in qua ejus natura et proprietates explicantur. *Réc. d. p. cour. de Paris. IV.* 1738.

738. 8. Dissertatio de magnete. *Op. var. arg. III.* 1751. *p.* 1. *Rec. d. p. cour. de Paris. V.* 1744.

739. 9. De observatione inclinationis magneticae dissertatio. *Réc. d. p. cour. de Paris. V.* 1743.

740. 10. Recherches sur la déclinaison de l'aiguille aimantée. *Mém. de Berlin. XIII.* 1757. *p.* 175.

741. 11. Corrections nécessaires pour la théorie de la déclinaison magnétique proposée dans le mémoire précédent. *Mém. de Berlin. XXII.* 1766. *p.* 213.

PHILOSOPHIE.

742. 1. Gedanken von den Elementen der Körper. *Ouvrage séparé. Berlin.* 1746. 4.

743. 2. Recherches physiques sur la nature des moindres parties de la matière. *Op. var. arg. I.* 1746. *p.* 287.

744. 3. Sur la nature des moindres particules de la matière. *Mém. de Berlin. I.* 1745. *p.* 28. *H.*

745. 4. Enodatio quaestionis: Utrum materiae facultas cogitandi tribui possit nec ne? ex principiis mechanicis petita. *Op. var. arg. I.* 1746. *p.* 277.

746. 5. Réflexions sur l'espace et le temps. *Mém. de Berlin. IV.* 1748. *p.* 324.

747. 6. Rettung der Offenbarung gegen die Einwürfe der Freygeister. *Ouvrage séparé. Berlin.* 1747. 8.

AGRONOMIE.

748. 1. Nachricht von einem neuen Mittel zur Vermehrung des Getreides. Abh. der St. Petersb. öfon. Gesellsch. *VI.* 1767. *p.* 109.

OUVRAGES QUI TRAITENT DE DIFFÉRENTES MATIÈRES.

1. Opuscula varii argumenti. *Ouvrage séparé. Berlin.* 1746 — 1751. 3 voll. 4.
2. Opuscula analytica. *Ouvrage séparé. St.-Pétersbourg.* 1783 — 1785. 2 voll. 4.

Les mémoires renfermés dans ces deux ouvrages, ainsi que ceux qui forment le 4 volume de la 2 édition des *Institutiones Calc. integr.* sont enregistrés dans les catégories ci-dessus, chacun à sa place respective, avec renvoi à ces ouvrages.

749. 5. **Lettres à une princesse d'Allemagne sur quelques sujets de physique et de philosophie.** *Ouvrage séparé. St.-Pétersbourg.* 1768 — 1772. 3 voll. 8.

750. 1.* XCIV Lettres à Chr. Goldbach sur différents sujets des mathématiques pures et appliquées (avec les réponses de Goldbach). Forment le 1 volume de cette *Correspondance mathematique et physique.*

B) PIÈCES INÉDITES.

a) Marquées dans l'*Eloge* parmi les manuscrits.

751. 1. Solutio problematis difficillimi ex methodo tangentium inversa. (1774 mai 12).

752. 2. De motu sanguinis per arterias. (1775 décembre 21. Le commencement de ce mémoire, écrit de la main de Fuss, manque).

753. 3. Constructio manometri, densitatem aëris quovis tempore accurate monstrantis. 1781 mars 22).

754. 4. Recherches sur deux problèmes de l'analyse de Diophante. (1781 mars 1).

755. 5. Supplément au problème de quatre nombres, dont la somme de deux fasse toujours un nombre carré. (1781 avril 23).

b) Non contenue dans l'*Eloge.*

756. 1.* Astronomia mechanica. Manuscrit in-4to avec quatre planches, d'une écriture très serrée de la propre main d'Euler, 91 feuillets de texte.

Contenu:

Cap. I. De viribus, quibus corpora coelestia sollicitantur. §§ 1 — 60. feuillet 1.

Cap. II. De motu duorum corporum sphaericorum se mutuo attrahentium. §§ 61 — 109. f. 17.

Cap. III. Aliae investigationes motus duorum corporum sphaericorum. §§ 110 — 127. f. 30.

Cap. IV. De motu duorum corporum, quorum alterum tantum est sphaericum. §§ 128 — 149. f. 36.

Cap. V. Determinatio motus corporis, quando inter vires, quibus sollicitatur, una, ad punctum fixum tendens, quadrato distantiae ab eo est reciproce proportionalis, reliquae vero vires prae illa sunt valde parvae. §§ 150 — 179. f. 44.

Cap. VI. De motu trium corporum sphaericorum se mutuo attrahentium in genere. §§ 180 — 197. f. 61.

Cap. VII. De perturbatione motus momentanea a vi quacunque sollicitante oriunda. §§ 198 — 219. f. 72.

Digressio, qua effectus cometae A. 1759 expectati in motu terrae perturbando investigatur. f. 80.

C) PIÈCES,

marquées dans la liste des manuscrits de l'*Eloge*, mais qui ne se sont trouvées ni aux archives de l'Académie, ni dans aucun Recueil publié après la mort d'Euler.

1. 2. **1775.***) Methodus motum corporum tam perfecte flexibilium quam utcunque elasticorum non in eodem plano sitorum determinandi. (Deux mémoires. Les protocoles de 1775 ne font aucune mention de ces mémoires).

3. **1776.** De quadratis magicis. (Octobre 21).

4. **1777.** Evolutio formulae analyticae, cui theoria astronomiae potissimum innititur. (Septembre 4).

5. **1778.** Enodatio insignis paradoxi in determinatione perturbationum motus planetarum occurrentis. (Les protocoles de 1778 ne font point mention de ce mémoire).

6. **1778.** Additamentum ad dissertationem Tom. XI. Nov. Comm. insertam. (Ne se trouve par sous ce titre dans les protocoles de 1778).

Ce mémoire se trouve cité dans une notice écrite de la main de Nicolas Fuss et intitulée: *Indication du contenu de quel-*

---

*) Les dates sont déduites de l'endroit qu'occupent ces titres dans la liste de l'*Eloge*, dans la confection de laquelle on s'est évidemment conformé à l'ordre chronologique.

ques mémoires d'Euler dont le titre est trop général, (Anzeige des Inhalts einiger Euler'scher Abhandlungen, deren Titul zu allgemein sind). Il y est dit que ce mémoire contient des remarques sur les dernières parties des diviseurs des nombres contenus dans la forme mx^2+ny^2. Ceci pourrait faire supposer que ce mémoire est identique avec celui qui porte le titre: *De divisoribus numerorum in forma* mx^2+ny^2 *contentorum.* (Mémoires T. V. p. 3) et qui manque dans la liste de l'*Eloge*, si seulement, dans cette pièce, il y avait le moindre renvoi au tome XI des *Novi Commentarii*, ou si ce dernier volume renfermait un mémoire quelconque dont celui-ci pourrait passer pour supplément. Or le tome XIV des *Commentarii* contient effectivement une pièce inscrite: *Theoremata circa divisores numerorum in hac forma* $pa^2\pm qb^2$ *contentorum* et à laquelle pourrait bien se rapporter le mémoire *De divisoribus* etc. cité ci-dessus. Aussi ces deux mémoires se suivent-ils dans notre liste; ils portent les numéros 13 et 14.

7. **1779.** Methodus facilis inveniendi radium osculi pro curvis non in eodem plano sitis. (Janvier 11. Fait peut-être partie des deux mémoires intitulés: Methodus facilis omnia symptomata curvarum non in eodem plano sitarum investigandi *N. A. VI.* I. *p.* 19. 37. (V. cette liste *NN.* 401. 402). Ces deux mémoires, comme on le voit par l'astérisque, manquent dans la liste de l'*Eloge*).
8. **1780.** De momentis virium respectu axis cujuscunque inveniendis; ubi plura insignia symptomata circa binas rectas non in eodem plano sitas explicantur. (Août 14).
9. **1780.** Methodus facilis omnium virium momenta respectu axis cujuscunque determinandi. (Août 14).

Le nombre des pièces imprimées, mais qui ne se trouvent pas dans la liste de l'*Eloge* s'élève à 21.

CORRESPONDANCE

ENTRE

LÉONARD EULER

ET

CHR. GOLDBACH.

1729 — 1763.


NAPOLI

LETTRE I.

EULER à GOLDBACH

=

SOMMAIRE. Interpolation des séries à loi variable. Première application des calculs différentiel et intégral à la doctrine des séries.

Vir Celeberrime. Petropoli d. 13 Octobr. A. 1729.

Cum nuper in nonnulla incidissem, quae ad interpolandas series, legem, uti appellare soles, variabilem habentes, facere visa sunt, ea accuratius contemplatus sum, et multa, quae huc attinent, detexi. Quae, quia Tibi, Vir Celeberrime, placitura esse mihi significavit Clarissimus Bernoulli, Tibi scribere, Tuoque submittere judicio statui. Hujus seriei 1, 2, 6, 24, 120, etc., quam a Te multum tractatam esse vidi, hunc inveni terminum generalem

$$\frac{1 \cdot 2^m}{1+m} \cdot \frac{2^{1-m} \cdot 3^m}{2+m} \cdot \frac{3^{1-m} \cdot 4^m}{3+m} \cdot \frac{4^{1-m} \cdot 5^m}{4+m} \text{ etc.}$$

ex infinito factorum numero constantem, qui terminum ordine m^{tum} exprimit. Is quidem in nullo casu abrumpitur, et aeque si m est numerus integer, tantum ad verum magis

*

magisque accedit, ac si m fuerit fractus. Sed tamen per eum admodum prope quemque terminum invenire licet, idque eo facilius, quo minus assumatur m. Si autem aliquot solum, uti visum sit, factoribus, termino generali commodior induci potest forma: ut si duobus prioribus factoribus contenti esse velimus, habebitur $\frac{1 \cdot 2}{(1+m)(2+m)} 3^m$ pro termino ordine m. Sin autem generaliter n factores capiantur, sequentibus reliquis neglectis, erit terminus generalis $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{(1+m)(2+m)\ldots(n+m)}(n+1)^m$, qui, quo major accipitur numerus n, eo propius ad verum accedet. Communicavi haec cum Clar. Bernoulli, qui peculiari modo eundem fere postremum eruit terminum, in hoc a meo diversum, quod aliam potestatem loco $(n+1)^m$ adhibeat, in qua determinanda fortasse factorum neglectorum rationem habuit. Credo ipsum Tibi nuper inde deductum numerum termino seriei, cujus index est $1\frac{1}{2}$, proximum misisse. Potest hic terminus generalis praeterea alium habere usum in inveniendis factis ex infinito factorum numero constantibus, quae sint aequalia numero finito: ut posito $m = 2$, habebitur factum $\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{36}{35}$ etc. quod aequale est 2. Similiter posito $m = 3$, erit $\frac{8}{4} \cdot \frac{27}{20} \cdot \frac{64}{54} \cdot \frac{125}{112}$ etc. $= 6$. Terminum hunc generalem ex eo inveni fundamento, quod haec series 1, 2, 6, 24, etc. in infinitum continuata tandem evadit geometrica. Et hujusmodi terminos generales etiam pro aliis seriebus, quae in infinitum cum geometricis confunduntur, exhibere in promtu est. Sed cum hoc modo termini intermedii non nisi veris proximi inveniantur, omissa hac serierum tractandarum ratione, aliter in hac re versari coepi, in id intentus, ut terminos intermedios non tantum veris proximos, sed ipsos veros, si fieri posset, invenirem. Ad id

vero inveniendum, cum seriei terminum generalem haberi oportere visum sit, quem vero peculiarem et ab adhuc usitatis longe diversam habiturum formam praevidi. Obtulit se igitur nova quaedam terminorum generalium forma, quae quidem ad omnes prorsus series potest accomodari jam cognitas, sed longe ea latius patet, quippe infinitarum serierum legem variabilem habentium, quarumque adhuc methodis consuetis nulli termini generales inveniri potuerunt, determinare possum terminos generales. Hi autem sunt ejusmodi, ut termini quivis, sive eorum exponentes sint numeri integri sive fracti, inde exacte inveniri queant, quatenus scilicet rei natura permittit. Evenire enim solet, ut inventio terminorum intermediorum a quadratura circuli pendeat, vel a logarithmis, vel alius cujuspiam curvae quadratura. Neque vero termini generales, qui adhuc in usu fuerunt, hisce de quibus loquor, praestant, verum utriusque generis aeque facilis est usus. Pro hac quidem serie $\overset{1}{1}.\overset{2}{2}.\overset{3}{6}.\overset{4}{24}.\overset{5}{120}$ etc. terminum generalem nondum inveni, sed pro innumerabilibus aliis similibus; unde id tamen assecutus sum, ut terminos intermedios, quorum exponentes sunt $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ etc. reipsa possim determinare. Terminus autem exponentis $\frac{1}{2}$ aequalis inventus est huic $\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{-1}\,.\,l-1)}$, seu quod huic aequale est, lateri quadrati aequalis circulo, cujus diameter $= 1$. Ex quo perspicuum est, naturam rei non permittere, ut is numeris exprimatur. Sed ex ratione radii ad peripheriam quasi data, terminum, cujus exponens est $\frac{1}{2}$, inveni hunc 0,8862269. Qui si multiplicetur per $\frac{3}{2}$, habebitur terminus cujus exponens $\frac{3}{2}$, hic 1,3293403. Porro hic ductus in $\frac{5}{2}$ dabit terminum cujus

exponens est $\frac{5}{2}$ et ita porro. Possum etiam dare eos terminos, quorum exponentes sunt $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}$ etc. Tum ex his, quorum exponentes sunt $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}$ etc. Sed horum determinatio ab altioribus pendet quadraturis. Ex regula principio data quaesivi quoque terminum exponentis $\frac{1}{2}$, et sumendis 15 factoribus eum inveni 0,8932, qui aliquanto major est vero. Serierum jam, quarum habeo terminos generales, quasdam hic apponam, quo judicare possis, Vir Celeberrime, quam late pateat mea methodus. Primum hujus seriei: $\overset{1}{\frac{2}{3}}, \overset{2}{\frac{2.4}{3.5}}, \overset{3}{\frac{2.4.6}{3.5.7}}, \overset{4}{\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}}$ etc. inventum habeo terminum generalem, ex quo terminos exponentium $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ etc. inveni utique sequuntur. Significet $p:d$ rationem peripheriae ad diametrum, quo posito erit $\overset{\frac{1}{2}}{\frac{1.p}{2.2d}}, \overset{1\frac{1}{2}}{\frac{1.3.p}{2.4.2d}}, \overset{2\frac{1}{2}}{\frac{1.3.5.p}{2.4.6.2d}}$ etc. Aliae series, quarum terminos generales reperi, sunt $\frac{1}{2}, \frac{2.4}{3.5}, \frac{3.6.9}{4.7.10}, \frac{4.8.12.16}{5.9.13.17}, \frac{5.10.15.20.25}{6.11.16.21.26}$ etc. et $\frac{1}{2}, \frac{1.2}{3.4}, \frac{1.2.3}{4.5.6}, \frac{1.2.3.4}{5.6.7.8}$ etc. nec non $1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{50}{24}, \frac{274}{120}, \frac{1764}{720}$ etc. Harum duae priores quam teneant legem, ex inspectione intelligetur, tertia vero, cujus lex minus clare apparet, est summatoria progressionis harmonicae $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ etc. Ex ejus, quem habeo, termino generali, inveni terminum cujus index est $-\frac{1}{2}$ hunc $-2\,l\,2$. Terminus vero cujus exponens $\frac{1}{2}$, est $2-2\,l\,2$. Is cujus exponens $1\frac{1}{2}$, est $2+\frac{2}{3}-2\,l\,2$, tum ille cujus exponens $2\frac{1}{2}$, est $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-2\,l\,2$, et ita porro. Significet

vero $l\,2$ logarithmum hyperbolicum binarii qui est $=$ 0,69314718056. Quae cum ita se habeant, ut termini generales tot quadraturas comprehendere debeant, intelligitur eorum inventionem a calculo infinitesimali peti oportere. Id ergo hac in re praestiti, ut calculum differentialem et integralem seriebus tractandis accomodaverim. Quem usum novum, etsi ob temporis brevitatem nondum magis excolere potui, spero adhuc ampliorem fore. Tu igitur, Vir Celeberrime, qui hanc de seriebus doctrinam jam tot tantisque inventis auxisti, judicabis, quid a novo hoc circa series versandi modo amplius expectandum sit. Maxima vero certe utilitas atque perfectio acquiretur, si Ipse, quomodo quam commodissime calculo differentiali hac in re uti conveniat, inquirere dignaberis. Hoc enim adhuc mea methodus laborat incommodo, quod id non invenire possim, quod volo, sed id velle debeam, quod invenio.

Vale et fave Tui observantissimo

Eulero.

LETTRE II.

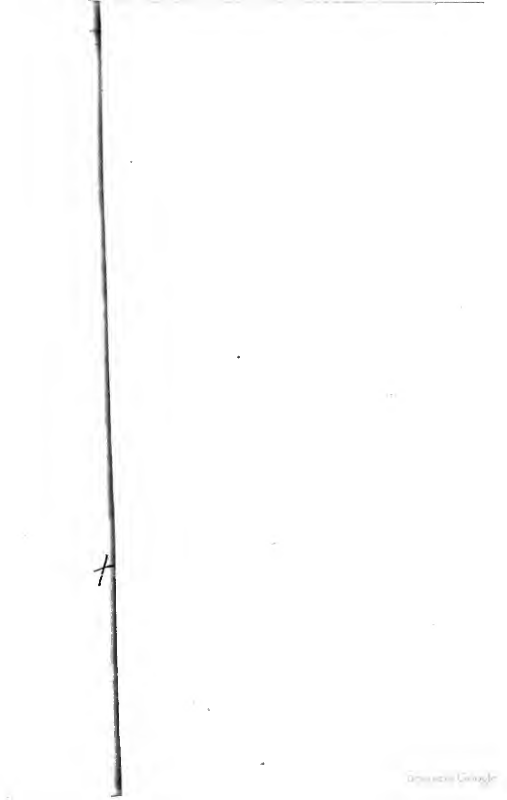
Goldbach à Euler.

=

Sommaire. Démonstration des termes généraux des suites de la lettre précédente. Ce que c'est que les logarithmes hyperboliques? Théorème de Fermat.

Vir Clarissime, Moscuae 1 Decembr. 1729.

Ad epistolam Tuam, quae mihi gratissima fuit, generatim respondeo me in terminis mediis serierum inveniendis satis habuisse, si quos in numeros rationales cogere non possem, eosdem per series infinitas numerorum rationalium utcunque exprimerem, quodsi deinde ostendi possit seriem hujusmodi, qua valor termini medii quaesiti continetur, vel ad numeros irrationales vel ad logarithmos, vel denique ad curvarum quadraturas nondum inventas pertinere, id minime contemnendum puto, nam si alii operam dederunt ut incognitam rationem diametri ad circulum per seriem infinitam determinarent, e contrario summam seriei nondum cognitam per quadraturam circuli explicare licebit, hac tamen notabili dif-





ferentia, quod numeros irrationales ad rationales redigi non posse facile demonstretur, quadraturam vero circuli numeris rationalibus definiri non posse nemo, quod sciam, evicerit.

Terminum generalem seriei $1 + 2 + 6 + 24 +$ etc, quem pro exponente quocunque m facis

$$\frac{1.2^m}{1+m} \cdot \frac{2^{1-m}.3^m}{2+m} \cdot \frac{3^{1-m}.4^m}{3+m} \cdot \frac{4^{1-m}\,5^m}{4+m} \cdot \text{etc.}$$

sic demonstro: Sit x exponens factoris cujuscunque, erit formula generalis factorum $\frac{x^{1-m}.(x+1)^m}{x+m}$, et productum omnium factorum a primo usque ad ultimum cujus exponens est x, inclusive, $(x+1)^m$: $\left(\frac{(x+1)}{1}.\frac{(x+2)}{2}.\frac{(x+3)}{3}\ldots\frac{(x+m)}{m}\right)$. Ex. gratia si $m = 2$, fiet productum factorum ad datum quemcunque factorem (cujus exponens est x) $\frac{2(x+1)^2}{(x+1)(x+2)} = \frac{2(x+1)}{x+2}$, adeoque productum omnium in infinitum $= 2$. Si $m = 3$, erit simile productum ad datum quemcunque factorem $6(x+1)^3 : \left(\frac{x+1}{1}\right)\left(\frac{x+2}{2}\right)\left(\frac{x+3}{3}\right)$ adeoque productum omnium in infinitum $= 6$, et sic porro. Sed observasti sine dubio series algebraicas omnes, quarum termini consueto more per signum $+$ conjungi solent, etiam in hujusmodi factores converti posse, erunt enim hic producta factorum, quae illic sunt aggregata terminorum.

Fateor me non satis perspectam habere naturam logarithmorum hyperbolicorum, quin et Cl. Wolfius, ubi de logarithmis agit, hyperbolicorum mentionem nullam facit.

In reliquarum serierum, quas commemoras, terminis generalibus, Tuo more per factores exprimendis non magnam video difficultatem, nam seriei

$$\frac{1}{2} + \frac{2.4}{3.5} + \frac{3.6.9}{4.7.10} + \frac{4.8.12.16}{5.9.13.17} + \text{etc.}$$

terminus generalis est $\frac{x}{x+1} \cdot \frac{2x}{2x+1} \cdot \frac{3x}{3x+1} \cdots \frac{mx}{mx+1}$ donec m fiat $= x$, quod si nusquam contingat, erunt factores numero infiniti; sic terminus respondens exponenti $\frac{1}{2}$ fit $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot$ etc.

Seriei $\frac{2}{3} + \frac{2.4}{3.5} + \frac{2.4.6}{3.5.7} + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9} +$ etc. terminus generalis est

$$\frac{2(2n+3)}{3(2n+2)} \cdot \frac{4(2n+5)}{5(2n+4)} \cdot \frac{6(2n+7)}{7(2n+6)} \cdot \frac{8(2n+9)}{9(2n+8)} \cdot \text{etc.}$$

Seriei $\frac{1}{2} + \frac{1.2}{3.4} + \frac{1.2.3}{4.5.6} + \frac{1.2.3.4}{5.6.7.8} +$ etc. terminus generalis est

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2(4n+2)}{6(n+1)} \cdot \frac{3(4n+6)}{10(n+2)} \cdot \frac{4(4n+10)}{14(n+3)} \cdot \frac{5(4n+14)}{18(n+4)} \cdot \text{etc.}\right)$$

neque adeo difficile est assumere numeros quadraturam circuli exprimentes, aliunde jam cognitos et pro iisdem series concinnare, quarum terminos medios hi numeri constituant, cujus artificii mihi probe gnarus videris.

Caeterum egregias plane judico methodos, quarum specimina mecum communicasti, neque dubito quin iisdem vestigiis progrediens multa nova et praeclara in hoc genere reperturus sis; misi ego quoque nuper ad Cl. Bernoullium nostrum theorema, quo methodum summandi series ad calculum quem vocant integralem accomodavi. Vale.

Goldbach.

P. S. Notane Tibi est Fermatii observatio omnes numeros hujus formulae $2^{2^{x-1}} + 1$, nempe 3, 5, 17, etc. esse primos, quam tamen ipse fatebatur se demonstrare non posse, et post eum nemo, quod sciam, demonstravit.

LETTRE III.

Euler à Goldbach.

=

Sommaire. Usage du calcul intégral dans la recherche des termes généraux des suites. Digression sur la théorie des logarithmes et les logarithmes hyperboliques. Sur le théorème de Fermat de la lettre précédente.

Vir Celeberrime, Petropoli d. 8 Januar 1730.

Quae nuper de methodo mea progressionum terminos medios ex quadraturis inveniendi scripsi, ea non ope serierum infinitarum terminos illos exprimentium perficio, maxime enim arduum esse arbitror de quaque serie infinita, ad quam pertineat quadraturam, pronunciare; quanquam non negem, me primo ex serie terminum generalem progressionis $1 + 2 + 6 + 24 +$ etc. exhibente, quam Tibi, Vir Celeberrime, perscripsi, conclusisse terminum ordine $\frac{1}{2}$ a quadratura circuli pendere. Deinde autem eodem modo circa alias progressiones versari diffidens id meditatus sum, quomodo alia

via eodem pervenire possem, quae non seriebus dignoscendis contineatur. In aliam igitur atque novam incidi rationem progressionum terminis generalibus denotandarum. Ea in hoc consistit, ut formulas integrales in terminos generales recipiam. Ad hoc autem adductus sum considerans ad ea, quae a communi algebra perfici non possent, analysin infinitorum plerumque facilem praebere aditum. Sed termini hujusmodi generales toties consuetam induunt formam, quoties formulae illae integrales algebraice exprimi possunt, quibus in casibus progressionis omnes termini, sive exponentes sint numeri fracti, sive integri, algebraice exhibentur. Quando vero illae formulae integrationem universaliter non admittunt, omnes termini algebraice exponi nequeunt, sed quidam a quadraturis curvarum pendebunt, quae inde cognoscuntur. Cum igitur in nonnullis seriebus observassem terminos quosdam medios a quadratura circuli pendere, in earum terminis generalibus necessario formulae integrales inesse debere visae sunt. Sequenti autem modo hujusmodi formulis integralibus utor. Quando dico seriei cujuspiam terminum generalem esse $\int P dx$, intelligi oportet ex eo terminum quemcunque indicis n inveniri posse. Indicat vero hic P functionem quandam ex x et constantibus quantitatibus una cum n indice compositam; refero scilicet n ad constantes, ut unica variabilis x adsit. Jam $\int P dx$ hoc modo dat terminum n^{mum}. Integretur $\int P dx$ vel reipsa, si fieri potest, vel ad quadraturam curvae convenientis referatur; tanta autem constans adjiciatur, ut totum evanescat posito $x = 0$. Deinde ponatur $x =$ constanti cuidam quantitati (in sequentibus semper pono $x = 1$), habebitur functio quaedam quantitatum constantium et indicis n, quae erit ipse terminus n^{mus}. Fieri nunc potest, praecipue si n in exponentes

ingrediatur, ut positis loco n certis numeris, formula integrari possit, secus vero si alii substituantur. Quo fit, ut alii termini algebraice seu in numeris exprimi queunt, alii a quadraturis pendeant. Ut terminum generalem reperi hunc $\frac{2n+3}{2}\int dx(1-x)^n \sqrt{x}$ progressionis istius $\frac{2}{3}+\frac{2.4}{3.5}+\frac{2.4.6}{3.5.7}+$ etc. Qui quomodo congruat, ut appareat, sit $n=2$, habebitur $\frac{7}{2}\int dx\,(1-x)^2\sqrt{x}=\frac{7}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{14}{5}x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{7}{2}}$; ponatur $x=1$, orietur terminus secundus $=\frac{7}{3}-\frac{14}{5}+1=\frac{8}{15}$. Idem hic terminus generalis omnes terminos medios suppeditat, ut sit $n=\frac{1}{2}$, erit $2\int dx\sqrt{(x-xx)}$ terminus quaesitus. Sed $2\int dx\sqrt{(x-xx)}$ exhibet segmentum circuli, cujus sagitta est x, radio existente $\frac{1}{2}$, seu diametro 1. Ponatur $x=1$, erit terminus ordine $\frac{1}{2}$ aequalis areae circuli, cujus diameter $=1$. Similiter alii termini medii determinantur. Hujusmodi terminos generales omnium earum progressionum, quarum mentionem feci, aliarumque infinitarum similium dare possum. Quousque autem haec methodus pateat ut possis cognoscere, Vir Celeberrime, generaliora hic adjungo. Fundamenti loco mihi fere fuit haec progressio $1+1.2+1.2.3+$ etc., cujus terminus generalis mihi inventus est $\int dx(-lx)^n$. Nimirum sumto integrali positoque $x=1$, prodit terminus cujus index est $\frac{1}{2}$. Denotat autem lx logarithmum hyperbolicum ipsius x. Antequam vero ostendam, quomodo haec formula progressioni satisfaciat, explicabo, quod Te non satis perspicere innuis, quo differant logarithmi hyperbolici ab ordinariis. Si constituatur progressio geometrica

$A \ldots 1, \quad a, \quad a^2, \quad a^3, \quad a^4, \quad a^5,$ etc.

eique subscribatur arithmetica

$B \ldots b, \; b+c, \; b+2c, \; b+3c, \; b+4c, \; b+5c,$ etc.

habebit quilibet terminus progressionis A sive eorum qui adsunt, sive interpolatorum respondentem in progressione B. Hi termini progressionis B respondentium terminorum in progressione A vocantur logarithmi. Jam cum innumerabiles progressiones arithmeticae subscribi possint, perspicuum est innumerabilia dari systemata logarithmorum. In vulgari systemate, quorum tabulae a Briggio et Vlacquio computatae habentur, loco seriei geometricae A posuerunt 1, 10, 100, 1000 etc. et loco arithmeticae sumserunt hanc 0, 1, 2, 3, 4 etc. ita ut logarithmus unitatis sit 0, denarii 1 etc. Ex hoc intelligitur, ad systema quodpiam logarithmorum condendum, duorum quorundam numerorum logarithmos pro lubitu accipi posse, e quibus deinde omnium numerorum logarithmi determinantur. Ita in systemate logarithmorum hyperbolicorum etiam pro logarithmo unitatis ponitur 0, et pro numero qui unitatem quantitate infinite parva superat, ut $1+dz$ assumitur logarithmus hoc ipsum dz. Vel series A est

$$1, \; (1+dz), \; (1+dz)^2, \; (1+dz)^3 \text{ etc.}$$

et series B logarithmos continens est

$$0, \quad dz, \quad 2dz, \quad 3dz \quad \text{etc.}$$

Logarithmi ex hac positione deducti sunt ii qui vocantur hyperbolici, eo quod iidem sint, ac illi qui ex quadratura hyperbolae eruuntur. In hoc systemate est logarithmus binarii 0,693147180559945 et logarithmus denarii est 2,302585092994045 ut ipse calculo aliquoties repetito inveni. Sin autem acciderit, ut logarithmis hyperbolicis uti oporteat,

non quidem necesse est tabulam eorum ad manus habere, sed Vlacquiani in usum vocari possunt dummodo singuli logarithmi per 2,302585 etc. multiplicentur. Semper autem, quando in calculo infinitesimali de logarithmis sermo est, hyperbolici intelliguntur. Et hanc ob rem in termino generali $\int dx(-lx)^n$, l designat logarithmum hyperbolicum. Ut nunc appareat, quomodo haec formula quemvis terminum praebeat, sit $n = 3$, habebitur $\int dx(-lx)^3 = -x(lx)^3 + 3x(lx)^2 - 6xlx + 6x$; constantis additione opus non est. Ponatur ergo $x = 1$: proveniet terminus tertius $= 6$. Omnes enim termini in quibus est lx evanescent, quia $l1 = 0$. Simili modo omnes termini numeros integros habentes eruuntur. Sed qui valor sit eorum, quorum indices sunt numeri fracti, id difficilius eruitur. Deducit enim ad quadraturas curvarum transcendentium, ut terminus ordine $\frac{1}{2}$ determinatur a quadratura curvae, ad quam est $yy + lx \quad 0$, cum tamen eundem ante a quadratura circuli pendere deprehenderim. Verum tamen alia mihi insuper est methodus eosdem terminos ad curvarum algebraicarum quadraturas reducendi, quae hoc theoremate continetur: Terminus, cujus index est $p:q$, aequalis est

$$\sqrt[q]{(1.2.3\ldots p)\left[\left(\frac{2p}{q}+1\right)\left(\frac{3p}{q}+1\right)\left(\frac{4p}{q}+1\right)\cdots\left(\frac{qp}{q}+1\right)\right]}\cdot$$

$$\left[\left(\int dx\,(x-xx)^{\frac{p}{q}}\right)\left(\int dx\,(xx-x^3)^{\frac{p}{q}}\right)\cdots\left(\int dx\,(x^{q-1}-x^q)^{\frac{p}{q}}\right)\right]$$

quae expressio aequivalet huic $\int dx(-lx)^{\frac{p}{q}}$. Ponatur ex. gr. $p = 1$ et $q = 2$ ut terminus ordine $\frac{1}{2}$ inveniatur, abibit forma generalis in $\sqrt[2]{1.2\int dx\sqrt{(x-xx)}}$; sed jam ostensum

est $2\int dx\sqrt{(x-xx)}$ dare aream circuli diametri 1, quare in serie $1+1.2+1.2.3+1.2.3.4+$ etc. terminus cujus index est $\frac{1}{2}$ aequalis est radici quadratae ex circulo cujus diameter est 1. Cum igitur $\int dx(-lx)^n$ sit terminus generalis, seu terminus ordine n hujus seriei, habeo $\int dx(-lx)^n = 1.2.3...n$, quod in serierum hanc includentium terminis generalibus inveniendis magni est momenti. Nec minus hoc

$m.\overline{m+1}.\overline{m+2}...\overline{m+n} = \frac{\int dx(-lx)^{m+n}}{\int dx(-lx)^{m-1}}$. Maxime universale et latissime patens est hoc theorema

$$(f+g)(f+2g)(f+3g)...(f+ng) = \frac{g^{n+1}\int dx(-lx)^n}{(f+(n+1)g)\int x^{f:g}dx(1-x)^n}$$

unde facile fluit hoc:

$$\frac{(f+g)(f+2g)....(f+ng)}{(h+k)(h+2k)....(h+nk)} = \frac{g^{n+1}(h+(n+1)k)\int x^{h:k}dx(1-x)^n}{k^{n+1}(f+(n+1)g)\int x^{f:g}dx(1-x)^n}$$

Ex hoc theoremate facile est invenire omnium hujusmodi serierum, quarum termini sunt facta, in quae ingrediuntur quantitates in arithmetica progressione progredientes, terminos generales. Ut proposita sit haec progressio, de qua nuper mentionem feci, $\frac{1}{2}+\frac{2.4}{3.5}+\frac{3.6.9}{4.7.10}+$ etc.

Hujus terminus ordine n est

$$\frac{n.2n.3n...nn}{(n+1)(2n+1)(3n+1)...(nn+1)}.$$

Hunc comparo cum

$$\frac{(f+g)(f+2g)(f+3g)...(f+ng)}{(h+k)(h+2k)(h+3k)...(h+nk)}$$

quae formula ut in illam transmutetur, oportet sit $f=0$, $g=n$ et $h=1$, $k=n$. His valoribus substitutis prodit

$$\frac{n.2n.3n....nn}{(n+1)(2n+1)(3n+1)....(nn+1)} = \frac{(1+n+nn)\int x^{\frac{1}{n}}dx(1-x)^n}{(nn+n)d\int x(1-x)^n}$$

id quod est terminus generalis progressionis propositae. Est autem $dx\,(1-x)^n$ integrabile, integrale enim est $C - \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$. Constans C debet esse $= \frac{1}{n+1}$, ut posito $x = 0$, totum evanescat. Ponatur nunc $x = 1$, ut principio monui, prodibit C seu $\frac{1}{n+1}$, est igitur $(nn+n)\int dx\,(1-x)^n = n$, et ideo terminus generalis seriei propositae hanc habet formam

$$\left(\frac{1+n+nn}{n}\right)\int x^{\frac{1}{n}}\,dx\,(1-x)^n.$$

Sit $n = 3$, ut terminus tertius $\frac{3.6.9}{4.7.10}$ prodeat; habebitur

$$\frac{13}{3}\int x^{\frac{1}{3}}\,dx\,(1-x)^3 = \frac{13}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{39}{7}x^{\frac{7}{3}} + \frac{39}{10}x^{\frac{10}{3}} - x^{\frac{13}{3}},$$

ponatur $x = 1$, habebitur $\frac{13}{4} - \frac{39}{7} + \frac{39}{10} - 1 = \frac{162}{280} =$ termino tertio. Quaero terminum ordine $\frac{1}{2}$; fiat ergo $n = \frac{1}{2}$, habebitur

$$\frac{7}{2}\int xx\,dx(1-x)^{\frac{1}{2}} = C - \frac{3}{7}(1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{14}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} - (1-x)^{\frac{7}{2}}.$$

Ergo C est $= \frac{7}{3} - \frac{14}{5} + 1$. Ponatur $x = 1$, restabit solum C, seu $\frac{7}{3} - \frac{14}{5} + 1 = \frac{8}{15}$. Algebraice ergo hic terminus ordine $\frac{1}{2}$ dari potest, nec non ii, quorum indices sunt $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ etc. omnes numeris exprimi possunt; qui autem quanti sint, alio modo vix fortasse inveniri posset. Hic autem observo hunc terminum ordine $\frac{1}{2}$ aequalem esse termino ordine 2, et generaliter terminus ordine $\frac{1}{n}$ aequalis est termino ordine n. Haec fere constituunt unum genus progressionum, ad quod mea methodus deduxit; multa quoque ejus ope in seriebus summandis detexi, et praecipue terminis summatoriis inve-

niendis omnium earum progressionum, in quarum terminis generalibus exponens vel index in denominatorem ingreditur, ut in progressione harmonica. Sed de his alio tempore, si placuerit, scripturus sum.

Nihil prorsus invenire potui, quod ad Fermatianam observationem spectaret. Sed nondum prorsus persuasus sum, quomodo sola inductione id inferre legitime potuerit, cum certus sim ipsum numeris in formula 2^{2^x} loco x substituendis nec ad senarium quidem pervenisse. — Haec igitur benevole accipias enixe rogo et favere pergas, Vir Celeberrime, Tibi obstrictissimo

Eulero.

LETTRE IV.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Sur la methode d'Euler pour trouver les termes généraux des suites. Sur le théorème de Fermat.

Moscuae 22 Maii 1730

Egregia Teque auctore digna judico quae secundis litteris mecum de terminis generalibus serierum communicasti; hoc tantum in methodo Tua cavendum mihi videtur, ne assumta integralis $\int P dx$ utrovis modo, hoc est, tam posità $x = 0$, quam posita $x = 1$, in nihilum abeat. Deinde sponte moneo, terminum generalem serici $\frac{1}{2} + \frac{2.4}{3.5} + \frac{3.6.9}{4.7.10} +$ etc., quem pro exponentibus non integris dederam, non quadrare, fatendum tamen est terminum generalem ejusmodi

$$\frac{2n+3}{2}\int dx\,(1-x)^n \sqrt{x},$$

ut intelligibilis fiat in seriem infinitam consueto more resolvi

debere, cujus singuli termini integrati tandem exhibebunt terminum generalem indefinitum, quem etiam sine usu arithmeticae differentialis infinitis modis produci posse constat.

Quod ad Fermatii observationem attinet, Tecum sentio, non credibile videri, eum ad sex terminos illius suae seriei exprimendos progressum fuisse, neque tanto labore opus est ad verisimilitudinem illius observationis; facile enim experimur, divisore quocunque accepto, residua ex terminis ordine, quo sequuntur, divisis in circulum redire; sic v. gr. terminus $2^{2^x}+1$, ubi $x=2$, divisus per 7 relinquit 3, ergo terminus sequens relinquit idem residuum, quod relinquitur ex divisione numeri $(3-1)^2+1$ per 7, nempe residuum 5; terminus hunc sequens idem residuum dabit, quod relinquitur ex divisione numeri $(5-1)^2+1$ per 7 divisi, nempe 3; ergo omnia residua possibilia omnium terminorum seriei divisorum per 7 (ubi scil. quotiens sit >0) sunt vel 3 vel 5. Simili ratione facile apparet nullum terminum seriei Fermatianae dividi posse per numerum <100; sed quidquid sit de Fermatii observatione, hoc certum est, omnem numerum 2^p+1, ubi p non sit $=$ alicui numero 2^n (in quo n est numerus integer affirmativus), esse non primum, cujus quidem divisores facillime inveniuntur. Sic numeri $2^{24}+1$ divisor est 17, numeri $2^{1736}+1$ divisor est 257 etc. Vale.

Goldbach.

LETTRE V.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Recherches ultérieures sur le théorème de Fermat. Formule qui exprime le nombre des diviseurs d'un nombre donné. Chaque nombre est la somme de quatre quarrés. Formule pour la quadrature du cercle de Grégoire a St.-Vincent

Petropoli die 4 Junii 1730

Postquam ultimas ad Te misissem litteras, de theoremate Fermatiano diligentius cogitare coepi, idque non tam levi nixum fundamento, quam primum putaveram, perspexi. Quoties enim in $2^n + 1$ non est n numerus ex progressione geometrica 1, 2, 4, 8, etc., divisores semper, ut ipse, Vir Celeberrime, in postremis litteris monuisti, assignari possunt. Nam si n est numerus impar, binomium $2^n + 1$, vel etiam generalius $a^n + b^n$ poterit dividi per $a + b$. Si praeterea fuerit n multiplum quodpiam numeri imparis, uti si $n = ki$, denotante i numerum quemcunque imparem, divisor erit $a^k + b^k$. Quamobrem, cum solae binarii potentiae hanc habeant proprietatem, ut per nullum numerum imparem dividi possint, praeter unitatem, sequitur tum solum binomii $a^n + b^n$

ex hoc fonte divisorem assignari non posse, quando n est potentia quaedam binarii. Hoc quidem multum ad evincendam theorematis veritatem, sed tamen non est prorsus sufficiens. Quanquam enim pro n assumitur dignitas quaedam binarii, tamen ex eo inferre non licet $a^n + b^n$ nullos habere divisores; ut si a sit $= 4$. et $b = 3$, etiamsi ponatur $n = 2$, potest $16 + 9$ dividi per 5. Conducit ergo investigare casus, quibus nihilominus divisores locum habent. Perspicuum est primum, si a et b fuerint numeri inter se compositi, ut cf et df, binomium $c^n f^n + d^n f^n$ habere divisorem f^n. Deinde si a et b utrumque fuerit numerus impar, dividi semper poterit per 2. Denique ut hos casus universalius evolvamus, sit $a = mc + \alpha$, et $b = mc + \beta$, erit

$$a^n = \alpha^n + n\alpha^{n-1}mc + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2}m^2c^2 + \text{etc.},$$

$$\text{et } b^n = \beta^n + n\beta^{n-1}mc + \frac{n(n-1)}{2}\beta^{n-2}m^2c^2 + \text{etc.},$$

$$\text{ergo } a^n + b^n = (\alpha^n + \beta^n) + nmc(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) + \frac{n(n-1)}{2}m^2c^2(\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}) + \text{etc.}$$

Ex hoc apparet singulos progressionis terminos praeter primum dividi posse per mc. Quoties igitur $\alpha^n + \beta^n$ et mc communem habent divisorem, per eundem et $a^n + b^n$ dividi poterit. In his igitur aliisque, si qui forte hic non continentur, casibus, quibus $a^n + b^n$ non fit numerus primus, si non comprehenditur casus Fermatii, quo $a = 2$ et $b = 1$, tuto concludi potest $2^n + 1$ semper esse numerum primum. Sed forte et alia hujusmodi theoremata invenire licet, ut $3^n + 2^n$, si n fuerit dignitas binarii, semper numeros primos mihi dare videtur. Caeterum theorema hoc non tam saepe, si unquam fallit, mihi fallere videtur, quam quae de differentiis potentiarum enunciant, cujusmodi est hoc: $2^n - 1$

semper dare numerum primum si n sit numerus primus. Nam si ponatur $n = 11$, $2^{11} - 1$, vel 2047, habet divisorem 23, similiter 47 metitur $2^{23} - 1$, et 223 hoc $2^{37} - 1$. Occurrit mihi hic terminus generalis, quem aliquando inveni, vel functio quaedam ipsius x, quae hanc habet proprietatem, ut quicunque numerus loco x ponatur, ea det numerum divisorum ejusdem numeri; in divisoribus vero habeo et unitatem et numerum ipsum, ita ut numeri primi duos tantum habeant divisores. Est itaque haec mea formula terminus generalis hujus seriei

1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 6,
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,

cujus quilibet terminus indicat, quot index subscriptus habeat divisores, ut 6 habet quatuor 1, 2, 3, 6. Significet nunc x numerum quemcunque, erit numerus divisorum ipsius x hic

$$\frac{3 + (-1)^x + 1 + (-1)^A + 1 + (-1)^B + 1 + (-1)^C + 1 + -1)^D + \text{etc}}{2}$$

Designant vero A terminum generalem seriei 1, 1, 4, 7, 13, 22, etc., cujus quivis terminus summa est duorum praecedentium et 2; B terminum generalem seriei 1, 1, 1, 6, 11, 21, 41, etc., cujus quilibet terminus est summa trium praecedentium $+ 3$; C terminum generalem seriei 1, 1, 1, 1, 8, 15, 29, 57, etc., cujus quivis terminus est summa quatuor praecedentium $+ 4$. Similis ratio est reliquarum litterarum D, E, etc. Quaeratur hinc numerus divisorum senarii, erit $x = 6$, $A = 22$, $B = 21$, $C = 15$, $D = 10$, $E = 1$, $F = 1$, et reliquae omnes erunt 1. His positis erit numerus divisorum senarii =

$$\frac{3 + (-1)^{6} + 1 + (-1)^{22} + 1 + (-1)^{21} + 1 + (-1)^{15} + 1 + (-1)^{10} + 1 + (-1)^{1} + 1 + (-1)^{1} \text{etc.}}{2}$$

quia autem -1 elevatum ad numerum parem dat $+1$ et ad numerum imparem -1, erit numerus divisorum

$$= \frac{3+1+1+1+1-1+1-1+1+1+1-1+1-1}{2} = 4,$$

qui sunt 1, 2, 3, 6. Si igitur quis potuerit, formula illa posita $= 2$, eruere quid sit x, haberetur terminus generalis pro serie numerorum primorum; sed isthuc pertingere non spero. Incidi nuper, opera Fermatii legens, in aliud quoddam non inelegans theorema: *Numerum quemcunque esse summam quatuor quadratorum*, seu semper inveniri posse quatuor numeros quadratos, quorum summa aequalis sit numero dato, ut $7 = 1 + 1 + 1 + 4$. Sed tria quadrata nunquam invenientur, quorum summa sit 7. Ad hoc theorema demonstrandum requiritur, ut generaliter quatuor quadrata inveniantur z^2, y^2, x^2, v^2 quorum summa aequalis sit summae quinque datorum $1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Alia ibi habentur theoremata de resolutione cujusvis numeri in trigonales, pentagonales, cubos etc., quorum demonstratio magnum afferret incrementum analysi. Ut pagina haec impleatur transcribam quadraturam quandam circuli, quam ex propositione aliqua Gregorii a St. Vincentio elicui, cujus falsitatem nemo adhuc ostendit. Ea haec est: Si peripheria sit p et diameter d, erit $\frac{p}{d} = \frac{3(1+A)\sqrt{3}}{2(2A-1)}$, est vero $A = \left(\frac{11}{5}\right)^{\frac{l11:5}{l203:53}}$, ubi $l\,11:5$ denotat logarithmum fractionis $\frac{11}{5}$ et $l.203:53$ logarithmum hujus $\frac{203}{53}$. Haec expressio prope ad $\frac{22}{7}$ accedit, et si vera esset, magnum sane esset inventum.

Vale et favere perge, Vir Celeb., Tui observantissimo

Eulero.

LETTRE VI.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Réflexions ultérieures sur le théorème de Fermat et réponse à la lettre précédente.

Moscuae d $\frac{15}{26}$ Junii 1730.

Etiamsi vera non esset Fermatii propositio, tamen laude digna mihi videtur propterea quod, cum ejus demonstrationem investigamus, in alia incidimus theoremata quorum veritas solidis argumentis evinci potest, quale est illud quod de numero $a^n + b^n$ divisibili per $a + b$, si n fuerit numerus impar, observasti.

Praeterea 1) si a, b, n sint numeri integri, et ⊐⊏ significet aequationem impossibilem, posito $\frac{a \pm n}{n^2 + 1}$ ⊐⊏ b, sequitur $a^2 + 1$ esse numerum primum; id quod demonstrari potest.

Sufficit autem pro n seligere numeros qui n^2+1 faciunt primos, videlicet 2, 4, 6, 10, 14, etc. (sunt enim 2^2+1, 4^2+1, 6^2+1, etc. numeri primi), sic verbi gratia quoniam illico patet numeros $\frac{20 \pm 2}{5}$ et $\frac{20 \pm 4}{17}$ non esse integros, sequitur numerum $20^2+1=401$ esse primum.

2) Verisimile est divisorem minimum (unitatem et numerum ipsum hic pro divisoribus non habeo) cujuscunque numeri $a^{2^x}+1$ esse hujus formae $n^{2^x}+1$, sed hoc quia nondum satis examinavi, affirmare non possum, nisi de unico casu, ubi $x=1$, qui facile demonstratur. Caeterum si verum esset quod verisimile dixi, ex eo demonstraretur theorema Fermatianum, nam v. gr. posito $a=2$, n non posset sumi $=1$ (quoniam $n^{2^x}+1$ fieret numerus par, atque adeo dividere non posset numerum imparem), neque $n=2$ (quoniam divisor $n^{2^x}+1$ fieret $=$ ipsi dividendo), ergo $2^{2^x}+1$ non haberet ullum divisorem.

Utrum numeri (3^n+2^n) (ubi n significat dignitatem aliquam binarii) primi sint, non dixerim; si conjectare libet fortasse etiam $(2.3)^{2^n}+1$ sunt numeri primi, fortasse et $(2p)^{2^x}+1$, si p est primus; sed quis unquam affirmavit numeros (2^n-1) esse primos, si n sit primus?

Quae de termino generali numerorum primorum inveniendo ex formula, numerum divisorum dati cujusvis numeri exprimente, disseris, ingeniose meditata agnosco, etsi in usum deduci, ut ipse animadvertis, vix possint.

Fermatii et Gregorii a S. Vincentio opera me non legisse doleo. Quod ex Fermatio refers theorema: *Numerum quemcunque esse summam quatuor quadratorum*, demonstratum videre cupio, facile illinc infertur. *Numerum quemcunque esse*

summam tot quadratorum $(3n+1)$ *quot numerus pro arbitrio sumtus* n *continet unitates.* Sunt mihi complura ejusmodi theoremata in promtu, quorum demonstrationes neque exercitatissimus Mathematicus, nisi forte fortuna, inveniat, etsi sua natura facillimae sint; v. gr. nullum numerum triangularem si ei addatur 4, habere radicem rationalem octavae vel decimae potestatis, seu quod idem est, positis a et n numeris integris fore $\frac{nn+n+8}{2} = a^{9\pm 1}$.

De quadratura circuli per logarithmos numerorum, quos in litteris Tuis commemoras, expressa, vehementer dubito, etsi ad verum prope accedat. Sunt etiam numeri surdi simplices qui parum a vero aberrant, ut si data diametro $= 1$, peripheriam dicamus $3 + \frac{\sqrt{2}}{10}$, hic numerus ne quidem $\frac{2}{100000}$ a vero deficit; ita ut non putem ullam methodum excogitatam esse quae rationem diametri ad peripheriam terminis tam prope veris geometrice definiat quam haec ipsa; quid enim facilius est quam diagonalem quadrati circumscripti dividere in partes decem et unam decimam addere ad triplum diametri? Vale et fave Tuo

Goldbach.

LETTRE VII.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE: Recherches ultérieures sur les nombres et les diviseurs.

Petropoli die 26 Junii 1730.

Theorematis Fermatiani veritas quotidie mihi magis elucere videtur, sed tamen demonstrationem ejus nondum sum nactus. Sunt mihi autem nonnullae ejus inventae proprietates, quae fortasse ad demonstrationem conficiendam utiles esse possent. Fiat series cujus terminus generalis est $2^{2^{x-1}}+1$ sequens 3, 5, 17, 257, etc., cujus singuli termini secundum Fermatium sunt numeri primi. Demonstrare autem possum nullum terminum per quemquam praecedentium dividi posse, et praeterea si quis terminus haberet divisorem, sequentium nullum per eundem dividi posse, sed

semper residuum fore 2. Certum igitur ex hoc est, omnes ejus progressionis terminos inter se esse primos, vel duos reperiri non posse, qui communem habeant divisorem.

Quod $aa+1$ sit numerus primus, quoties in $\frac{a+n}{nn+1}$ nullus numerus inveniri potest, qui pro n substitutus fractionem mutet in numerum integrum, demonstrare etiam possum hoc modo: Investigo casus, quibus $aa+b$ (pono autem $b<2a+1$) fit numerus primus. Fiet hoc si nullos habet divisores; si haberet autem divisores, ii esse hujus formae $a+m$ et $a-n$, quia igitur $aa+b=(a+m)(a-n)$, erit $n=\frac{ma-b}{a+m}=m-\frac{m^2-b}{a+m}=a-\frac{aa-b}{a+m}$. Quoties ergo nullus numerus inveniri potest, qui loco m substitutus, vel $\frac{ma-b}{a+m}$, vel $\frac{mm+b}{a+m}$, vel $\frac{aa+b}{a+m}$, faciet numerum integrum, toties $aa+b$ non habet divisores, et propterea est numerus primus.

Dicis deinde, Vir Celeberrime, divisorem minimum ipsius $aa+1$, si quos habet divisores, esse hujus formae $nn+1$. Sed puto unitatem pro divisore minimo habere oportere; nam hoc nisi esset, theorema verum non esset. Si enim est $a=34$, erit $aa+1=1157$, cujus minimus divisor est 13. Si $a=76$, erit $aa+1=5777$, cujus minimus divisor est 53. Quanquam autem hi divisores minimi non quidem unitate excedant quadratum, tamen sunt fortasse omnes summae duorum quadratorum.

An $6^{2^x}+1$ sit numerus primus, neque affirmare neque negare possum. De generali formula vero $(2p)^{2^x}+1$ nego, etiamsi p fuerit numerus primus. Nam si $p=5$, $x=2$, habebitur 10001, qui non est primus, sed divisorem habet 73. Neque etiam, quod suspicatus eram, $3^{2^x}+2^{2^x}$ est numerus primus; si enim $x=3$, dividi potest 3^8+2^8 per 17.

Fateor me nullum librum nominare posse, in quo invenerim $2^n - 1$ esse numerum primum, si n est numerus primus. Tamen bene memini, in inveniendis numeris perfectis hoc theorema vulgo in usum vocari. Requiritur enim ad eos inveniendos, ut omnes habeantur casus, quibus $2^n - 1$ est numerus primus.

Theorema, quod quicunque numerus sit summa quatuor quadratorum, demonstrare non possum, neque ipse Fermatius demonstrare se posse affirmat. Tamen rem ad hanc quaestionem reduxi, ut $xx + 7$ in quatuor quadrata resolvatur.

Quadraturam circuli Gregorii a St. Vincentio examinavi eamque ex falso lemmati deductam esse deprehendi. Utique si vera non est, etiamsi adhuc centies propius ad veram accederet, tamen prorsus nihili est aestimanda. Sed si vera esset, egregium sine dubio esset inventum. Approximationem Tuam, Vir Celeb., ad rationem peripheriae ad diametrum, utilissimam esse in praxi existimo.

De theoremate Tuo, quod nullus numerus triangularis 4^{nario} auctus habeat radicem rationalem 8^{vae} vel 10^{mae} dignitatis, cogitans, seriem numerorum triangularium investigavi, qui quaternario aucti faciant quadrata, atque inveni radices numerorum eorum trigonalium sequentem constituere progressionem: — 7, 0, 9, 56, 329 etc., quae hanc habet proprietatem, ut quivis terminus puta n^{mus} aequalis sit $6\,(n-1)^{\text{mo}} - (n-2)^{\text{mo}} + 2$. Similem legem habet series numerorum, quorum quadrata sunt numeri trigonales, quae haec est: 0, 1, 6, 35, 204, etc., cujus quivis terminus est septuplum praecedentis, demta summa duorum praecedentium. His vestigiis insistens, universaliter seriem numerorum integrorum dare possum, qui loco x substituti faciunt $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$

quadratum, notus autem esse debet unus casus, quo id fit quadratum.

Cum mihi nuper theorema Fermatianum, quod nullus numerus trigonalis sit biquadratum praeter 1, occurreret, inquirere coepi an $\frac{xx+x}{2}$ prorsus non possit esse biquadratum, nisi sit $x=1$ vel 0. Posui primo $\frac{xx+x}{2}=p^2x^2$, eritque $x=\frac{1}{2pp-1}$ et $\sqrt{\frac{xx+x}{2}}=\frac{p}{2pp-1}$. Ut autem $\frac{xx+x}{2}$ fiat biquadratum, debebit $\sqrt{\frac{xx+x}{2}}$ denuo esse quadratum. Quadratum ergo esse debet $2p^3-p$. Ponatur $p=q+1$, habebitur $2q^3+6qq+5q+1$. Radix hujus sumatur $1+\frac{5}{2}q$ erit $2q^3+6qq=\frac{25}{4}q^2$. Ergo $q=\frac{1}{8}$, $p=\frac{9}{8}$ et $x=\frac{32}{49}$. Quamobrem numerus trigonalis, cujus radix est $\frac{32}{49}$, erit biquadratum radicis $\frac{6}{7}$. Ex hoc casu jam cognito infiniti alii inveniri possunt. Hoc autem veritatem theorematis non infirmat, cum Fermatius id tantum de numeris integris intelligi velit. — Rogatus sum Tibi nomine Cl. Bernoullii salutem dicere.

Vale et fave, Vir Celeb., Tui observantissimo

Leonh. Eulero.

LETTRE VIII.

=

GOLDBACH à EULER

SOMMAIRE. Réponse sur les mêmes sujets.

Moscuae $\frac{20}{31}$ Julii 1730.

Jam diu animadverti numerum $2^{2^{x+p}}+1$, ubi x et p sint numeri integri, divisum per $2^{2^x}+1$, relinquere 2, propterea quod $(2^{2^x}+1)\ (2^{2^x}-1)$ est $=2^{2^{x+1}}-1$, rursus $(2^{2^{x+1}}-1)\ (2^{2^{x+1}}+1)=2^{2^{x+2}}-1$, et sic porro, donec perveniatur ad $2^{2^{x+p}}-1$, qui numerus binario minor est quam $2^{2^{x+p}}+1$; ex eo quidem certe sequitur omnes numeros seriei Fermatianae esse inter se primos, ut dicis; at quantulum hoc est ad demonstrandum omnes illos numeros esse absolute primos?

Quod affirmaveram, divisorem minimum numeri a^2+1 esse hujus formae n^2+1, nullo fundamento niti agnosco, quandoquidem exemplo numeri $a=34$ refelli potest. Haec erronea hypothesis aliam nihilo meliorem peperit: numerum a^2+1 esse primum, si $\frac{a \pm n}{n^2+1}$ non possit fieri integer, quae cum facto $a=34$, satis refutetur, non digna erat nova, qua eandem ornasti, demonstratione. Ob hoc ipsum exemplum a Te allatum, magis quam antea dubito de veritate theorematis Fermatiani; fieri enim potest ut minimus divisor alicujus numeri $2^{2^x}+1$ sit centum, vel centies mille notarum, quem usque ad finem mundi nemo inveniat.

Haud satis intelligo, cur Fermatius affirmavit numerum quemcunque esse summam quatuor quadratorum, nisi methodum aliquam tenuit datum numerum in quatuor quadratos dividendi, quae methodus si proba fuit, ad demonstrationem theorematis satis fuit.

In superioribus litteris meis pro $\frac{2}{100000}$ scribendum erat $\frac{2}{10000}$, quod velim corrigas. Caeterum de fallacia lemmatis Gregoriani a Te deprehensa Tibi gratulor; haud dubie is est fons erroris quem et Cartesium vix triduo immoratum Gregoriano volumini notasse scribit Lipstorpius in Specim. Philos. Cartes. par. 1—2, p. 87. Sane si facilitatem legis, qua progreditur approximatio, spectes, nihil puto de quadratura circuli excogitatum esse quam Leibnitii seriem; sin modum quam citissime approximandi requiramus, eum quem secutus est D. Lagnius (in Comment. Acad. Paris. A. 1719) reliquis praestantiorem ex admirabili quod protulis specimine judicare licet; occultavit ille quidem tum temporis artificium quo usus est, neque scio an deinde explicaverit; posteriorum

enim annorum commentarios non memini me vidisse. Si quid Tibi de ejus methodo constat, rogo ut ad me perscribas.

Demonstrationem meam theorematis: nullum numerum trigonalem, praeter 1, esse quadrato-quadratum communicavi cum Cl. Bernoullio nostro litteris Moscua datis, quas, si ad manum sunt, Tibi facile concedet; ex ea demonstratione perspicies non solum nullum numerum n^{2p+2}, sed ne quidem ullum n^2 (praeter 1 et 36) reperiri in trigonalium ordine, tantum abest ut omnes quadrati radicum 0, 1, 6, 35, 204, etc., quarum progressionem in litteris descripsisti, sint trigonales.

Incidi aliquando in solutionem hujus problematis: Numero cuicunque integro quantumvis magno a, cujus tantum duae postremae notae dantur, addere alium numerum integrum b hac lege, ut aggregatum non habeat radicem rationalem ullius potestatis. Sit v. gr. numerus 543664, cujus tantum duas ultimas notas nempe 64 mihi cognitas fingo, reliquis 5436 (vel quibuscunque aliis) occultatis, huic si addatur 2, ita ut fiat 543666, is numerus nullam habet radicem rationalem. Vereor ne totum problema simplicitate sua vilescat, si methodum solvendi et demonstrationem simul addam, quapropter easdem in futuram epistolam differo.

Vale et fave

Goldbach.

LETTRE IX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Théorème de la résolubilité de chaque nombre entier en quatre quarrés. Série de Mayer, très convergente, pour la valeur de π. Série des nombres dont les quarrés sont des nombres trigonaux. Problème de Pell. Sur le problème proposé par G. dans la lettre précédente. Problème des lunules quarrables.

Petropoli die 10 Augusti 1750.

Quantum mihi constat de theoremate Fermatiano, omnem numerum esse summam quatuor quadratorum, ipse Fermatius neque demonstrationem ejus habuisse videtur, neque modum generalem numeri cujusque in quatuor quadrata distribuendi; sed id potius videtur tantum observasse et propterea enunciasse, quia nullum exemplum contrarium ab eo fuit deprehensum. Etiamsi autem haec propositio vera sit, tamen difficillima mihi esse videtur demonstrationis inventio; nullam enim legem observare potui in divisione difficillimorum numerorum hujus formae $nn + 7$, atque reso-

lutio in quatuor quadrata semper fortuna tantum succedere videtur, neque ulla prorsus regula contineri. Commentarii Academiae Parisinae ad A. 1719 et sequentes non adsunt hic in Bibliotheca et hanc ob rem de methodo D. Lagnii nihil commemorare possum. Quod autem ad aptam et facilem approximationem ad aream circuli attinet, memini Mayerum nostrum b. d. habuisse seriem vehementer convergentem, cujus tres vel quatuor termini tantum sumti darent maximos Ludolphi a Ceulen numeros. Series, quam nuper Tecum communicavi 0, 1, 6, 35, 204, etc., hanc habet proprietatem, ut cujusvis termini quadratum sit numerus trigonalis, neque haec proprietas ad 0, 1 et 6 tantum pertinet. Nam v. g. quadratum termini 35 est 1225, qui est numerus trigonalis radicis 49. Universaliter vero, cum illius progressionis terminus generalis sit $\frac{(3+2\sqrt{2})^{n-1}-(3-2\sqrt{2})^{n-1}}{4\sqrt{2}}$, hujus quadratum est numerus trigonalis radicis

$$\frac{(3+2\sqrt{2})^{n-1}+(3-2\sqrt{2})^{n-1}-2}{4}.$$

Ex ea igitur serie quam dedi inveniuntur innumerabiles numeri integri qui simul sunt quadrati et trigonales. Fundamentum ejus sequenti generali theoremate nititur: Si formula az^2+bz+c fit quadratum casu, quo ponitur $z=p$, fiat ea quoque quadratum casu, quo

$$z=\frac{-b+b\sqrt{(1+a\lambda^2)}}{2a}+p\sqrt{(1+a\lambda^2)}+\lambda\sqrt{(ap^2+bp+c)},$$

oportet autem pro λ numerum accipere qui $1+a\lambda\lambda$ faciat quadratum. Si igitur unicus innotescit casus, quo az^2+bz+c fit quadratum, ex hac forma statim invenientur innumerabiles, idque in integris numeris, siquidem λ ita accipiatur ut $\frac{-b+b\sqrt{(1+a\lambda\lambda)}}{2a}$ fiat numerus integer. Omnes autem nu-

meri hoc modo inventi constituunt seriem ex duabus geometricis conflatam. Agitata sunt hujusmodi problemata de numeris integris inveniendis inter Wallisium et Fermatium. Exemplum maxime difficile erat: invenire numeros integros, qui loco x positi efficiant formulam $109xx + 1$ quadratum. Pro hujusmodi quaestionibus solvendis excogitavit D. Pell Anglus peculiarem methodum in Wallisii operibus expositam. Eaque ad meum institutum opus habeo, ut $1 + \alpha\lambda\lambda$ fiat quadratum. Ea vero methodus tantum ad exempla prorsus numerica patet, neque ejus est usus in formulis arbitrarios coëfficientes habentibus resolvendis, cujusmodi est meus casus $az^2 + bz + c$. Conatus sum similem methodum pro formulis, in quibus indeterminata tres habet dimensiones, invenire. Idem vero non aeque ac in quadraticis praestare potui; sed tamen ea sufficit ad omnes numeros integros inveniendos, legem vero, qua ii progrediuntur, non praebet. Exempla ad hoc illustrandum sint haec: Invenire numeros pyramidales trigonales integros, qui sint quadrati, vel qui sint triangulares plani.

Solutionem Tuam, Vir Celeb., problematis quod perscripsisti, ad propositum numerum alium addere, ita ut summa non habeat radicem rationalem ullius potestatis, ex hoc principio ductam esse statim animadverti, quod nullus numerus ullius dignitatis per solum binarium dividi possit, vel quod nulla potentia sit numerus impariter par. Ex duabus autem postremis notis cujusque numeri cognoscitur, utrum per 4 dividi possit an secus. Quamobrem si talis numerus adjiciatur, qui efficiat summam per 2 sed non per 4 divisibilem, habetur quod desideratur. Idem adhuc pluribus modis potest effici, vel faciendo ut ultima nota sit 0, penultima non; vel ut duae postremae notae sint 05, 15, 35, 45,

55, 65, 85, 95; hujusmodi enim terminationes nullae habent dignitates. Similiter apparet, qualis numerus ad propositum quantumvis magnum, cujus notarum summa tantum datur, addi debeat, ut quod prodit nulla sit potentia. Nimirum talis debet addi, qui ad summam notarum additus reddat eam per 3, sed non per 9 divisibilem.

Methodum Tuam lunulas quadrabiles inveniendi vidi, eaque mihi magnopere placuit propter summam ejus et facilitatem et brevitatem. Persecutus sum idem problema jam diu, prorsus analytice, sequenti modo: Sit (Fig. 1.) semilunula quaecunque ABD, et ex D in AB productam demittatur perpendiculum DC, arcuum AD, BD sinus. Sit $DC = y$, radius arcus $AD = a$, radius arcus $BD = b$; erit integratione per logarithmos absoluta area $ACD =$

$$\frac{aa\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{y+\sqrt{(yy-aa)}}{a\sqrt{-1}} - \frac{y\sqrt{(aa-yy)}}{2},$$

et area $BCD =$

$$\frac{bb\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{y+\sqrt{(yy-bb)}}{b\sqrt{-1}} - \frac{y\sqrt{(bb-yy)}}{2}.$$

Ex his erit semilunulae area $ADB =$

$$\frac{aa\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{y+\sqrt{(yy-aa)}}{a\sqrt{-1}} - \frac{bb\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{y+\sqrt{(yy-bb)}}{b\sqrt{-1}} -$$

$$\frac{y\sqrt{(aa-yy)}+y\sqrt{(bb-yy)}}{2}.$$

Ergo perspicuum est quoties in hac expressione quantitates logarithmicae evanescunt, toties lunulam esse quadrabilem, erit enim $ADB = \frac{y\sqrt{(bb-yy)}-y\sqrt{(aa-yy)}}{2}$. Quamobrem ad lunulas quadrabiles inveniendas oportet ut sit

$$\frac{aa\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{y+\sqrt{(yy-aa)}}{a\sqrt{-1}} = \frac{bb\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{y+\sqrt{(yy-bb)}}{b\sqrt{-1}},$$

vel sumtis numeris

$$\left(\frac{y+\sqrt{(yy-aa)}}{a\sqrt{-1}}\right)^{aa}=\left(\frac{y+\sqrt{(yy-bb)}}{b\sqrt{-1}}\right)^{bb}.$$

Ex hac aequatione, data relatione inter a et b, determinabitur y, seu semichorda lunulam quadrabilem subtendens. Quanquam in aequatione inventa insunt quantitates imaginariae, tamen in reductione eae ex calculo abeunt, prodituque pro y valor realis. Solutio haec cum Tua, Vir Celeb., congruit, utraque enim omnes dat casus, qui existunt. Vale et fave Vir Celeb., Tibi observantissimo

Leonh. Eulero

LETTRE X.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Réponse à la lettre précédente. Problème de géométrie.

Moscuae d. 9 Oct 1730

Numeros, qui dividi possunt in tot quadrata quot a continet unitates, animadverti posse etiam dividi in quotcunque plura quam a, hoc est in quadrata $a + n$, ubi n denotet numerum integrum affirmativum quemcunque. Si igitur verum est numerum quemcunque dividi posse in quadratos quatuor, theorema generalius enunciari poterit: *Numerum quemcunque rationalem dividi posse in quadratos quotcunque plures quam* **3**. Omnis vero numerus qui neque duorum neque trium quadratorum summa sit, semper dividi posse videtur non solum



in quatuor quadratos, sed etiam in 1 et tres quadratos, sic v. gr.

$7 = 1 + 1 + 1 + 4$; $23 = 1 + 4 + 9 + 9$; $39 = 1 + 1 + 1 + 36$;
$15 = 1 + 1 + 4 + 9$; $28 = 1 + 9 + 9 + 9$; $47 = 1 + 1 + 9 + 36$;
etc.

neque ullum exemplum contra adferre poteris; sed hujusmodi theoremata non facile demonstrari cum Fermatio fateor.

Series illa Mayeri, quae tribus quatuorve terminis numeros Ludolphinos exhibuit, magni momenti videtur, si isti tres quatuorve termini breviore tempore et describi et in summam colligi possunt, quam quo tempore opus est ad eosdem numeros methodo Ludolphi determinandos, nisi enim id demonstratur, nihil in ejusmodi serie magnopere admirandum est, cum vel ipsa series Leibnitiana pro lubitu in magis convergentem transmutari possit, si v. gr. millenos quosque terminos ejusdem pro singulis terminis alterius seriei sumamus, sed hujusmodi compendio, ut dixi, nihil proficimus, quoniam ad duos terminos seriei magis convergentis describendos et addendos tantum temporis requiritur quantum ad colligendam summam bis mille terminorum seriei minus convergentis.

Innumeros esse quadratos trigonales satis ostendisti et hanc ob causam multo magis memorabile est Fermatii effatum: nullum numerum trigonalem, praeter 1, esse quadrato-quadratum.

Numerum qui, divisus per 9, relinquit 3 vel 6 non habere radicem rationalem, quemadmodum observasti, jam ante plus quam 12 annos ad amicum scripseram. Locus ex epistola excerptus in Supplem. Actor. Lips. legitur.

Quod mea solutio problematis de quadrandis lunulis Tibi probetur pergratum est, quamquam mihi ipsi displicere

coepit, postquam non novam, sed a Cl. Dan. Bernoullio in Exercitat. Mathemat. multo ante expositam vidi. Tua solutio mihi imprimis arridet, quod aequationem ad expressiones definitas reducis, quae sane plus habent elegantiae quam series indefinitae. Caeterum quaecunque hujus problematis solutiones excogitentur, totum negotium in eo est, ut ab expressione, quae determinat aream lunulae, removeantur quantitates a circuli quadratura pendentes; igitur jam ante 7 annos, cum primum hujus problematis mentionem in litteris faceret Nicol. Bernoullius p. m. hanc ei solutionem misi:

Sint (Fig. 2.) duo circuli sese intersecantes in A et C; circulus $AGC = \alpha$; $AHC = \beta$; pars circuli $ADCE = \frac{\alpha}{p}$; $ABCF = \frac{\beta}{q}$; triang. $AEC = b$; $ACF = c$; erit segm. $ADC = \frac{\alpha}{p} - b$: $ABC = \frac{\beta}{q} - c$; adeoque lunula $ABCG = \alpha - \frac{\alpha}{p} + b - \frac{\beta}{q} + c$; et ponendo $\alpha - \frac{\alpha}{p} - \frac{\beta}{q} = 0$ (ut scilicet destruantur quantitates quadraturam circuli involventes) erit eadem lunula $ABCG = b + c$.

Occasione problematis Kepleriani de semicirculo CHD (Fig. 3.) ex dato puncto E ita dividendo, ut trilineum CHE sit ad aream semicirculi in ratione data, in alius problematis solutionem incidi:

1. dato radio $AC = 1$,
2. ratione diametri ad peripheriam: 1 ad p,
3. arcus dati ad sinum rectum: $\frac{p}{n}$ ad e,
4. areae trilinei CHE ad aream semicirculi CHD. 1 ad n.

determinare distantiam puncti E a centro A seu lineam $AE = c$ infinitis modis, ita ut sinus HI exprimatur per quantitates p, n, e; postulatur autem solutio, quae determinet lineas AE et HI non per series, sed per expressiones definitas.

Solutio. Sit m numerus arbitrarius, $AE = c =$

$$\frac{2p(1-m)\sqrt{-1}}{n\left[\left(\sqrt{(1-e^2)}+e\sqrt{-1}\right)^m-\left(\sqrt{(1-e^2)}-e\sqrt{-1}\right)\right]^m},$$

erit $HI = \frac{p(1-m)}{nc}$.

LETTRE XI.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Théorèmes de la théorie des nombres Formules pour la valeur de π. Intégration de formules irrationelles.

Petropoli die 17 Octobr. 1750.

Quod omnis numerus, qui in tot quadrata, quot a continet unitates, dividi potest, etiam in plura possit dividi, ex eo facile intelligitur, quod quadratus numerus quicunque in duos pluresve quadratos possit distribui. Hoc ergo modo numerus quadratorum, qui junctim sumti numerum datum efficiunt, quousque libuerit potest augeri, non vero diminui. Observavi atque demonstrare possum nullum numerum hac forma contentum $mm(4x+3)$ in duo dividi posse quadrata; neque ullum hujus formae $mm(8x+7)$ esse summam trium quadratorum. An vero omnes reliqui in tria pauciorave dividi possint, non dixerim; neque an omnes

numeri in ea formula contenti in quatuor quadrata possint dividi. Saltem nullum exemplum deprehendere potui. Attamen si verum est aliud theorema ejusdem Fermatii, omnem numerum esse summam trium numerorum trigonalium, et hoc inde sequitur omnem numerum $mm(8x+7)$ esse summam quatuor quadratorum. Vi enim illius theorematis omnes numeri comprehenduntur in ista formula $\frac{aa+a}{2}+\frac{bb+b}{2}+\frac{cc+c}{2}$. Propterea hujus octuplum $4aa+4a+4bb+4b+4cc+4c$ complectitur omnia multipla octonarii, seu omnes numeros hujus formae $8x$. Consequenter haec formula $(2a+1)^2+(2b+1)^2+(2c+1)^2$ continet omnes numeros hujus formae $8x+3$. Quocirca omnes numeri $8x+3$ sunt summae trium quadratorum. Hanc ob rem omnes numeri formae $8x+4$ vel hujus $8x+7$ sunt in quatuor quadrata resolubiles. Porroque et hi $mm(8x+4)$ atque $mm(8x+7)$. Formula $mm(8x+4)$ aequivalet huic $mm(2x+1)$. Ex hac formula excluduntur omnes numeri impariter pares, iique soli; i. e. numeri formae istius $4x+2$. Etiamsi ergo verum esset Fermatii theorema de numeris trigonalibus, tamen ad veritatem nostri ostendendam necesse insuper est demonstrare omnes numeros $4x+2$ in quatuor quadrata esse resolubiles. Quod attinet ad observationem, omnem numerum in quatuor saltem quadrata divisibilem dividi posse in unitatem et tria quadrata, sive quod eodem redit, si a tali numero unitas auferatur, residuum semper in tria quadrata distribui posset. Haec proprietas utique in omnibus numeris centenario minoribus locum habet, sed numerorum majorum innumerabilia exempla in contrarium afferre possum, cujusmodi est 112, qui numerus quanquam in pauciora quam 4 quadrata dividi nequit, tamen effici non potest,

ut unitas in illis quatuor quadratis reperiatur. Nam 111 nunquam in tria quadrata dividetur. Eandem proprietatem habent omnes numeri hac forma contenti $16\,nn\,(8x + 7)$, neque enim hi neque unitate mulctati in tria vel pauciora quadrata possunt dividi. Numeris autem $16nn\,(8x + 7)$ in quatuor quadrata dividendis, non solum effici non potest, ut unitas sed neque ut hujus formae $(2m + 1)^2 \frac{nn}{dd}$ quadratum locum in illis quatuor quadratis expleat. Denotat hic d numerum dividentem n. — De altera quaestione, quomodo quam facillime maximi numeri Ludolphi a Ceulen quadraturam circuli dantes inveniri queant, scribam quae ipse meditatus sum, cum manuscripta Mayeri amplius inspicere non liceat. Sit diameter circuli b, chorda quaecunque $= x$ et arcus respondens $= S$, erit

$$S = x + \frac{1 . x^3}{2 . 3 . b^2} + \frac{1 . 3 . x^5}{2 . 4 . 5 . b^4} + \frac{1 . 3 . 5 . x^7}{2 . 4 . 6 . 7 . b^6} + \text{etc.}$$

Haec series eo magis convergit quo minor accipitur x. Sed ut ratio peripheriae ad radium inde possit inveniri, oportet ut S cum tota peripheria ex x cum diametro sit commensurabilis. Ad hoc minor chorda rationalis non adhuc est inventa, quam ea arcus 60 graduum, quae est $= \frac{1}{2}\,b$. Cum autem hoc casu series nequaquam satis convergat, in id cogitandum est, quomodo expressio finita inveniatur ei quam proxime aequalis. Prope accedit haec $S = \frac{60bbx - 17x^3}{60bb - 27xx}$, propius etiam haec $S = x + \frac{840bbx^3 - 122x^5}{120bb\,(42bb - 25xx)}$, nec non $S = x + \frac{x^3}{6bb}\left(\frac{420\,bb}{420\,bb - 311\,xx}\right)^{\frac{189}{311}}$. Sed hae omnes, nisi x minor quam $\frac{1}{2}b$ accipi potest, non vehementer admodum ad

verum accedunt; propterea maxime consultum erit minorum peripheriae partium chordas, etsi irrationales assumere. Habeo praeterea aliam formulam, qua peripheriam circuli determinare possum. Si diameter ponatur $= 1$, erit peripheria

$$= \frac{16.36.64.100\ldots 4nn}{9.25.49.81\ldots(2n-1)^2} \cdot \frac{8n+2}{2nn+n},$$

vel accuratius

$$\text{peripheria} = 4\,(1+n)\,\frac{4.16.36\ldots 4nn}{9.25.49\ldots(2n+1)^2}\sqrt{\frac{2n+2}{2n+3}},$$

quae posterior expressio semper est justo major; hic quo major accipitur n, eo vero propior prodibit peripheria. — Vidi Clarissimum Bernoullium nostrum in litteris ad Te, Vir Celeberrime, datis mentionem fecisse theorematis cujusdam mei, hanc formulam $\frac{a\,dx}{\sqrt[m]{(b+cx^m)}}$ semper posse in rationalem transmutari et propterea integrari. Significavit is mihi Te eam formulam multis modis universaliorem reddidisse. Celeberrimus Bernoullius Pater quoque simile effecit; non solum enim eam, sed hanc $\frac{a\,dx}{\sqrt[m]{(ax^m+bx^n)}}$ ad rationalitatem reduxit. Haec videns cogitare coepi, an non omnes plane formulae hoc modo integrari possint, admissis saltem logarithmis. Nam quia $\frac{dx}{x}$ in $x^m dx$ continetur, quae beneficio logarithmorum integrari possunt, ea pro absolute integrabilibus haberi debent. Nullo autem modo hanc formam $\frac{aa\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$, quae exprimit elementum curvae elasticae rectangulae, integrare potui neque ellipsin rectificare, etiamsi logarithmi admittantur. Nescio autem, an in nulla Tuarum formularum et hae comprehendantur. Vale et fave, Vir Celeb., Tibi obstrictissimo

Eulero.

LETTRE XII.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Réponse à la dernière partie de la lettre précédente, sur l'intégrabilité des formules irrationelles.

Moscuae 6 Nov. 1730.

In ultima epistola Tua miror diligentiam, quam ad indaganda numerorum mysteria adhibes. Revidi quae ad Celeb. Bernoullium de formula differentiali cujus mentionem facis scripseram, atque illico animadverti casus illos rationales multo brevius quam putaram expediri posse. Praemonendum autem duco formulam $A \ldots \frac{dx}{(x^m + x^n)^{\frac{1}{m}}}$ nihilo generaliorem esse formula $B \ldots \frac{dv}{(v^m + 1)^{\frac{1}{m}}}$, cum per solam substitutionem $x = v^{\frac{m}{m-n}}$ ex A producatur B, quod etiam agnovit Clar.

Daniel Bernoullius. Considerabo jam differentialem hujus formae $C \ldots (1 + x^{\frac{1}{n}})^p dx$ (ubi p sit numerus rationalis non integer), quam dico rationalem fieri si n sit numerus integer quicunque; ponatur enim $x = (z - 1)^n$, mutabitur C in $D \ldots n(z-1)^{n-1} z^p dz$, quam apparet fieri rationalem si n sit numerus quicunque integer. Si vero ponatur $z = \nu(\nu - 1)^{-1}$, migrabit D in $E \ldots -n(\nu-1)^{-n-p-1} \nu^p d\nu$, quae ad terminos rationales redigi potest, si $-n-p$ sit numerus integer quicunque.* Memorabilis haec est convenientia casuum integrabilium et rationabilium (ut sic loquar), illi enim numerum n vel $-n-p$ integrum affirmativum, hi saltem integrum postulant. Vale.

Goldbach.

Note marginale d'Euler: $\frac{dx}{\sqrt[m]{(bx^m + ax^n)}}$ fit rationale, si ponatur $(b + ax^{n-m})^{\frac{1}{m}} = s$; $\frac{dx}{x^p \sqrt[m]{(1 + x^{-n})}}$ est integrabile, si $p - 1$ dividi potest per n.



LETTRE XIII.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Réduction des formules différentielles irrationelles à la rationalité Théorème général pour l'intégration des formules rationelles.

Petropoli die 9 Novembris A. 1750.

Omnis formula differentialis rationalis hanc habet proprietatem, ut ejus integratio reduci possit ad integrationem hujus $x^m dx$. Quam ob rem si $x^m dx$ pro absolute integrabili habemus, enunciare possumus, omnes formulas rationales esse integrabiles. Cum autem, si $m = -1$, integrale ipsius $x^{-1} dx$ sit lx, cujusmodi expressiones in algebraicis non habemus; si eas tantum formulas integrabiles esse censeamus, quae dant integralia algebraica, oportet superiorem propositionem quodammodo restringi, hocque modo enunciari, ut omnes formulae differentiales, quae in rationales transmutari pos-

sunt, integrabiles esse dicantur, iis exceptis, quae a logarithmis pendent. Atque ex hoc ortum suum habet magna ea convenientia casuum integrabilium et rationalium, quam in postremis litteris annotasti. Nescio autem, cur eas formulas, quae a logarithmis pendent, non pro integrabilibus habere velimus. Haec ratio sane non sufficit, quod aeque difficile sit dicere quod sit lx atque $dx:x$. Similis mihi videtur differentia, quae est inter $\int 2xdx$ et x^2. Deinde demonstratum est quantitatibus logarithmicis aequales algebraicas dari non posse; et propterea ad quasque quantitates exprimendas logarithmi aeque sunt necessarii ac algebraicae quantitates, et si formulam integrando ad logarithmos perduxerimus aeque contenti esse debemus, ac si ad algebraicas esset reducta. Admissis igitur logarithmis tanquam quantitatibus in $\int x^m dx$ contentis, omnes formulae differentiales rationales sunt integrabiles, omnesque irrationales, quae in rationales transmutari possunt. Maximam ergo habet utilitatem cura et studium, quod ponitur in reducendis formulis irrationalibus ad rationales. Ex eo autem, quod omnes formulae rationales ad $x^m dx$ possunt reduci, forte suspicari licet, omnes prorsus formulas differentiales eo reduci posse, vel omnes prorsus formulas irrationales in rationales transmutari posse. Magnam hujus desiderati inveniendi haberem spem, si quis hanc tantum expressionem $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ ad rationalitatem reducere doceret. Formula Tua, V. C., $(1+x^{\frac{1}{n}})^p dx$, quae rationalis redditur, si vel n vel $n+p$ fuerit numerus integer, latissime patet; deprehendi enim complures formulas, quas non putassem, ut $\frac{dx}{\sqrt[m]{(1+x^m)}}$ et $\frac{dx}{\sqrt[m]{(x^n+x^{m+n})}}$ in ea comprehendi. Aequivaletque Tuum hoc theorema sequenti meo,

quanquam universalius videatur: $\frac{dz}{\sqrt[m]{(z^p + z^q)}}$ ad rationalitatem reduci potest quoties vel $\frac{p-m}{m(p-q)}$ vel $\frac{q-m}{m(q-p)}$ est numerus rationalis. Ad integrandas autem quascunque formulas rationales theorema sequens inveni:

$$\int \frac{dx(a-x)(b-x)(c-x)\text{ etc.}}{(\alpha+x)(\beta+x)(\gamma+x)\text{ etc.}} = \frac{(\alpha+a)(\alpha+b)(\alpha+c)\text{ etc.}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)\text{ etc.}}\, l\, \frac{x+\alpha}{\alpha} +$$

$$\frac{(\beta+a)(\beta+b)(\beta+c)\text{etc.}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)\text{etc.}}\, l\, \frac{x+\beta}{\beta} + \frac{(\gamma+a)(\gamma+b)(\gamma+c)\text{etc.}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\delta-\gamma)\text{etc.}}\, l\, \frac{x+\gamma}{\gamma} + \text{etc.}$$

$$\pm Ax \mp \frac{Bx^2}{2} \pm \frac{Cx^3}{3} \mp \text{etc.}$$

Horum posteriorum terminorum algebraicorum nullus adest, si (posito numero factorum numeratoris $a-x$, $b-x$, $c-x$ etc. m, et numero factorum denominatoris n) $n = m$ vel $m < n$. Primus tantum Ax locum habet, si $m = n + 1$. Duo vero Ax et $\frac{Bx^2}{2}$ sunt adjiciendi si $m = n + 2$; tres, si $m = n + 3$, et ita porro. Signorum ambiguorum sumentur superiora, si n est numerus par, at inferiora, si n est numerus impar. Litterae vero majusculae, quae valent si $m > n$, sequentes habent valores: A significat summam omnium factorum quae constant ex tot litteris litterarum α, β, γ, δ, etc. et a, b, c, d, etc. quot $m - n$ continet unitates; B significat summam omnium factorum tot habentium factores ex iis litteris desumtos, quot $m - n - 1$ continet unitates; C summam omnium factorum, quae habent $m - n - 2$ factores etc. Excluduntur autem omnia ea facta in quibus quaepiam latina littera plures quam unam habet dimensiones. Complectitur autem haec generalis formula integrata omnes formulas differentiales rationales. Numerus enim fac-

torum, quam in numeratore tam in denominatore, est arbitrarius. Quod autem in omnibus factoribus x unius tantum sit dimensionis, id universalitati non nocet, omnes enim formulae algebraicae, in quibus x plures habet dimensiones, sunt divisibiles in hujusmodi factores simplices. Denique facile perspicitur id universalitati non obesse, quod x alios coëfficientes nisi $+1$ et -1 non habeat. Vale, V. C., et fave Tui observantissimo

Eulero.

LETTRE XIV.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Mêmes sujets. Réponse a la lettre précédente.

Moscuae d. $\frac{18}{29}$ Nov. 1731

Jam in litteris Cal. Jun. 1730 ad Cl. Bernoullium datis monueram formulas

$$A \cdots \frac{dx}{(x^a+1)^{\frac{1}{n}}},\quad B \cdots \frac{u^b du}{(u^c+1)^{\frac{1}{n}}},\quad C \cdots \frac{d\nu}{(\nu^e+\nu^f)^{\frac{1}{n}}}$$

pro iisdem haberi posse, et propterea me uti velle formula A, in qua duae tantum exponentes arbitrariae insunt, cum in binis reliquis formulis tres exponentes reperiantur.

In formula Tua, quam pro $\int dx \frac{(a-x)(b-x) \text{ etc.}}{(\alpha+x)(\beta+x) \text{ etc.}}$ adsignas, non video quid fiat denominatore $= 0$ in expressione

$$\frac{(\alpha+a)(\alpha+b) \text{ etc.}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha) \text{ etc.}},\ \text{si } \beta = \alpha,\ \text{vel } \gamma = \alpha \text{ etc.}$$

Quod attinet ad $\int (1-x^{\frac{1}{n}})^p dx$ non facile puto inventum iri integralem praeter casus, quos jam in praecedente epistola

mea expressi, si scilicet per casus integrabiles eos tantum intelligemus, qui vulgo dici solent, quodsi vero magis ad naturam rei quam ad usum, qui inter Mathematicos obtinuit, respiciamus, apparebit sane eodem jure, quo hujus differentialis $(1-x)^{\frac{1}{2}}dx$ integralis genuina statuitur $-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$, posse etiam $(1-x^{\frac{1}{n}})^p dx$ quovis alio casu integrari; nam cum $\int(1-x^{\frac{1}{n}})^p dx$, ut notum est, resolvi possit in

$$A\ldots(x+\frac{p+n+1}{n+1}Ax^{\frac{n+1}{n}}+\frac{p+n+2}{n+2}Bx^{\frac{n+2}{n}}+\text{etc.})(1-x^{\frac{1}{n}})^{p+1}$$

vel in

$$B\ldots(\frac{-n}{p+1}x^{\frac{n-1}{n}}+\frac{n-1}{p+n-1}Ax^{\frac{n-2}{n}}+\frac{n-2}{p+n-2}Bx^{\frac{n-3}{n}}+\text{etc.})(1-x^{\frac{1}{n}})^{p+1}$$

vel in

$$C\ldots x-\frac{pn}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}+\frac{p.p-1.n}{2.n+2}x^{\frac{n+2}{n}}-\frac{p.p-1.p-2.n}{2.3.n+3}x^{\frac{n+3}{n}}+\text{etc.}$$

ad inveniendam integralem nihil aliud requiritur, quam ut determinetur formula generalis summarum hujus serici

$$\frac{-n}{p+1}x^{n-1}+\frac{n-1}{p+n-1}Ax^{\frac{n-2}{n}}+\text{etc.}$$

per expressionem quae finita maneat, posito pro n numero quocunque non integro; qua ratione autem hujusmodi formula designari possit, in dissertatione mea dixi, sola differentia, quae inter integrales has novas et alias jam cognitas irrationales (v. gr. $(1-x)^{\frac{3}{2}}$) intercedit, haec est quod illae a Mathematicis nondum receptae, hae longo usu jam confirmatae sunt.

Caeterum aequatio $(1-x^{\frac{1}{n}})^p dx = dy$ facile reducitur ad hanc $dz = (p+1)\,z\,dv + n\,(1-z)\,v^{-1}\,dv$, in qua exponentes prioris n et p coëfficientium locum tenent. Vale mihique fave.

Goldbach.

LETTRE XV.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Développement ultérieur du théorème précédent. Substitution pour la résolution de l'équation Riccati. Cas où $2^n - 1$ est un nombre composé, quand même n serait premier.

Petropoli die 26 Novembris A. 1751.

In integrali hujus formulae $dx \frac{(a-x)(b-x)(c-x) \text{ etc.}}{(\alpha+x)(\beta+x)(\gamma+x) \text{ etc.}}$ utique difficulter apparet, quid fiat, si litterarum α, β, γ, etc. aliquot fuerint aequales. Denominatores in aliquot integralis mei terminis tum evanescunt, et propterea ipsum integrale infinitum fieri videtur. Verum si ad signa terminorum istorum attendimus, videbuntur ii se potius destruere, atque in nihilum abire. Horum autem neutrum recte se habet; nam termini illi in infinitum crescentes junctim sumti dabunt valorem determinatum finitum quem sequenti modo inve-

stigo. Sit $\beta = \alpha$, erit difficultas in duobus integralis terminis istis

$$\frac{(a+\alpha)(a+b)(a+c)\,\text{etc.}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)\,\text{etc.}}\, l\,\frac{x+\alpha}{\alpha} + \frac{(\beta+a)(\beta+b)(\beta+c)\,\text{etc.}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)\,\text{etc.}}\, l\,\frac{x+\beta}{\beta}$$

posita. Ad eorum verum valorem inveniendum pono $\beta = \alpha + d\alpha$, $d\alpha$ vero denotat quantitatem infinite parvam, tantumdem ergo est ac si posuissem $\beta = \alpha$. Brevitatis gratia scribo P loco $\frac{(\alpha+a)(\alpha+b)(\alpha+c)\,\text{etc.}}{(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)\,\text{etc.}}$. Sumo deinde hujus fractionis differentiale, posito tantum α variabili, sit illud $Qd\alpha$. Manifestum est fore $\frac{(\beta+a)(\beta+b)(\beta+c)\,\text{etc.}}{(\gamma-\beta)(\delta-\beta)\,\text{etc.}} = P + Qd\alpha$. Est vero etiam $\beta - \alpha = d\alpha$ et $\alpha - \beta = -d\alpha$ et $l\frac{x+\beta}{\beta} = l\frac{x+\alpha+d\alpha}{\alpha+d\alpha} = l\frac{x+\alpha}{\alpha} - \frac{x\,d\alpha}{\alpha(\alpha+x)}$. His substitutis, duo illi termini abibunt in $\frac{P}{d\alpha}\, l\frac{x+\alpha}{\alpha} - \frac{P}{d\alpha}\, l\frac{x+\alpha}{\alpha} + \frac{Px}{\alpha(\alpha+x)} - Q\,l\frac{x+\alpha}{\alpha} + \frac{Qx\,d\alpha}{\alpha(\alpha+x)}$. Horum duo priores termini sese tollunt, et postremus prae reliquis evanescit, ita ut pro valore duorum terminorum quaesito habeamus $\frac{Px}{\alpha(\alpha+x)} - Q\,l\frac{x+\alpha}{\alpha}$, qui in integrali eorum loco substitui debet. Est vero, ut posui, $P = \frac{(a+\alpha)(\alpha+b)(\alpha+c)\,\text{etc.}}{(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)\,\text{etc.}}$, atque ex hoc erit

$$Q = \frac{(a+\alpha)(\alpha+b)(\alpha+c)\,\text{etc.}}{(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)\,\text{etc.}}\left(\frac{1}{a+\alpha} + \frac{1}{\alpha+b} + \frac{1}{\alpha+c} + \text{etc.} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\gamma-\alpha} + \frac{1}{\delta-\alpha} + \text{etc.}\right).$$

Notandum hic est in casu $\beta = \alpha$ non totam quantitatem esse transcendentalem, sed partem ejus esse algebraicam, cum tamen universaliter ambo termini sint transcendentes. Si jam ulterius fuerit $\gamma = \alpha$, eodem modo terminorum infinitorum valor ponendo $\gamma = \alpha + d\alpha$ determinabitur.

De formula $\int (1 - x^{\frac{1}{n}})^p dx$ non dubito quin omnes integrabilitatis casus a Te, V. C., sint eruti. Sed de reductione

aequationis $(1-x^{\frac{1}{n}})^p dx = dy$ ad hanc $dz = (p+1)z\,dv + n(1-z)\,dv : v$ dubium habeo, cum posterior aequatio nunquam sit absolute integrabilis, siquidem adjectionem constantis non negligamus. Sumamus casum simplicissimum, quo $p=1$ et $n=1$, erit $dz - 2z\,dv + \frac{z\,dv}{v} = \frac{dv}{v}$. Multiplicetur haec per e^{lv-2v}, seu quod idem est, per $e^{-2v}v$ (e denotat hic numerum, cujus logarithmus hyperbolicus est $=1$), prodibit $e^{-2v}v\,dz - 2e^{-2v}z\,v\,dv + e^{-2v}z\,dv = e^{-2v}dv$, quae integrata dat $e^{-2v}vz = \text{Const.} - \frac{1}{2}e^{-2v}$ seu $2vz + 1 = a e^{2v}$, quae algebraica non est, nisi sit $a=0$, et propterea ea ad hanc $x - \frac{1}{2}xx = y + b$ substitutionibus algebraicis reduci non potest. Similis est ratio formulae generalis, haec enim nullo casu est integrabilis ad aequationem algebraicam, nisi constans addenda ponatur $=0$.

Casus nuper formulae Riccatianae separabiles considerans, sequentem universalem detexi substitutionem, qua aequatio $a\,dq = q^2dp - dp$ ad hanc formam $a\,dy = y^2dx - x^{-\frac{4n}{2n+1}}dx$ reduci potest. Ponatur $p = (2n+1)x^{\frac{1}{2n+1}}$ atque

$$q = -\frac{a}{p} + \cfrac{1}{-\frac{3a}{p} + \cfrac{1}{-\frac{5a}{p} + \cfrac{1}{-\frac{7a}{p} + \cfrac{1}{\text{etc. etc. etc.} \cfrac{1}{-\frac{2(n-1)a}{p} + \cfrac{1}{x^{\frac{2n}{2n+1}}y}}}}}}$$

Haec tantum valet substitutio si n est numerus affirmativus integer, peculiarem habeo si est negativus. Quoties in hac n est numerus integer affirmativus, toties haec fractionum series abrumpitur, et quid pro q substitui debet, facile determinatur. Reciproce etiam aequationem $a\,dy = y^2 dx - x^{\frac{-4n}{2n+1}}\,dx$ in hanc $a\,dq = q^2 dp - dp$ transformo hac substitutione $x = \left(\frac{p}{2n+1}\right)^{2n+1}$ et $y\,(p:2n+1)^{2n} = 1$

$$\cfrac{}{\cfrac{(2n-1)a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{(2n-3)a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{(2n-5)a}{p} + \cfrac{1}{\text{etc. etc. etc.} \atop \cfrac{3a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{a}{p} + q.}}}}}$$

Facile hic cognoscitur, si valores harum continuarum fractionum inveniri possent si n denotat numeros fractos, tum formulam $a\,dy = y^2 dx - x^m\,dx$ universaliter posse construi. Interpolatio vero ista nititur inventione termini generalis pro serie hujus proprietatis, si terminus x^{mus} fuerit A, ejus sequens B debet terminus $(x+2)^{\text{mus}}$ esse $= (2m+1)\,B + A$, vel in numeris hujus seriei: 1, 1, 4, 21, 151, 1380, etc.

Perpendi ulterius etiam formulam $2^n - 1$, quae non potest esse numerus primus nisi sit n numerus primus, et eos investigavi casus, quibus $2^n - 1$ non est numerus primus, quamvis fuerit n talis. Exceptiones istae sunt $n = 11$, $n = 23$, $n = 83$, reliqui numeri primi omnes centenario

minores, loco n positi, reddunt $2^n - 1$ primum*). Potest vero $2^{11} - 1$ dividi per 23, $2^{23} - 1$ per 47, et $2^{83} - 1$ per 167. Ratio hujus fundata est hoc theoremate non ineleganti: $2^n - 1$ semper potest dividi per $n + 1$, siquidem $n + 1$ fuerit numerus primus. Sic $2^{22} - 1$ dividi potest per 23. Saepe etiam $2^{\frac{n}{2}} - 1$, nec non $2^{\frac{n}{4}} - 1$ etc. per $n + 1$ dividi possunt, et ex hoc investigatio casuum, quibus $2^n - 1$ est numerus primus, non est difficilis. Vale atque fave Tibi obstrictissimo

Leonh. Eulero.

*) Euler oublie le nombre 37; dans la lettre 5ème, page 23, il fait observer lui-même que $2^{37} - 1$ est divisible par 223

LETTRE XVI.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Rectification d'une formule de la lettre 14

Moscuae d. $\frac{6}{17}$ Dec. 1731.

Ante omnia mihi emendanda est aequatio in superioribus litteris meis male descripta, scribendum enim erat, in quocunque casu numerorum p et n aequatio (A) $(1 - \nu)\,\nu dz = (n + p + 1)\,z\nu d\nu + n\,(1 - z)\,d\nu$ est integrabilis, eodem casu aequationem (B) $(1 - x^{\frac{1}{n}})^p dx = dy$ esse integrabilem, id quod instituto examine deprehendes.

Altera aequatio (C) $x^{\frac{\mp 4n}{\pm 2n + 1}}\,dx - y^2 dx = dy$ simili modo transmutatur in (D) $dz - \nu^2 dz \pm 2n\nu z^{-1} dz = d\nu$. Quomodo vero separatio variabilium in aequatione (C) vel (D) pendeat a termino generali seriei, cujus lex progressionis est $A + (2m + 1)\,B = C$, non video. De reliquis in posterum. Vale

Goldbach.

LETTRE XVII.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Recherches ultérieures sur la séparation et l'intégration de l'équation Riccati.

Domi d. 8 Januar 1782

Omnis aequatio ex tribus constans terminis facile reducitur ad hanc formam $x^m dx + ay^n dx + bdy = 0$, quae ista substitutione

$$x = v^{\frac{1}{mn+n-m}} z^{\frac{n-1}{mn+n-m}} \text{ et } y = v^{\frac{m+1}{mn+n-m}} z^{\frac{-1}{mn+n-m}}$$

transformatur in sequentem ordinis secundi aequationem $z^2 dv + (n-1) vz dz + avz dv + a(n-1) v^2 dz + b(m+1) z dv - bv dz = 0$. Si fuerit $n = 2$, habetur forma Riccatii

$$x^m dx + ay^2 dx + bdy = 0,$$

cui ista aequatio ordinis secundi respondet

$z^2 dv + vzdz + avzdv + av^2dz + b(m+1)zdv - bvdz = 0$, pro qua mihi difficilior videtur casuum separabilium investigatio, quam pro ipsa $x^m dx + ay^2 dx + bdy = 0$. Sit $n=1$, erit aequatio in quam haec $x^m dx + aydx + bdy = 0$ transformatur, ista $z^2 dv + avzdv + b(m+1)zdv - bvdz = 0$, in qua littera z unicam dimensionem habere censenda est.

Quod aequationis $ady = y^2 dx - x^{\frac{-4n}{2n+1}} dx$ ad hanc $adq = q^2 dp - dp$ reductio universalis, n denotante numerum quemcunque, pendeat ab inventione termini generalis hujus seriei $\overset{m}{A},\ \overset{m+1}{B},\ \overset{m+2}{(2m+1)B+A}$, sic ostendo: Reductio illa perficitur hac substitutione $x = \left(\frac{p}{2n+1}\right)^{2n+1}$ et

$$y\left(\frac{p}{2n+1}\right)^{2n} = \cfrac{1}{\cfrac{(2n-1)a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{(2n-3)a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{(2n-5)a}{p} + \cfrac{1}{\text{etc. usque ad } \cfrac{1}{\cfrac{1a}{p} + q}}}}}.$$

Formula ista continuarum fractionum dat, si $n = 1$, hunc valorem $\cfrac{1}{\frac{a}{p}+q}$ vel $\frac{1}{r+q}$, posito $r = \frac{a}{p}$. Si $n = 2$, prodit

$$\cfrac{1}{3r + \cfrac{1}{r+q}} = \frac{r+q}{3r^2+3rq+1}.$$ Si $n = 3$, fit

$$\cfrac{1}{5r + \cfrac{1}{3r + \cfrac{1}{r+q}}} = \cfrac{1}{5r + \cfrac{r+q}{3r^2+3rq+1}} = \frac{3r^2+3rq+1}{15r^3+15r^2q+6r+q}.$$

Ponatur, brevitatis gratia, $r+q = s$, seu $q = s - r$ et valores inventi formulae datae respondentes litterae n collocentur in seriem, prodibit

$$\begin{array}{lllll} n = 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \frac{1}{s}, & \frac{s}{3rs+1}, & \frac{3rs+1}{15r^2s+5r+s}, & \frac{15r^2s+5r+s}{105r^3s+35r^2+10rs+1}, & \text{etc.} \end{array}$$

in qua serie apparet cujusvis fractionis numeratorem esse praecedentis denominatorem. Atque si terminus ordine m sit $\frac{A}{B}$, fore sequentem indicis $m + 1 = \frac{B}{(2m+1)B+A}$. Ex his ergo manifestum est, quod in praecedentibus litteris commemoravi, ex termino generali hujus seriei

$$\overset{m}{A},\ \overset{m+1}{B},\ \overset{m+2}{(2m+1)B + A}$$

cognito haberi formulae Riccatianae separationem et integrationem universalem. In illa autem serie, ut sit determinata, oportet esse terminum primum $= 1$ et secundum $= s$. Cognitis igitur ex termino generali A et B factoque $n = m$, erit

$$x = \left(\frac{p}{2m+1}\right)^{2m+1} \text{ et } y\left(\frac{p}{2m+1}\right)^{2m} = \frac{A}{B},$$

qua substitutione aequatio $ady = y^2dx - x^{\frac{-4m}{2m+1}}dx$ reducitur ad hanc $adq = q^2dp - dp$, ideoque integrabitur ope logarithmorum universaliter. Aequatio vero
$ady = y^2dx - x^{\frac{-4m}{2m+1}}dx$ modo initio tradito reducitur ad hanc

$$z^2dv + vzdz - vzdv - v^2dz + a\left(\frac{-2m+1}{2m+1}\right)zdv - avdz = 0.$$

Haec ergo reducetur ad istam $adq = q^2dp - dp$, substitutione $v = \frac{Ap}{(2m+1)B}$ et $z = \frac{Bp}{(2m+1)A}$. Vale et fave, V. C., Tui observantissimo

Eulero.

LETTRE XVIII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Remarque sur les sommes des séries et les intégrales. Solution d'une équation du 5ème degré.

Moscuae $\frac{15}{26}$ Januar. 1732.

In superioribus litteris Tuis non animadverteram Te in formula $A, B, (2m + 1)B + A$ sumere m pro exponente terminorum qui competit termino A, quod ex postremis Tuis nuper ad me datis nunc satis intelligo videoque simili modo $\int(1 - y^{\frac{1}{n}})^p dy$ pendere a formula generali summarum seriei, cujus lex progressionis est $\Big((p + n + x) \div (n \pm x)\Big) A = B$, ubi per x intelligo exponentem qui termino A respondet, per $\div$ vero signum divisionis ambiguae, ita ut sumto ex signis $\pm$ superiore, $n + x$ sit denominator, sumto inferiore, $n - x$ fiat numerator; vel eandem integralem pendere a

termino generali summarum seriei, cujus lex progressionis est $\frac{-(n+x-1)(p-x+1)A}{x(n+x)}=B$; sed raro admodum contingere arbitror, ut ad terminum hujusmodi generalem expeditior quam ad ipsam integralem quaesitam via sit.

Casu aliquo nuper observavi ex aequationibus quintae potestatis, quae hanc formam habeat

$$x^5+\frac{5m}{2}x=$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\left(\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}-m^5\right)}\right)^{\frac{1}{5}}-\left(\frac{-p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}-m^5\right)}\right)^{\frac{1}{5}}+4p\right)}$$

quicunque numeri dentur pro m et p, radicem algebraicam erui posse, quod non contemnendum puto, quotiescunque numerus p in aequatione data $x^5+\frac{5m}{2}x=n$, per m et n facile determinari potest. Vale.

Goldbach.

LETTRE XIX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Solution des équations par approximation Méthodes de D Bernoulli et de Taylor.

Petropoli d. 31 Januar. 1732

Occasione aequationis ordinis quinti $x^5 + \frac{5m}{2}x = \frac{n}{2}$, cujus radicem Te assignare posse scribis, quoties est
$$n = \sqrt{\left[\left(\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - m^5\right)}\right)^{\frac{1}{5}} - \left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - m^5\right)}\right)^{\frac{1}{5}} + 4p\right]},$$
in qua vero determinatio litterae p etiam ab inventione radicis ex aequatione ordinis quinti pendet, non incongruum arbitror communicare, quae de radicibus aequationum proxime inveniendis observavi. Duos omnino modos ad hoc adhiberi solere perspexi, quorum primus est, quo in pluribus aequationis locis loco incognitae x ponitur quantitas non multum ab ea differens, et tum ipsa x quaeritur, deinde hic pro x inventus valor iterum in aliquot locis pro x scribatur, dennoque x quaeratur. Hujus operationis ope, quo saepius repetitur, eo propior habebitur quantitas ipsius x.

Ut in aequatione $x^2 = 3x + 20$ ponatur 6 loco x, ut prodeat haec aequatio $x = \frac{3x+20}{x} = 6\frac{1}{3}$, tum fiat $x = 6\frac{1}{3}$, fiet $x = 6\frac{3}{19}$, porroque eodem modo $x = 6\frac{29}{117}$, tandemque admodum exacte x reperietur. Generaliter etiam, si principio ponatur $x = a$, post unam operationem proveniet $x = 3 + \frac{20}{a}$, post duas $x = 3 + \cfrac{20}{3 + \frac{20}{a}}$, post tres

$x = 3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{3 + \frac{20}{a}}}$, atque post infinitas

$$x = 3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{\text{etc.}}}}}$$

Hujus igitur continuarum fractionum quantitatis valor cognoscitur, est nimirum $= \frac{3+\sqrt{89}}{2}$. Hujusmodi etiam est quantitas, quam ad formulam Riccatianam construendam dedi. Hoc etiam modo nititur methodus Cl. Bernoullii nostri, quam dedit ope serierum ut vocat recurrentium radices aequationum admodum prope inveniendi. Ita autem hinc eam derivo: Sit primo aequatio quadratica $x^2 = ax + b$, fiat ex ea $x = a + \frac{b}{x}$, in qua pono esse $x = \frac{q}{p}$ prope, hoc substituto $x = \frac{aq+bp}{q}$ propius, hocque etiam pro x posito habebitur $x = \frac{a^2q+abp+bq}{aq+bp}$ multo denuo propius etc. Ex his ipsius x valoribus formatur facile haec series

$$p,\ q,\ aq + bp,\ a^2q + abp + bq, \text{ etc.}$$

hanc habens proprietatem A, B, $aB + bA$, adeoque recurrens. Si igitur ejus quivis terminus per praecedentem divi-

ditur, quotus dabit valorem ipsi x eo propiorem, quo longius series continuatur. Idem quoque evenit etiamsi pro p et q numeri quicunque assumantur, quo vero magis $\frac{q}{p}$ ab x differt, eo longius series est continuanda Si fuerit proposita aequatio cubica $x^3 = ax^2 + bx + c$, mutetur ea in $x = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$. Ad hujus radicem inveniendam pro x assumendi sunt duo valores arbitrarii hujus formae $\frac{q}{p}$ et $\frac{p}{n}$, ex quibus igitur fiet $x^2 = \frac{q}{n}$, prodibit ergo $x = \frac{aq+bp+cn}{q}$. Hinc emergit ista series $n, p, q, aq + bp + cn$, etc. itidem recurrens, et cujus quivis terminus per antecedentem divisus dat x proxime. Simili modo ad aequationis

$$x = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3}$$

radicem inveniendam servit haec series

$$m, n, p, q, aq + bp + cn + dm, \text{ etc.}$$

Compendium hinc ingens nascitur ex eo, quod principio pro x non unus sed plures valores assumuntur, hocque efficitur ut tot sumendis potestatibus non sit opus, ideoque series facile possit continuari. Aliis forte etiam idoneis modis aequationes possunt disponi, et congrui pro x valores assumi ut series prodeat simplicior, ope cujus radix inveniri potest. Alter modus appropinquandi est maxime usitatus, atque in eo continetur, ut primo divinando ipsi x propinquus valor habeatur, tumque complementum ejus quam proxime investigetur. Hoc modo fit aequatio $x^2 = ax + b$, in qua notum sit esse $x = c$ prope. Ponatur ergo $x = c + z$, ubi z valde parvum erit respectu c, ita ut pro x^2 assumi possit $c^2 + 2cz$, erit ergo $c^2 + 2cz = ac + az + b$, adeoque $z = \frac{c^2 - ac - b}{a - 2c}$ et $x = \frac{c^2 + b}{2c - a}$. Si igitur jam pro c substitua-

tur $\frac{c^2+b}{2c-a}$, prodibit multo exactius

$$x = \frac{c^4+6bc^2+b^2-4abc+a^2b}{4c^3+4bc-6ac^2+4a^2c-2ab-a^3}$$

et ita porro. Hanc methodum vehementer amplificavit Cl. Taylor. Aequationem, in qua inest incognita x, reducere jubet ad nihilum, ut prodeat haec forma $X = 0$, ubi X denotat quantitatem quamcunque ex x et cognitis composita. Deinde assumit quantitatem ipsi x propinquam, quae sit z, eamque in X pro x substituit, prodibit ergo quantitas ex z et cognitis composita, quae sit $= y$, namque quia non est $z = x$, etiam haec quae prodit quantitas non esse potest $= 0$. Hoc facto sumantur differentialia positis y et z variabilibus, erit inquit $x = \frac{z\,dy - y\,dz}{dy}$ q. p. quae non solum pro aequationibus algebraicis, sed etiam transcendentibus valet. Ut sit $\sqrt[2]{(7x-xx)} - \sqrt[3]{(9+x^3)} = 0$, ponatur $x = z$; erit $\sqrt[2]{(7z-zz)} - \sqrt[3]{(9+z^3)} = y$, hincque

$$dy = \frac{7dz-2z\,dz}{2\sqrt[2]{(7z-zz)}} - \frac{zz\,dz}{\sqrt[3]{(9+z^3)^2}}$$

adeoque

$$x = z - \frac{2y\sqrt[2]{(7z-zz)}.\sqrt[3]{(9+z^3)^2}}{(7-2z)\sqrt[3]{(9+z^3)^2} - 2z^2\sqrt{(7z-zz)}};$$

ut ponatur $z = 1$, erit $y = \sqrt{6} - \sqrt[3]{10}$, adeoque

$$x = 1 - \frac{12\sqrt[3]{100}+20\sqrt{6}}{5\sqrt[3]{100}-2\sqrt{6}} = \frac{18\sqrt{6}-7\sqrt[3]{100}}{5\sqrt[3]{100}-2\sqrt{6}}.$$

Accuratius deinde idem pertractat dicitque fore $x = z + \nu$. At ν ex hac aequatione debet determinari

$$y + \frac{\nu\,dy}{1.dz} + \frac{\nu^2 ddy}{1.2.dz^2} + \frac{\nu^3 d^3y}{1.2.3.dz^3} + \text{etc.} = 0.$$

Si ex hac aequatione definiri potest ν accurate, etiam revera foret $x = z + \nu$. In secundis vero differentiationibus dz pro constante habetur. Inveni vero esse quam proxime

$$v = \frac{-y\,dz}{dy} \cdot \frac{\frac{-y^2 dz d^2 y}{1.2.dy^2} + \frac{y^3 dz d^3 y}{1.2.3.dy^3} - \frac{y^4 dz d^4 y}{1.2.3.4.dy^4} + \text{etc.}}{dy - \frac{y d^2 y}{1.dy} + \frac{y^2 d^3 y}{1.2.dy^2} - \frac{y^3 d^4 y}{1.2.3.dy^3} + \text{etc.}}.$$

Sit $x^3 - a = 0$, erit $z^3 - a = y$, et $dy = 3zzdz$, $ddy = 6zdz^2$ et $d^3 y = 6dz^3$ hinc habebitur

$$v = \frac{-y}{3z^2} \cdot \frac{-\frac{y^2}{3z^3} + \frac{y^3}{27z^6}}{3z^2 - \frac{2y}{z} + \frac{y^2}{3z^4}} = \frac{-3yz^2 + \frac{y^2}{2} - \frac{2y^3}{9z^4}}{9z^4 - 6yz + \frac{y^2}{z^2}}$$

atque

$$x = \frac{16z^9 + 51az^6 + 11a^2z^3 + 2a^3}{36z^8 + 36az^5 + 9a^2z^2}.$$

Nimis quidem est operosa haec methodus, si pluries eandem repetere volueris, ponendo iterum loco z, quod pro x jam erat inventum, sed forte etiam compendia poterunt excogitari, quae hanc aeque commodam reddunt, ac priorem methodum. Ad has autem operationes continuandas requiritur series hujus proprietatis $\overset{n}{x}$, $\overset{n+1}{P}$, $\overset{n+2}{X}$, ut X eodem modo determinetur in P, quo P determinatur in x. Nam pro hac aequatione $x^2 = ax + b$ sunt ipsius x valores successive inventi hi

c. $\frac{c^2+b}{2c-a}$, $\frac{c^4 - 6bc^2 + b^2 - 4abc + a^2 b}{4c^3 + 4bc - 6ac^2 + 4a^2c - 2ab - a^3}$, etc. $\cdots A$, $\frac{A^2+b}{2A-a}$.

Inveni autem quomodocunque P detur in x fore

$$X = P + \frac{(P-x)dP}{1.dx} + \frac{(P-x)^2 ddP}{1.2.dx^2} + \frac{(P-x)^3 d^3 P}{1.2.3.dx^3} + \text{etc.}$$

Hujusmodi aequatio etiam dari potest pro curva cujus abscissae si fuerint 1, 2, 3, 4, etc. respondentes applicatae sunt 1, 2, 6, 24, 120, etc., scilicet in aequatione pro ea inerunt differentialia omnium graduum. Vale et fave, V. C. Tui observantissimo

L. Eulero.

LETTRE XX.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Probleme de la géométrie des courbes.

(Plié en forme de lettre, mais sans suscription, signature et date).

Problema. (Fig. 4.) Si ex curva AMB curva Amb ita formetur, ut recta MAm per punctum fixum A ducta perpetuo capiatur ejusdem longitudinis; invenire casus, quibus hae duae curvae prodeunt inter se similes et aequales, ad axes AB, Ab inter se normales relatae.

Solutio. Posita longitudine constante $Mm = Dd = AB = 2a$, sit $AP = x$, $PM = y$, atque sumta nova variabili z, sit Q talis functio ipsius z, quae posita z negativa, abeat in sui ipsius negativam, cujusmodi sunt mz, $mz^3 + nz$, etc. Sequenti modo per z coordinatae x et y determinabuntur:

$$x = \frac{(a+z)\sqrt{aa+zz+2Q}}{\sqrt{2(aa+zz)}}\,;\quad y = \frac{(a+z)\sqrt{(aa+zz-2Q)}}{\sqrt{2(aa+zz)}}.$$

Eliminandis ergo z et Q, infinitae prodibunt aequationes inter x et y, ac proinde innumerabiles curvae AMB problemati satisfacientes $Q. E. I.$

Corollarium 1. Erit ergo $\sqrt{(xx+yy)}=a+z$. Atque $x:y=\sqrt{(aa+zz+2Q)}:\sqrt{(aa+zz-2Q)}$.

Corollarium 2. Sumta $AC=\frac{a}{\sqrt{2}}$, fiet $CD=\frac{a}{\sqrt{2}}$ atque $AD=a$, punctoque D in altera curva sui homologum d respondebit in generatione.

Exemplum. Sit $Q=naz$, erit

$$xx:yy=aa+2naz+zz:aa-2naz+zz,$$

seu

$$xx\begin{pmatrix}2aa+xx+yy-2a\sqrt{(xx+yy)}\\ +2naa \qquad -2na\sqrt{(xx+yy)}\end{pmatrix}=$$

$$yy\begin{pmatrix}2aa+xx+yy-2a\sqrt{(xx+yy)}\\ -2naa \qquad +2na\sqrt{(xx+yy)}\end{pmatrix},$$

$$2a((n+1)xx+(n-1)yy)\sqrt{(xx+yy)}=$$

$$2aa((n+1)xx+(n-1)yy)+x^4-y^4,$$

unde sequens oritur aequatio pro curva satisfaciente

$$x^8-2x^4y^4+y^8-4na^2((n+1)x^2+(n-1)y^2)(xx+yy)^2+$$

$$4a^4((n+1)x^2+(n-1)y^2)^2=0,$$

quae jam innumerabiles praebet curvas quaesitas.

LETTRE XXI.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Démonstration d'un théorème de géométrie.

Petropoli d. 12 Octobr. 1755.

Hesterni Tui theorematis praeterita nocte hanc demonstrationem imaginatus sum, quam mane veram deprehendi. Dato (Fig. 5.) rectangulo quocunque ADC, ducatur indefinita AF perpendicularis ipsi AC, ex qua abscindatur $AB = AD$. Si ex puncto C ducatur quaevis $CE = CD$ et ex E erigatur perpendicularis occurrens ipsi AF in F, dico esse $EF = BF$. Sit $AB = AD = a$, $CD = CE = b$, $AC = \sqrt{(a^2 + b^2)} = f$, $AF = e$, $AI = x$. Erit

$AF:AI::CE:EI = \frac{bx}{e}$; $AF:FI::CE:CI = \frac{b\sqrt{(e^2+x^2)}}{e} = f - x$,

ergo $x = \frac{e^2 f \pm e\sqrt{(e^2 f^2 + (b^2 - f^2)(e^2 - b^2))}}{e^2 - b^2}$; ergo $FE = FI + IE =$

$\sqrt{(e^2 + x^2)} + \frac{bx}{e} = \sqrt{(a^2 + e^2)} = FB$.

Ex quo patet, cum puncta E et F sint arbitraria, circulum quemcunque ductum radio FE ad angulos rectos secari per circulum ductum radio CE.

Goldbach.

LETTRE XXII.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Solution d'un problème de géométrie

. . . d. Febr. 1736.

Problema mecum communicatum: Datis in quadrilatero (Fig. 6.) $ABCD$ omnibus lateribus et altera diagonali AC, invenire alteram diagonalem BD, sic solvi posse puto: Sit $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $BD = y$. Quoniam data diagonali alterutra datur etiam area quadrilateri, quem pono $= \frac{e}{4}$,

erit $\left(-(a^2 - b^2)^2 + 2(a^2 + b^2)y^2 - y^4\right)^{\frac{1}{2}} +$
$$\left(-(c^2 - d^2)^2 + 2(c^2 + d^2)y^2 - y^4\right)^{\frac{1}{2}} = e.$$

Unde positis $-(a^2 - b^2)^2 = \alpha$, $+2(a^2 + b^2) = \beta$, $-(c^2 - d^2)^2 = \gamma$, $+2(c^2 + d^2) = \delta$ et

$$\frac{2c^2\delta-(\alpha-\gamma-c^2)(\beta-\delta)}{(\beta-\delta)^2+4c^2}=\pi, \quad \frac{4c^2\gamma-(\alpha-\gamma-c^2)^2}{(\beta-\delta)^2+4c^2}=\varepsilon$$

pervenitur ad duplicem valorem $y=(\pi\pm\sqrt{(\pi^2+\varepsilon)})^{\frac{1}{2}}$, altero diagonalem datam AC, altero quaesitam BD exprimente.

Aliter: Quoniam datis quatuor lateribus et diagonali AC dantur etiam perpendiculares ad diagonalem $BE=f$, $DF=g$ et intercepta $FE=h$, erit diagonalis quaesita

$$BD=\sqrt{((f+g)^2+h^2)}.$$

Goldbach.

LETTRE XXIII.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Recherches de géométrie analytique.

Petropoli die 23 Julii A. 1737.

Cum in hesternam formulam, quam mecum communicare voluisti, diligentius essem meditatus, incidi in sequentes expressiones non solum satis generales, sed etiam perquam commodas, ex quibus omnes Tuae formulae, V. C., expedite derivari queant. Posita scilicet abscissa communi $= x$, sint utriusque curvae applicatarum elementa

$$dx\,(\sqrt{RS} \pm \sqrt{(R+1)(S-1)})$$

unde ipsarum curvarum elementa erunt

$$dx\,(\sqrt{(R+1)S} \pm \sqrt{R(S-1)}).$$

Quo igitur utraque curva fiat algebraica pro R et S, tales ipsius x accipiendae erunt functiones, ut tam $dx\sqrt{RS}$ quam

$dx\,\sqrt{(R+1)(S-1)}$ integrationem admittant. Deinde ut arcuum summa algebraica exprimi queat, hanc quoque formulam $dx\sqrt{(R+1)S}$ oportet esse integrabilem. Hoc autem pluribus modis facile praestabitur, sumendis pro R et S talibus functionibus ut RS, $(R+1)(S-1)$ et $S(R+1)$ fiant quantitates vel ex duobus vel ex uno termino constantes, quippe in quibus exponentes ita accipere licet ut quaesito satisfiat.

I. Sit $R=ax^m$ et $S=\frac{1}{ax^m}$, fient

elementa applicatarum $=dx\left(1\pm\sqrt{\left(\frac{1}{ax^m}-ax^m\right)}\right)$

elementa curvarum..... $=dx\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{ax^m}\right)}\pm\sqrt{(1-ax^m)}\right)$

atque debebit esse $m=\frac{-1}{4i+1}$, denotante i numerum quemcunque affirmativum integrum.

II. Sit $R=ax^m-1$ et $S=bx^n$, fient

elementa applicatarum

$$=dx\left(\sqrt{(abx^{m+n}-bx^n)}\pm\sqrt{(abx^{m+n}-ax^m)}\right)$$

et curvarum elementa

$$=dx\left(x^{\frac{m+n}{2}}\sqrt{ab}\pm\sqrt{(ax^m-1)(bx^n-1)}\right).$$

Quo autem tam utraque applicata, quam summa arcuum fiat algebraica, vel esse debet $m=\frac{4i+2}{4ik-1}$ et $n=\frac{4k+2}{4ik-1}$, vel etiam $m=\frac{-2i}{2ik+i+k}$ atque $n=\frac{-2k}{2ik+i+k}$, existentibus i, k numeris integris affirmativis.

III. Sit $R=\frac{ab}{c}x^m-\frac{abb}{cc}$ et $S=\frac{c}{b}x^m+1$, fient

applicatarum elementa

$$=dx\left(\sqrt{x^m\left(\frac{c}{b}-\frac{ab}{c}+ax^m\right)}\pm\sqrt{\left(ax^{2m}-\frac{abb}{cc}\right)}\right)$$

atque curvarum elementa

$$= dx\left(\sqrt{x^m}\left(ax^m - \frac{ab}{c}\right) \pm \sqrt{(b + cx^m)}\left(\frac{1}{b} - \frac{ab}{cc} + \frac{a}{c}x^m\right)\right)$$

sumaturque $m = \frac{-1}{2i+1}$.

IV. Sit $R = a^2x^{2m} + 2ax^m$ et $S = bx^m$, erunt applicatarum elementa

$$= dx\left(x^m\sqrt{(a^2bx^m + 2ab)} \pm (ax^m + 1)\sqrt{(bx^m - 1)}\right)$$

et curvarum elementa

$$= dx\left(bx^m(ax^m + 1) \pm \sqrt{x^m}(a^2x^m + 2a)(bx^m - 1)\right)$$

eritque vel $m = \frac{1}{i}$ vel $m = \frac{-2}{2i+3}$.

Hujusmodi autem formulae plures aliae hinc possunt derivari per idoneos valores loco R et S substituendos. Vale et favere perge, V. C., Tui observantissimo

L. Eulero.



LETTRE XXIV.

═

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Annonce la découverte du terme général d'une série particulière.

... d. 11 Oct 1738.

Inveni ego hodie mane formulam generalem in infinitum excurrentem (sed quae abrumpatur quotiescunque exponens terminorum est integer affirmativus) pro serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{30} - 0 + \frac{1}{42} + 0 \text{ etc.}$$

quae formula, si Tibi, Vir Celeberrime, jam nota est, ego inventoris secundi laude contentus ero, sin minus, formulam ipsam libenter Tecum communicabo.

C. G.

LETTRE XXV.

Goldbach à Euler

Sommaire. Théorème d'analyse

(Petrop.) d. 7 Nov. 1759

Ex inventis Tuis demonstrari potest in summa seriei

$$\frac{1}{1^n}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{8^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{10^n}-\frac{1}{11^n}-$$
$$\frac{1}{12^n}-\frac{1}{13^n}+\frac{1}{14^n}+\frac{1}{15^n}+\frac{1}{16^n}-\frac{1}{17^n}-\frac{1}{18^n}-\frac{1}{19^n}-\frac{1}{20^n}+\frac{1}{21^n}+$$
etc.

quam continuare possum quousque libuerit, si ponatur $=\alpha\pi^n$, numerum α esse rationalem et assignabilem, si n sit numerus affirmativus par; et in casu $n=1$, totam seriem fieri $=0$. Goldbach.

P. S. Ut sciri possit an terminus quicunque datus $\frac{1}{x^n}$ exigat signum $+$ an signum $-$? dico, si x est numerus primus, locum habere signum $-$; si x productum ex duobus primis, locum habere signum $+$: si x productum ex tribus primis, locum habere signum $-$, et ita porro. V. gr. $\frac{1}{18^n}$ exigit signum $-$ quia producitur ex tribus $2.3.3$; $\frac{1}{24^n}$ exigit signum $+$ quia producitur ex quatuor $2.2.2.3$ et ita porro.

LETTRE XXVI.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Considérations sur le théorème précédent.

12 Nov. 1739 st. v.

Si habeatur series quaecunque a, b, c, d, e, etc. atque ponatur

$$P = a + b + c + d + e + \text{etc.}$$
$$Q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \text{etc.}$$
$$R = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + \text{etc.}$$
$$S = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

ac praeterea ex terminis a, b, c, d, etc. formentur

1. facta ex singulis, quorum summa sit $A = P$,
2. facta ex binis, quorum summa sit $= B$,
3. facta ex ternis, quorum summa sit $= C$,
4. facta ex quaternis, quorum summa sit $= D$,

etc.

His positis, si numerus, cujus logarithmus est $= 1$, denotetur littera e (quae ne confundatur cum termino e) erit

$$1 + A + B + C + D + \text{etc.} = e^{P + \frac{1}{2}Q + \frac{1}{3}R + \frac{1}{4}S + \text{etc.}}$$

sumendis vero terminis alternis, erit

$$1 + B + D + F + H + \text{etc.} = \frac{e^{P + \frac{1}{2}Q + \frac{1}{3}R + \frac{1}{4}S + \text{etc.}} + e^{-P + \frac{1}{2}Q - \frac{1}{3}R + \frac{1}{4}S - \text{etc.}}}{2}$$

atque

$$A + C + E + G + I + \text{etc.} = \frac{e^{P + \frac{1}{2}Q + \frac{1}{3}R + \frac{1}{4}S + \text{etc.}} - e^{-P + \frac{1}{2}Q - \frac{1}{3}R + \frac{1}{4}S - \text{etc.}}}{2}$$

Quod si nunc pro serie $a + b + c + d + \text{etc.}$ capiatur series potestatis cujuscunque numerorum primorum, ita ut sit

$$P = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \text{etc.}$$

$$Q = \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{11^{2n}} + \text{etc.}$$

$$R = \frac{1}{2^{3n}} + \frac{1}{3^{3n}} + \frac{1}{5^{3n}} + \frac{1}{7^{3n}} + \frac{1}{11^{3n}} + \text{etc.}$$

$$S = \frac{1}{2^{4n}} + \frac{1}{3^{4n}} + \frac{1}{5^{4n}} + \frac{1}{7^{4n}} + \frac{1}{11^{4n}} + \text{etc.}$$

etc.

erit A ipsa series numerorum primorum P, B series factorum ex binis, C series factorum ex ternis et ita porro; unde fiet $1 + A + B + C + D + \text{etc.}$ series omnium numerorum puta

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \text{etc.} = \alpha\pi^n.$$

Quam ob rem erit

$$e^{P + \frac{1}{2}Q + \frac{1}{3}R + \frac{1}{4}S + \text{etc.}} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.} = \alpha\pi^n$$

simili vero modo erit

$$e^{Q+\frac{1}{2}S+\frac{1}{3}V+\frac{1}{4}X+\text{etc.}} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \text{etc.} = \beta\pi^{2n}$$

quae expressio per illam divisa dabit

$$e^{-P+\frac{1}{2}Q-\frac{1}{3}R+\frac{1}{4}S-\frac{1}{5}T+\frac{1}{6}V-\text{etc.}} = \frac{\beta\pi^n}{\alpha}$$

unde demonstrare potest egregia illa series

$$1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} - \text{etc.}$$

cujus summam Tu, V. C., demonstrasti esse $= \frac{\beta\pi^n}{\alpha}$.

His praemissis cum sit A series ipsorum numerorum primorum, B series factorum ex binis primis, C ex ternis et ita porro; scilicet

$$A = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \text{etc.}$$

$$B = \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{14^n} + \text{etc.}$$

$$C = \frac{1}{8^n} + \frac{1}{12^n} + \frac{1}{18^n} + \frac{1}{20^n} + \frac{1}{27^n} + \text{etc.}$$

$$D = \frac{1}{16^n} + \frac{1}{24^n} + \frac{1}{36^n} + \frac{1}{40^n} + \frac{1}{54^n} + \text{etc.}$$

$$E = \frac{1}{32^n} + \frac{1}{48^n} + \frac{1}{72^n} + \frac{1}{80^n} + \frac{1}{108^n} + \text{etc.}$$

etc.

sequitur fore $1 + A + B + C + D + \text{etc.} =$

$$e^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\text{etc.}} = \alpha\pi^n$$

$1 + B + D + F + \text{etc.} =$

$$\frac{e^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\text{etc.}} + e^{-P+\frac{1}{2}Q-\frac{1}{3}R+\text{etc.}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\beta}{\alpha}\right)\pi^n$$

$A + C + E + G + \text{etc.} =$

$$\frac{e^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\text{etc.}} - e^{-P+\frac{1}{2}Q-\frac{1}{3}R+\text{etc.}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{\beta}{\alpha}\right)\pi^n$$

hincque $1 - A + B - C + D - E + F - G + \text{etc.} = \frac{\beta}{a} \pi''$, quae est ipsa series a Te, V. C., primum inventa. Denique ex his constat fore summam seriei $1 + B + D + F + \text{etc.}$ in qua insunt producta ex numero pari numerorum primorum, ad summam seriei $A + C + E + G + \text{etc.}$, quae continet numeros primos ipsos et producta ex numero impari eorum, uti est $\alpha^2 + \beta$ ad $\alpha^2 - \beta$, quae est proportio, quam hodie mihi inveniendam proposuisti. Vale, V. C., mihique favere perge.

Euler.

LETTRE XXVII.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Même sujet. Réponse à la lettre précédente.

(Petrop.) d. 24 Nov. 1739

Gratissima mihi fuerunt quae heri scripsisti; mea solutio haec est: Sit

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.} = \alpha \pi^n$$

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \text{etc.} = \beta \pi^{2n}$$

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{8^n} + \frac{1}{11^n} + \text{etc.} = M,$$

cujus denominatores, posita n 1, sunt producta primorum numero imparium

$$1 + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{10^n} + \text{etc.} = N,$$

cujus denominatores, posita $n = 1$, sunt producta primorum numero parium.

erit $\alpha\pi^n + \frac{\beta\pi^n}{\alpha} = 2M$, $\alpha\pi^n - \frac{\beta\pi^n}{\alpha} = 2N$. Sed nescio, an methodus Tua valeat ad determinandam v. gr. rationem inter terminos affirmativos et negativos hujus seriei

$$\frac{1}{4^n} - \frac{1}{8^n} + \frac{1}{9^n} - \frac{1}{12^n} + \frac{1}{16^n} - \frac{1}{18^n} - \frac{1}{20^n} + \text{etc.}$$

cujus denominatores, posita $n = 1$, sunt omnes potestates numerorum et omnia earum multipla; termini notati signo $+$ continent denominatores productos ex primis numero paribus, termini notati signo —, ex imparibus, quam rationem tamen eruere potero si operae pretium visum fuerit.

Sed multo magis Tibi, opinor, placebit quod heri inveni: Sit $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.} = \alpha\pi^n$, $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \text{etc.} = P$ (cujus seriei denominatores continent omnes numeros primos) erit

$$\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{11^{2n}} + \text{etc.} = (P-1)^2 + 1 - \frac{2}{\alpha\pi^n},$$

modo sit $n > 1$. Vale et fave —

Goldbach.

Note marginale d'Euler.

$$A = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{8^n} + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{A} = 1 + \frac{\alpha}{2^n} + \frac{\beta}{3^n} + \frac{\gamma}{4^n} + \frac{\delta}{5^n} + \frac{\varepsilon}{6^n} + \frac{\zeta}{7^n} + \frac{\eta}{8^n} + \text{etc.}$$

$\frac{\mu}{p^n}$ terminus generalis.

Si p est numerus primus erit $\quad -\frac{1}{p^n}$

is p prod. ex duobus numeris primis inaequalibus: $\quad +\frac{1}{p^n}$

prod. ex duobus numeris primis aequalibus: $\quad +\frac{0}{p^n}$

si p prod. ex tribus inaequalibus	abc erit	$-\frac{1}{p^n}$
	aab	$+\frac{0}{p^n}$
	aaa	$+\frac{0}{p^n}$
si p prod. ex quatuor inaequalibus	$abcd$	$+\frac{1}{p^n}$
	$aabc$	$+\frac{0}{p^n}$
	$aabb$	$+\frac{0}{p^n}$
	a^3b	$+\frac{0}{p^n}$

LETTRE XXVIII.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Suite des recherches précédentes.

---

d. 26 Novembr. 1739.

Considerans rationem, quae intercedit inter summam seriei $\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} +$ etc. et hanc expressionem

$$(P-1)^2 + 1 - \frac{2}{a\pi^n},$$

deprehendi seriem aliquanto esse minorem ac fore

$$(P-1)^2 + 1 - \frac{2}{a\pi^n} = \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \text{etc.}$$

+ 2 . summa factorum ex ternis
— 2 . summa factorum ex quaternis
+ 2 . summa factorum ex quinis
— etc.

} terminis inaequalibus

seriei $\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+$ etc. Quod si autem duplices istae factorum ex ternis, quaternis etc. summae, quippe quae per inventa Tua habentur, substituantur, prodit aequatio identica; quod idem non dubito, quin interim ipse observaveris, V. C.

Incidi heri in hanc seriem non parum curiosam

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{2}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{2}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{3}{8^n}+\frac{2}{9^n}+\frac{2}{10^n}+\frac{1}{11^n}+\frac{4}{12^n}+$$
etc.

cujus numeratores indicant, quot modis denominatores respondentes sint hujus seriei $2^n+3^n+4^n+5^n+$ etc., vel termini ipsi, vel producta ex binis, vel ternis, vel quaternis, vel ita porro. Sic denominator 60^n numeratorem habebit 11, quia 60 his undecim modis componitur:

I. 60.	V. 5. 12.	IX. 2. 5. 6.
II. 2. 30.	VI. 6. 10.	X. 3. 4. 5.
III. 3. 20.	VII. 2. 2. 15.	XI. 2. 2. 3. 5.
IV. 4. 15.	VIII. 2. 3. 10.	

Hujus seriei summam casu, quo $n=2$, inveni esse $=2$; atque initio arbitratus sum, etiam reliquis casibus summam rationaliter exhiberi posse. Verum rem diligentius scrutatus inveni casu $n=4$ summam fore $=\frac{8e^\pi\pi}{e^{2\pi}-1}=\frac{8\pi}{e^\pi-e^{-\pi}}$, ubi est proxime $e^\pi=23{,}1407$.

Deinde omnia fere theoremata, quae de seriebus numerorum primorum aliisque hinc natis protulisti, V. C., multo latius patere observavi. Si enim sit

$$A=\alpha=a+b+c+d+\text{ etc.}$$

$B=$ summae factorum ex binis
$C=$ „ „ ex ternis
$D=$ „ „ ex quaternis
etc.

} terminis seriei A, terminis aequalibus non exceptis,

itemque

$\beta =$ summae factorum ex binis
$\gamma =$ „ „ ex ternis
$\delta =$ „ „ ex quaternis
etc.
} terminis inaequalibus seriei A vel α.

fueritque

$$\left.\begin{array}{l} 1+A+B+C+D+E+\text{etc.}=s \\ 1-A+B-C+D-E+\text{etc.}=t \end{array}\right\} \text{erit} \left\{\begin{array}{l} 1+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc.}=\frac{1}{t} \\ 1-\alpha+\beta-\gamma+\delta-\text{etc.}=\frac{1}{s} \end{array}\right.$$

hincque

$$1+B+D+F+\text{etc.}=\frac{s+t}{2} \qquad 1+\beta+\delta+\zeta+\text{etc.}=\frac{s+t}{2st}$$

$$A+C+E+G+\text{etc.}=\frac{s-t}{2} \qquad \alpha+\gamma+\varepsilon+\eta+\text{etc.}=\frac{s-t}{2st}$$

item

$$(B-\beta)+(C-\gamma)+(D-\delta)+\text{etc.}=s-\frac{1}{t}$$

$$(B-\beta)-(C-\gamma)+(D-\delta)-\text{etc.}=t-\frac{1}{s}$$

$$(C-\gamma)+(E-\varepsilon)+\text{etc.}=\frac{1}{2}(s-t)\left(1-\frac{1}{st}\right)$$

$$(B-\beta)+(D-\delta)+\text{etc.}=\frac{1}{2}(s+t)\left(1-\frac{1}{st}\right)$$

Quod si autem loco terminorum a, b, c, d, etc. sumantur eorum quadrata sitque $A''=\alpha''=a^2+b^2+c^2+d^2+$ etc., hincque series B'', C'', D'', etc., itemque $\beta'', \gamma'', \delta''$, etc. simili modo formentur, quo supra B, C, D, etc. β, γ, δ, etc., ex serie $A=\alpha$ fiet:

$$1+A''+B''+C''+D''+\text{etc.}=st$$

et

$$1-\alpha''+\beta''-\gamma''+\delta''-\text{etc.}=\frac{1}{st}$$

unde erit generaliter

$$1 - A + B - C + D - \text{etc.} = \frac{1 + A'' + B'' + C'' + D'' + \text{etc.}}{1 + A + B + C + D + \text{etc.}}$$

atque

$$(1 + \alpha + \beta + \gamma + \text{etc.})\,(1 - \alpha + \beta - \gamma + \text{etc.}) =$$
$$1 - \alpha'' + \beta'' - \gamma'' + \delta'' - \text{etc.}$$

Ex his nunc, si pro serie $a + b + c + d + \text{etc.}$ substituatur haec $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \text{etc.}$ secundum numeros primos procedens, sequentur omnia omnino theoremata, quae mecum communicare voluisti. Vale, V. C., ac favere perge Tui observantissimo

L. Eulero.



LETTRE XXIX.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Application du calcul intégral à la sommation des series

(Sans date.)

Seriei, cujus terminus generalis est $\frac{1}{64x^2-64x+15}$, vel $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8x-5}-\frac{1}{8x-3}\right)$ summa est $=\frac{1}{2}\int\frac{(zz-z^4)dz}{1-z^8} = \frac{1}{2}\int\frac{zzdz}{(1+zz)(1+z^4)} = -\frac{1}{4}\int\frac{dz}{1+zz}+\frac{1}{4}\int\frac{(1+zz)dz}{1+z^4}$, si post integrationem ponatur $z=1$. At seriei, cujus terminus generalis est $=\frac{3m}{64xx-64x+7}=\frac{m}{2}\left(\frac{1}{8x-7}-\frac{1}{8x-1}\right)$, summa est $=\frac{m}{2}\int\frac{(1-z^6)dz}{1-z^8}=\frac{m}{2}\int\frac{(1+zz+z^4)dz}{(1+zz)(1+z^4)}=\frac{m}{4}\int\frac{dz}{1+zz}+\frac{m}{4}\int\frac{(1+zz)dz}{1+z^4}$, posito post integrationem $z=1$. Verum est $\int\frac{dz}{1+zz}=\frac{\pi}{4}$; $\int\frac{dz}{1+z^4}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\,l(1+\sqrt{2})$ et

$$\int \frac{zzdz}{1+z^4} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} l(1+\sqrt{2}).$$

Quare si a serie, cujus terminus generalis est $\frac{1}{(8x-5)(8x-3)}$, subtrahatur series, cujus terminus generalis $\frac{3m}{(8x-7)(8x-1)}$, seriei resultantis summa erit $= -\frac{(1+m)\pi}{16} + \frac{(1-m)\pi}{8\sqrt{2}}$. Vel seriei, cujus terminus generalis est $=$

$$\frac{3m}{64xx-64x+7} - \frac{1}{64xx-64x+15},$$

summa est $= \frac{(m+1)\pi}{16} + \frac{(m-1)\pi}{8\sqrt{2}}$. Quare si $m=1$, summa erit $= \frac{\pi}{8}$; at ut summa sit $=0$, oportet esse

$$m+1+m\sqrt{2}-\sqrt{2}=0,$$

seu $m = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

II. Si in serie $\frac{1}{x(2x-1)(4x-1)}$ summa terminorum parium ab imparibus subtrahatur, prodit series

$$\frac{1}{1.1.3} - \frac{1}{2.3.7} + \frac{1}{3.5.11} - \frac{1}{4.7.15} + \text{etc.},$$

quae resolvitur in has tres:

$$+1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \text{etc.} = \int \frac{dz}{1+z}$$

$$+\frac{2}{1} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \frac{2}{9} - \frac{2}{11} + \text{etc.} = \int \frac{2dz}{1+zz}$$

$$-\frac{8}{3} + \frac{8}{7} - \frac{8}{11} + \frac{8}{15} - \frac{8}{19} + \frac{8}{23} - \text{etc.} = -\int \frac{8zzdz}{1+z^4}$$

et summa omnium est $= l2 + \frac{\pi}{2} - \pi\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2}} l(1+\sqrt{2})$, unde non video quomodo summa possit esse $= \pi - 4l2$. Sin autem res ita se haberet, foret $\pi = \frac{10l2 + 4\sqrt{2}l(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}+1}$.

III. Seriei $(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}) - (\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}) + \text{etc.}$

summa est $= \int \frac{dz(1-z+zz-z^3)}{1+z^4} =$

$$\int \frac{dz(1+zz)}{1+z^4} - \int \frac{zdz}{1+z^4} - \int \frac{z^3dz}{1+z^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} - \frac{l2}{4}.$$

IV. Si fuerit $\int d.\frac{xxdz}{dx} = \int \frac{dx}{1+x^3}$, erit utique

$$dz = \frac{dx}{xx}\int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{dx}{xx}(x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \text{etc.})$$

et

$$z = C + lx - \frac{x^3}{3.4} + \frac{x^6}{6.7} - \frac{x^9}{9.10} + \text{etc.}$$

Constans autem C, si z deberet simul cum x evanescere, foret infinita; sin autem C maneat indefinita, tum casu $x = 1$, quantitas z indefinitum, h. e. quemcunque valorem obtinebit.

V. Sinus ang. 18° est $= \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, et sin. ang. 54° est $= \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, unde erit $\frac{1}{\sin 18^0} - \frac{1}{\sin 54^0} = 2$, id quod etiam tabulae sinuum ostendunt; est enim $\frac{1}{\sin 18^0} =$ sec. 72° et $\frac{1}{\sin 54^0} =$ sec. 36°.

VI. Serierum sequentium summae sunt

$$(\frac{1}{8x-5} - \frac{1}{8x-3}) = \int \frac{dz(zz-z^4)}{1-z^8} = \int \frac{zzdz}{(1+zz)(1+z^4)}$$
$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{8}$$

$$(\frac{1}{8x-1} - \frac{1}{8x+1}) = \int \frac{dz(z^6-z^8)}{1-z^8} = \int \frac{z^6dz}{(1+zz)(1+z^4)}$$
$$= 1 - \int \frac{dz(1+zz+z^4)}{(1+zz)(1+z^4)} = 1 - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+zz} - \frac{1}{2}\int \frac{dz(1+zz)}{1+z^4}$$
$$= 1 - \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} = 1 - \frac{\pi(1+\sqrt{2})}{8}$$

$$\left(\frac{1}{6x-5} - \frac{1}{6x-2}\right) = \int \frac{dz(1-z^3)}{1-z^6} = \int \frac{dz}{1+z^3}$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{dz}{1+z} + \frac{1}{3}\int \frac{2dz - zdz}{1-z+zz}$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{dz}{1+z} - \frac{1}{6}\int \frac{2zdz - dz}{1-z+zz} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1-z+zz}$$
$$= \frac{l2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

VII. Seriei $1 - \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n-1}} -$ etc. jamdudum quoque conjectavi summam esse $= p(l2)^{2n-1}$, at casu $n = 2$ facile statim deprehendi valorem ipsius p nequidem rationaliter exhiberi posse.

Euler.

LETTRE XXX.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Théorèmes relatifs à la sommation des suites.

(Petrop.) d. 9 Dec. 1739.

Observavi heri denominatoribus 1, 1.2, 1.2.3, 1.2.3.4, etc. innumeris modis assignari posse numeratores algebraicos, ita ut series tota fiat summabilis, sic v. gr.

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{5}{1.2.3.4}+\frac{11}{1\ldots5}+\frac{19}{1\ldots6}+\frac{29}{1\ldots7}+\frac{41}{1\ldots8}+\frac{55}{1\ldots9}+\text{etc.}$$

$$\text{est} = \frac{2}{1.2.3}+\frac{3}{1.2.3.4}+\frac{4}{1.2.3.4.5}+\frac{5}{1\ldots6}+\frac{6}{1\ldots7}+\frac{7}{1\ldots8}+\frac{8}{1\ldots9}+\text{etc.}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{3}{1.2}-\frac{4}{1.2.3}+\frac{5}{1.2.3.4}-\frac{6}{1\ldots5}+\frac{7}{1\ldots6}-\frac{8}{1\ldots7}+\frac{9}{1\ldots8}-\frac{10}{1\ldots9}+\text{etc.}=1,$$

quae quidem facile demonstrari possunt; sed ex eodem fonte alia multo abstrusiora derivantur, ut si haec series

$$\frac{a+1}{n}+\frac{2a+3}{1.2n^2}+\frac{3a+7}{1.2.3.n^3}+\frac{4a+13}{1.2.3.4n^4}+\text{etc.}$$

(cujus terminus generalis est $\frac{ax+x^2-x+1}{1.2.3...xn^x}$) fiat $=-1$, posito pro a numero quocunque, dico, ut aequationi satisfiat, sumendum esse $n=\frac{-a\pm\sqrt{(a^2-4)}}{2}$.

C. G.

LETTRE XXXI.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Même sujet. Réponse à la lettre précédente.

Petropoli d. 9 Decembr. 1739.

Omnes series, quae continentur in hac formula generali $\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}}{1.2.3.4 \ldots . x . n^x}$ summari possunt per quantitates exponentiales et algebraicas conjunctim. Quare si vel coëfficientes α, β, γ, δ, etc., vel numerus n ita determinetur, ut exponentialia evanescant, obtinebuntur omnes series hujus formae, quae summas algebraicas habere possunt. Quod ut clarius appareat, per partes progrediar

Seriei cujus terminus generalis est	Summa erit:
$\frac{\alpha}{1.2.3\ldots x.n^x}$	$e^{\frac{1}{n}}\alpha-\alpha$
$\frac{\beta x}{1.2.3\ldots x.n^x}$	$e^{\frac{1}{n}}\beta.\frac{1}{n}$
$\frac{\gamma x^2}{1.2.3\ldots x.n^x}$	$e^{\frac{1}{n}}\gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$
$\frac{\delta x^3}{1.2.3\ldots x.n^x}$	$e^{\frac{1}{n}}\delta\left(\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)$
$\frac{\varepsilon x^4}{1.2.3\ldots x.n^x}$	$e^{\frac{1}{n}}\varepsilon\left(\frac{1}{n}+\frac{7}{n^2}+\frac{6}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)$
$\frac{\zeta x^5}{1.2.3\ldots x.n^x}$	$e^{\frac{1}{n}}\zeta\left(\frac{1}{n}+\frac{15}{n^2}+\frac{25}{n^3}+\frac{10}{n^4}+\frac{1}{n^5}\right)$
$\frac{\eta x^6}{1.2.3\ldots x.n^x}$	$e^{\frac{1}{n}}\eta\left(\frac{1}{n}+\frac{31}{n^2}+\frac{90}{n^3}+\frac{65}{n^4}+\frac{15}{n^5}+\frac{1}{n^6}\right)$.

Lex, secundum quam hae summae progrediuntur, ita est comparata, ut termino generali $\frac{\psi x^{k+1}}{1.2.3\ldots x.n^x}$ respondeat summa haec

$$e^{\frac{1}{n}}\psi\left(\frac{1}{n}+\frac{2^k-1}{1.n^2}+\frac{3^k-2.2^k+1}{1.2.n^3}+\frac{4^k-3.3^k+3.2^k-1}{1.2.3.n^4}+\frac{5^k-4.4^k+6.3^k-4.2^k+1}{1.2.3.4.n^5}+\text{etc.}\right).$$

Ex his igitur perspicitur seriei, cujus terminus generalis est $\frac{\alpha}{1.2.3\ldots x.n^x}$, summam algebraicam omnino esse non posse. Sit ergo terminus generalis $=\frac{\alpha+\beta x}{1.2.3\ldots x.n^x}$, erit ejus summa $=e^{\frac{1}{n}}\left(\alpha+\frac{\beta}{n}\right)-\alpha$, unde summa toties erit algebraica, eaque $=-\alpha$, quoties fuerit $\alpha n+\beta=0$, seu $n=-\frac{\beta}{\alpha}$. Hicque continentur bini casus priores a Te, V. C., mihi perscripti, quos quidem facile posse demonstrari dicis. Sit autem terminus generalis $=\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{1.2.3\ldots x.n^x}$, erit summa $=$

$$e^{\frac{1}{n}}\left(\alpha+\frac{\beta+\gamma}{n}+\frac{\gamma}{n^2}\right)-\alpha.$$

Summa igitur erit algebraica, scilicet $= -\alpha$, si fuerit

$$\alpha n^2 + (\beta + \gamma)n + \gamma = 0,$$

seu

$$n = \frac{-\beta - \gamma \pm \sqrt{(\beta^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2 - 4\alpha\gamma)}}{2\alpha}.$$

Hic continetur series illa abstrusior

$$\frac{a+1}{n} + \frac{2a+3}{1.2.n^2} + \frac{3a+7}{1.2.3.n^3} + \text{etc.}$$

cujus terminus generalis est $\frac{1+(a-1)x+x^2}{1.2.3\ldots x.n^x}$, cujus ob $\alpha = 1$, $\beta = a - 1$, $\gamma = 1$, summa est $e^{\frac{1}{n}}\left(1 + \frac{a}{n} + \frac{1}{nn}\right) - 1$, quae ideo fiet algebraica atque $= -1$, si sit $nn + an + 1 = 0$, seu $n = \frac{-a \pm \sqrt{(aa-4)}}{2}$. Simili modo ulterius progredi licet, et cum seriei, cujus terminus generalis est

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5}{1.2.3.4\ldots x.n^x}$$

summa sit

$$= -\alpha + e^{\frac{1}{n}}\left(\alpha + \frac{\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta}{n} + \frac{\gamma+3\delta+7\varepsilon+15\zeta}{n^2} + \frac{\delta+6\varepsilon+25\zeta}{n^3} + \frac{\varepsilon+10\zeta}{n^4} + \frac{\zeta}{n^5}\right),$$

haec summa algebraica esse non potest, quin simul fiat $= -\alpha$; erit autem haec summa $= -\alpha$, si fuerit n radix hujus aequationis

$$\alpha n^5 + (\beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta)n^4 + (\gamma + 3\delta + 7\varepsilon + 15\zeta)n^3 + (\delta + 6\varepsilon + 25\zeta)n^2 + (\varepsilon + 10\zeta)n + \zeta = 0.$$

Hac igitur methodo non solum innumerabiles series istius formae $\frac{X}{1.2.3\ldots x.n^x}$, ubi X functionem denotat algebraicam ipsius x quamcunque rationalem, exhiberi possunt algebraice summabiles, sed etiam intelligitur praeter has inventas alias omnino non dari. Vale, V. C., ac fave Tui observantissimo

L. Eulero.

LETTRE XXXII.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. E. désire être dispensé des travaux de géographie.

d. 21 August 1740.

Die Geographie ist mir fatal. Ew. wissen, dass ich dabei ein Aug eingebüsset habe; und jetzo wäre ich bald in gleicher Gefahr gewesen. Als mir heut Morgen eine Partie Charten um zu examiniren zugesandt wurde, habe ich sogleich neue Anstösse empfunden. Denn diese Arbeit, da man genöthiget ist immer einen grossen Raum auf einmal zu übersehen, greifet das Gesicht weit heftiger an, als nur das simple Lesen oder Schreiben allein. Um dieser Ursachen willen ersuche ich Ew. gehorsamst, für mich die Güte zu haben, und durch Dero kräftige Vorstellung den Herrn Präsidenten dahin zu disponiren, dass ich von dieser Arbeit, welche mich nicht nur von meinen ordentlichen Functionen abhält, sondern auch leicht ganz und gar untüchtig machen kann, in Gnaden befreyet werde. Der ich mit aller Hochachtung und vielem Respect bin u. s. w. Leonh. Euler.

LETTRE XXXIII.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Démarches pour obtenir à E. la dispensation demandée.

d. 21 August 1740. In Eil.

Sobald ich den Hn. Etatsrath von Brevern spreche, will ich nicht unterlassen, demselben die gehörige Vorstellung wegen Ew. kränklichen Zustandes zu thun; weil ich aber nicht gewiss bin, ob solches morgen oder erst über einige Tage wird geschehen können, hingegen bei dieser Sache periculum in mora ist, so halte ich davor, dass Ew. wohl thun werden, wenn Sie ohne Zeitverlust den Hn. Praesidenten und den Hn. Rath Schumacher schriftlich benachrichtigen, dass sie ohne offenbare Gefahr Ihrer Gesundheit die geographischen Occupations nicht fortsetzen können, sondern dieselben, so lange bis Sie sich besser befinden werden, aussetzen müssen. Indessen habe ich heute mit vielem Vergnügen von Hn. Secr. Tiedemann vernommen, dass Ew. sich schon etwas besser befinden; ich wünsche herzlich Sie ehestens vollig restituiret zu sehn und verbleibe mit sonderbarer Consideration Ew. u. s. w. Goldbach.

LETTRE XXXIV.

Goldbach à Euler

Sommaire. Première lettre adressée à Berlin. Problème de la théorie des nombres. Sur deux anciens ouvrages de la Bibliothèque royale de Berlin.

St. Petersburg d. 19 Aug. 1741 st n.

— — — Was halten Ew. von dergl. propositionibus: $(3m+2)n^2+3$ kann niemals ein numerus quadratus seyn, positis pro m et n numeris integris quibuscunque?

In den Zeitungen von gelehrten Sachen habe ich unlängst gelesen, dass die beiden Mönche, so Newtoni Principia Mathematica herausgeben, Ew. Mechanicam stark gebraucht haben.

Wenn Sie auf die königl. Bibliothèque in Berlin gehen werden, lassen Sie sich doch Joh. de Luneschlos Thesaurum Mathematum reseratum per algebram novam, Patavii 1646 in fol. und Petrum Bungum de numerorum mysteriis in 4to zeigen. Ich habe A. 1718 diese Bücher, aber nur obenhin, gesehen, und kann mich fast gar nichts mehr von derselben Inhalt erinnern. Goldbach.

LETTRE XXXV.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Théorèmes de la théorie des nombres et du calcul intégral.

Berlin d. 9 September 1741.

Vor einigen Wochen haben Ihro Maj. die Königl. Frau Mutter mich zu sich holen lassen, und des Tags darauf hatte ich die Gnade bei Ihro Maj. zu speisen, und haben sowohl Ihro Majestät als die beiden Königl. Prinzessinnen mich auf die gnädigste und eine recht leutselige Art empfangen. Ihro Königl. Maj. der König hahen mich auch nicht nur durch den Hn. Geh. Rath Jordan Dero Allerhöchsten Gnade und Protection versichern lassen, sondern auch Höchsteigēnhändig nachfolgendes Schreiben zuzusenden die Gnade gehabt:

„Monsieur Euler. J'ai été bien aise d'apprendre que vous êtes content de votre sort et établissement présent. J'ai donné les ordres nécessaires au grand Directoire pour la pension de 1600 écus que Je vous ai accordée. S'il y a

encore quelque chose dont vous aurez besoin, vous n'avez qu'à attendre mon retour à Berlin. Je suis

Au Camp de Reichenbach
ce 4 septembre 1741.

votre bien affectionné Roy
Federic".

Weilen Ihro Maj. beschlossen haben ein neues Gebäu zur Akademie aufzubauen, so ist mir aufgetragen worden, einen vollständigen Riss von den akademischen Gebäuden in St. Petersburg zu verschaffen. Weilen nun alle diese Risse schon würklich in Kupfer gestochen, ich aber davon nicht leicht ein Exemplar von dem Hn. Schumacher hoffen darf, so nehme die Freyheit Ew. gehorsamst zu ersuchen ein Exemplar von diesen Rissen kaufen und dem Hn. Stähelin überliefern zu lassen ....

Die beiden gemeldten Bücher habe ich von der Bibliothec holen lassen; aber in Petri Bungi Mysteriis numerorum nicht das geringste Merkwürdige gefunden. Er durchgehet der Ordnung nach alle Zahlen von 1, 2, 3 bis tausend, und merkt von einer jeden an, wo solche in der Heil. Schrift und andern Auctoribus vorkommen; als bei 38 bringt er nichts anderes vor, als das Exempel des Kranken beim Teich zu Betesda, welcher 38 Jahre daselbst gelegen. Der Luneschloss ist ein sehr schönes Buch in seiner Art; ich habe aber dasselbe noch nicht völlig durchgegangen.

Ew. theorema, dass $(3m+2)n^2+3$ kein Quadrat seyn könne, ist sehr artig, und kann ich die Richtigkeit desselben auf folgende Art darthun: Entweder ist n durch 3 divisibel, oder nicht. Im ersten Fall ist n^2 divisibel durch 9, und bekömmt die Expression $(3m+2)n^2+3$ eine solche Form $9p+3$, welche kein Quadrat seyn kann, wie bekannt. Im andern Fall, wenn n nicht durch 3 divi-

sibel ist, so ist n^2 eine solche Zahl: $3p+1$ und $(3m+2)n^2+3$ bekömmt diese Form $9mp+3m+6p+5$, das ist $3q+2$, von welcher Form gleichfalls bekannt, dass solche niemals ein Quadrat seyn kann. Ich habe vor langer Zeit auch solche ähnliche theoremata gefunden, als $4mn-m-1$ kann nullo modo ein Quadrat seyn. Item $4mn-m-n$ kann auch kein Quadrat seyn, positis m et n numeris integris affirmativis.

Von den divisoribus quantitatis $aa \pm mbb$, si a et b sint numeri inter se primi, habe ich auch curieuse proprietates entdeckt, welche etwas in recessu zu haben scheinen, als da sind:

Theor. 1. Omnes divisores primi formulae $aa-2bb$ continentur in forma $8n \pm 1$.

Theor. 2. Omnes divisores primi formulae $aa-3bb$ sunt $12n \pm 1$.

Theor. 3. Nullus numerus primus potest esse divisor formae $aa-5bb$ nisi qui sit in hac forma $10n \pm 1$ contentus.

Von den integralibus formulae $\frac{dx}{(1-x^n)^{\frac{p}{q}}}$ habe ich auch merkwürdige proprietates gefunden, si post integrationem ponatur $x=1$. Als da sind

Theor. Integrale $\int \frac{dx}{(1-x^4)^{\frac{3}{4}}}$ se habet ad $\int \frac{dx}{(1-x^4)^{\frac{1}{2}}}$ uti $\sqrt{2}$ ad 1, posito post utramque integrationem $x=1$.

Theor. Integrale $\int \frac{dx}{(1-xx)^{\frac{5}{6}}}$ se habet ad integrale $\int \frac{dx}{(1-xx)^{\frac{2}{3}}}$ uti $\sqrt{3}$ ad 1, posito pariter post utramque integrationem $x=1$. Welche theoremata um so viel merkwürdiger scheinen, da sonsten nach der gewöhnlichen Art diese Integralia nicht mit einander compariret werden können.

Euler.

LETTRE XXXVI.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Paradoxes tirés de l'ouvrage de Luneschlos.

St. Petersburg d. 7 Nov. st. n. 1741.

Die sonderbare Distinction, mit welcher Ew. in Berlin aufgenommen wurden, hat mir nicht anders als erfreulich seyn können; insonderheit habe ich das gnädigste Schreiben Ihro Königl. Majestät an Ew. mit der grössesten Veneration gelesen und admiriret. Es muss eine treffliche directio ☉ aut ♃ ad medium coeli, oder dergleichen eine, für Ew. eingefallen seyn, welche ex post facto in dem themate nativ. sich wohl wird finden lassen.....

Dass Sie in des Lenneschlos Thesauro etwas Gutes gefunden, ist mir sehr lieb. Ich habe schon A. 1716 in Königsberg von demselben autore ein Tractätchen in 8vo gelesen, welches er Paradoxa de quantitate nennet. Das 352te heisset: Si Deus auferret omne corpus in vase contentum movendo vel annihilando, nec aliud ullum in ablati locum

venire permitteret movendo aut creando, hoc ipso vasis latera forent contigua, nec vel tantillum amplius distarent. Das 473[te]: Monstrosa et deformia etiam faciunt ad pulchritudinem mundi. Das 522[te]: Si luna esset concava, terra periret incendio. Das 946[te]: Pondera campanarum sunt in triplicata ratione sonorum. Verum crassities fidium longitudine et tensione aequalium sunt in ratione duplicata sonorum. Das 589[te]: Cum semidiameter gyrorum aquae quovis modo percussae secundo horae minuto dilatatus vix pedem exaequet, et semidiameter spirarum in aëre quavis etiam percussione procreatarum eodem tempore millium trecentorum ac octuaginta pedum existat, sequitur aquam millibus trecentum et octuaginta (1380) vicibus aëre densiorem atque graviorem esse .....

Goldbach.

LETTRE XXXVII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Sur les paradoxes de Luneschlos. Controverse entre Segner et les partisans de Wolf. Valeur réelle d'une expression imaginaire.

Berlin d. 9 December 1841.

— — — Für die mir communicirten paradoxa des Luneschlos bin gehorsamst verbunden. Es zeigen einige davon, als von dem Ton der Glocken und Saiten, eine richtige Einsicht in die Natur. Das von den Glocken stehet aber schon in Stifelii Anmerkungen über die Coss Christoff Rudolfs. Dasjenige, welches Ew. zuerst von der annihilirten Materie in einem Geschirr geschrieben, scheinet auf diesem ratiocinio zu beruhen: Ist keine Materie zwischen den Seiten des Gefässes, so ist nichts dazwischen; ist aber nichts dazwischen, so sind die Seiten aneinander, ungeacht das Gefäss seine vorige Figur behält. Ich halte aber dieses ra-

tiocinium für ein blosses Sophisma und bei weitem nicht hinreichend, die impossibilitatem vacui in mundo zu erweisen.

Der Hr. Geh. Rath Wolf, oder vielmehr seine Anhänger haben neulich einen harten Streit mit dem Hn. Segner, Prof. math. in Göttingen, bekommen, indem dieser einige grobe Fehler in des Hn. Wolfs Elementis Matheseos vorgab gefunden zu haben. Es sind beiderseits schon verschiedene Schriften gewechselt worden. Der Hr. Segner aber hat Recht, und von Seiten des Hn. Wolfs sind die Defensionen so schlecht beschaffen, dass daher der Wolfianischen Philosophie wenig Ehre zuwächst. Man hätte besser gethan die Fehler zu erkennen, weil dieselben ganz offenbar sind, und dieselben in einer neuen Ausgabe, woran wirklich gearbeitet wird, zu verbessern.

Ich habe letztens auch ein merkwürdiges Paradoxon gefunden, nehmlich, dass der Werth von dieser Expression $\frac{2^{+\sqrt{-1}}+2^{-\sqrt{-1}}}{2}$ quam proxime gleich sey $\frac{10}{13}$, und dieser Bruch differirt nur in partibus millionesimis von der Wahrheit. Der wahre Werth aber dieser Expression ist der Cosinus dieses arcus 0,6931471805599, oder des arcus von 39°, 42′, 51″, 52‴, 9⁗ in einem Circul, dessen radius $=1$.

Ich habe auch noch verschiedene wichtige Decouverten gemacht über die Integration solcher Formuln $\frac{Pdx}{Q}$, allwo P und Q functiones quaecunque rationales von x sind. Wovon zu einer andern Zeit die Ehre haben werde Ew. ausführlicher zu schreiben.

Euler.

LETTRE XXXVIII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Réponse à la lettre précédente.

St. Petersburg d. 13 Febr. n. st. 1742.

— — — Die Demonstration meines theorematis, welche Ew. in Ihrem vorigen Schreiben gegeben, ist eben dieselbe, die ich auch hatte.

Das theorema dass $4mn - m - 1$ kein quadratum seyn könne, gefället mir sehr, und ob ich es gleich nicht demonstriren kann, so habe doch diese consequentiam daraus gezogen, dass nicht allein, wie Ew. schon angemerket, auch $4mn - m - n$ kein numerus quadratus sey, sondern generatim die Expression $4mn - m - n^a$, allwo a ein numerus integer positivus quicunque ist, niemals ein quadratum geben könne.

Bei der Observation, so Ew. mir communiciret, dass $\frac{2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2}$ quam proxime gleich sey $\frac{10}{13}$, ist mir eingefallen, dass wenn man machen wollte, dass

$$2^{p\sqrt{-1}}+2^{-p\sqrt{-1}}=0$$

wurde, alsdann p kleiner als 3 und grösser als 2 seyn müsse. Ich gestehe, dass diese limites grosso modo angegeben sind, habe aber nicht die curiosité sie näher zu determiniren.

In dem 20'en Briefe part. 1. von Kolben Beschreibung Capitis bonae spei sind einige remarques über die dortige Ebbe und Fluth, welche vielleicht meritiren von Ew. gelesen zu werden. Das Buch wird ohne Zweifel auf der Königl. Bibliothèque seyn .....

Dass Ew. anjetzo Ihre Zeit nach Ihrem eignen Belieben anwenden können, gereichet mir zum grossen Vergnügen, und ich möchte für das Aufnehmen der Wissenschaften wünschen, dass Sie jederzeit in solcher Situation verbleiben könnten .....

Goldbach.

LETTRE XXXIX.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE Théorèmes de la théorie des nombres

Berlin d. 6 März 1742

— — Dass $4mn - m - 1$ oder $4mn - m - n$ niemals ein quadratum seyn könne, konnte ich bis anjetzo auch nicht rigorose demonstriren, sondern ich hatte solches aus einem theoremate Fermatiano, worin behauptet wird, dass eine summa duorum quadratorum $aa + bb$ niemals per numerum formae $4n - 1$ divisibilis sey, hergeleitet. Denn hat dieses theorema seine Richtigkeit, so ist $aa + 1 \mathrel{\mathrm{II}} (4n - 1)m$, da ich Ew. signum $\mathrel{\mathrm{II}}$ um eine aequationem impossibilem anzuzeigen, gebrauche. Dahero ist $aa \mathrel{\mathrm{II}} 4mn - m - 1$. Ferner kann auch $\frac{aa+1}{4n-1}$ unmöglich ein numerus integer seyn, oder es ist $\frac{aa+1}{4n-1} \mathrel{\mathrm{II}} i$, folglich ist auch $\frac{aa+1}{4n-1} + 1$ oder

$\frac{aa+4n}{4n-1}$ oder $\frac{bb+n}{4n-1} = i$. Gleichfalls kann $\frac{bb+n}{4n-1} + n$ oder $\frac{bb+4nn}{4n-1}$ oder $\frac{cc+nn}{4n-1}$ kein numerus integer seyn. Und wenn man auf solche Art fortgehet, so folget, dass $\frac{aa+n^a}{4n-1} = m$ und also $aa = 4mn - m - n^a$, welches die Consequenz ist, so Ew. aus diesem theoremate gezogen haben. Die Richtigkeit davon beruhet also auf der Wahrheit dieses theorematis, dass eine summa duorum quadratorum $aa+bb$ unmöglich durch $4n-1$ getheilt werden könne, wenn nicht aa und bb ein jedes für sich durch $4n-1$ divisibile ist. Ich habe aber erst jetzo hievon nachfolgende Demonstration gefunden:

Prop. 1. Haec forma $(a+b)^p - a^p - b^p$ semper est divisibilis per p si fuerit p numerus primus.

Dem. Evolvatur potestas $(a+b)^p$ eritque

$$(a+b)^p - a^p - b^p = \frac{p}{1} a^{p-1} b + \frac{p(p-1)}{1.2} a^{p-2} b^2 + \cdots\cdots + \frac{p(p-1)}{1.2} a^2 b^{p-2} + \frac{p}{1} ab^{p-1}$$

cujus expressionis singuli termini sunt numeri integri, singuli ergo erunt divisibiles per p siquidem p sit numerus primus: nam si p foret numerus compositus, fieri posset, ut in quodam termino factor quispiam ipsius p per factorem denominatoris tolleretur, illeque terminus, ac proinde tota expressio cessaret per p divisibilis esse. Quocirca si p est numerus primus, haec expressio $(a+b)^p - a^p - b^p$ semper erit divisibilis per p. Q. E. D.

Coroll. 1. Positis ergo $a = b = 1$ erit $2^p - 2$ divisibile per numerum primum p, ideoque nisi p sit $= 2$ erit $2^{p-1} - 1$ per p divisibile.

Coroll. 2. Sit $a = 2$, $b = 1$, erit $3^p - 2^p - 1$ divisibile per p. Cum autem $2^p - 2$ sit quoque divisibile per p, erit quoque istarum formularum summa $3^p - 3$ divisibilis per p, ideoque nisi sit $p = 3$, erit $3^{p-1} - 1$ per p divisibile.

Prop. 2. Si $a^p - a$ fuerit divisibile per p erit quoque $(a+1)^p - a - 1$ per p divisibile.

Dem. Si in propositione 1 ponatur $b = 1$, erit $(a+1)^p - a^p - 1$ per p divisibile. Cum autem per hypothesin sit $a^p - a$ per p divisibile, erit quoque summa istarum formularum $(a+1)^p - a - 1$ per p divisibilis $Q.E.D$

Coroll. 1. Cum igitur $1^p - 1$ divisibile sit per p, erit quoque $2^p - 2$ divisibile per p, hincque porro progrediendo per p divisibiles erunt istae formulae $3^p - 3$, $4^p - 4$, $5^p - 5$, etc.

Coroll. 2. Generaliter ergo per numerum primum p divisibilis erit ista formula $a^p - a$ quicunque numerus integer loco a ponatur. Nisi ergo p sit divisor ipsius a: erit quoque $a^{p-1} - 1$ per p divisibile.

Coroll. 3. Quoniam simili modo $b^{p-1} - 1$ per numerum primum p est divisibile, nisi b sit multiplum ipsius p, sequitur fore $a^{p-1} - b^{p-1}$ per p divisibile.

Theorema. Summa duorum quadratorum $aa + bb$ non est divisibilis per numerum primum $4n - 1$, nisi utrumque quadratum seorsim per eundem numerum primum sit divisibile.

Demonstratio. Quoniam per hyp. neque a neque b divisibile est per $4n - 1$, sequitur hanc formulam $a^{4n-2} - b^{4n-2}$ fore per $4n - 1$ divisibilem, unde per $4n - 1$ non erit divisibilis haec forma $a^{4n-2} + b^{4n-2}$ neque propterea ullus ejus factor. At cum $4n - 2$ sit numerus impariter par, for-

mulae $a^{4n-2} + b^{4n-2}$ factor est $aa + bb$: quocirca $aa + bb$ per numerum primum $4n - 1$ dividi omnino nequit. *Q.E.D.*

Coroll. 1. Quoniam si $4n - 1$ non est numerus primus, divisorem habet necessario numerum primum hujus formae $4n - 1$, sequitur summam duorum quadratorum $aa + bb$ per nullum numerum hujus formae $4n - 1$ sive primum, sive non primum dividi posse.

Coroll. 2. Quodsi ergo summa duorum quadratorum $aa + bb$ habeat divisorem, is erit necessario numerus formae hujus $4n + 1$.

Coroll. 3. Si ergo summa duorum quadratorum $aa + bb$ per alium numerum dividi nequit, nisi qui ipse sit duorum quadratorum summa (quod demonstrari posse confido) sequitur omnem numerum primum $4n + 1$ in duo quadrata esse resolubilem.

Dass Ew. die curiosité gehabt zu untersuchen, wann diese Formul $2^{+p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}}$ nihilo aequalis werden könnte, hat mir Anlass gegeben anzumerken, dass solches infinitis modis geschehen könne. Der erste valor pro p ist, wie Ew. observirt, zwischen 2 und 3, nehmlich $p = 2{,}26618021$, der wahre valor aber ist $p = \frac{\pi}{2l2}$, da ist $\pi = 3{,}14159265$ und $l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.} = 0{,}6931471805$. Alle folgenden valores ipsius p entspringen aus diesem, indem man diesen mit 3, 5, 7, 9, etc. multiplicirt. — — —

Euler.

LETTRE XL.

Euler à Goldbach.

Sommaire. E. est chargé de donner des leçons de mathématiques aux princes de Würtemberg. Comète de 1742

Berlin d. 15 März 1742.

— — Ich habe die Ehre gehabt in meinem vorigen Schreiben Ew. zu melden, dass die Durchl. Herzogin von Würtenberg mir die Information in der Mathematic und Physic über Dero Prinzen aufgetragen, womit ich schon seit einigen Wochen continuire. Weilen ich aber allhier noch keine Vorgesetzte habe, und diese Occupation ohne Erlaubniss nicht wohl über mich nehmen konnte, so habe deswegen directe an Ihro Königl. Majestät nach der Armée geschrieben und vor etlichen Tagen darauf die Allergnädigste Permission durch ein Handschreiben bekommen. Von aussen war die Adresse: *A mon Professeur Euler* und der Inhalt war folgender:

Aiant vû par Votre lettre du 20 du mois passé que la Duchesse de Würtenberg vous demande des leçons mathématiques pour les princes de Sa maison, Je vous en accorde la permission avec bien du plaisir, étant au reste votre bien affectionné Roi Federic.

Znaim ce 1 mars 1742.

Uebrigens kann ich die sonderbare Capacität des Erb-Prinzen und den durchdringenden Verstand nicht genugsam bewundern. Meine Lection ist täglich von 10 bis 11 Uhr, da dann die Mess angehet. — — —

Ew. habe das letzte Mal meine Demonstration des theorematis, dass $4mn - m - n$ niemals ein quadratum seyn könne, zu überschreiben die Ehre gehabt. Aus derselben folgen noch viel andere artige Speculationen in dieser Materie, und ich bin versichert, dass Ew. noch viel herrliche Consequenzen daraus herleiten werden. Ich habe anjetzo auch eine ganz andere Methode gefunden die summas serierum potestatum reciprocarum zu finden, welche sich nicht wie die erstere auf die radices infinitas einer aequationis infinitae gründet, sondern bloss allein aus den regulis differentiationum und integrationum fleusst, wovon das nächste Mal ausführlicher zu schreiben willens bin.

Euler.

P. S. Seit acht Tagen hat man allhier einen Cometen wahrgenommen, erst vorgestern aber hat man Gelegenheit gefunden denselben auf dem Observatorio zu observiren. Er erschien d. 11ten um Mitternacht in ala boreali Cygni, so dass longitudo war ♒ 12° 30′ und latitudo borealis 71°. Sechs Stunden hernach schien er beynahe um 2° in consequentia fortgerückt seyn,

woraus ich schliesse, dass dieser Comet nicht weit von seinem Perihelio seyn müsse; ob er aber erst dahin gehe, oder schon daher komme, kann aus dieser einigen Observation nicht geschlossen werden. Die letztvergangene Nacht war es trüb, dass man nicht observiren konnte. Im übrigen schien der nucleus wie eine stella 4^{tae} magnitudinis, hatte eine comam und caudam ungefähr 3^0 lang Was hierüber in Petersburg entweder observiret worden oder noch wird observiret werden, solches ersuche Ew. gehorsamst mir zu melden. Sobald man hier wird mehrere und accuratere Observationen machen können, werde ich solche gleich der Akademie zu uberschreiben die Ehre haben.

LETTRE XLI.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Recherches sur les nombres et les quantités à exposans imaginaires.

St. Petersburg d. 12 April 1742.

Meine Demonstration, dass wenn $4mn - m - n^a$ kein numerus quadratus ist, auch $4mn - m - n^{a+1} = a^2$, fliesset alsofort aus der einigen Supposition $m = 4p - n^a$, denn hiedurch wird $4n(4p - n^a) - 4p = 4b^2$, quae aequatio divisa per 4, dat $4pn - p - n^{a+1} = b^2$, so dass in der Aequation $x^a = 4px - p - a^2$, wo a ein numerus integer quicunque ist, x keinen valorem positivum in integris haben kann. Es folget auch ferner, dass obgleich $p^2 - p - e^2$ infinitis modis ein quadratum in integris ist, dennoch

$$\frac{p \pm \sqrt{(p^2 - p - e^2)}}{2}$$

niemals ein numerus integer seyn kann; item dass die zu-

erst erwähnte Formul $4mn - m - n^a$ keinen numerum triangularem gebe, oder dass $x^a = 4px - p - \frac{(b^2 - b)}{2}$ niemals eine radicem affirmativam in integris haben kann.

Gegen die mir communicirte Demonstration, wofür ich Ew. sehr verbunden bin, finde ich nichts zu erinnern, vielleicht könnte man aber generaliter sagen, dass $(a+b)^p - a^p - b^p$ allezeit per aliquem divisorem ipsius p divisibile ist, woraus denn als ein casus particularis folget, dass wenn p ein numerus primus ist, die gedachte Formul per ipsum numerum p divisibilis seyn müsse *).

Bey Gelegenheit dessen, was Ew. von der Formul

$$2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$$

schreiben, habe ich observiret, dass wenn n variabilis gesetzt wird, alsdann $2^{np\sqrt{-1}} + 2^{-np\sqrt{-1}} = 2$ werde, so oft n ein numerus pariter par ist, und dass sie hingegen $= -2$ werde, so oft n ein numerus pariter impar ist, und wenn n ein numerus integer, q aber ein numerus quicunque rationalis aut irrationalis ist, so wird allezeit

$2^{(4n+q)p\sqrt{-1}} + 2^{-(4n+q)p\sqrt{-1}} = 2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-qp\sqrt{-1}}$ **).

Es ist meines Erachtens auch remarquable, dass wenn man p durch diese Aequation determiniret $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 3$, alsdann $2^{xp\sqrt{-1}} + 2^{-xp\sqrt{-1}} =$ wird

$$\left[\frac{(1+\sqrt{5})^{2x+1} - (-1+\sqrt{5})^{2x+1}}{2^{2x+1}}\right] - \left[\frac{(1+\sqrt{5})^{2x-1} - (-1+\sqrt{5})^{2x-1}}{2^{2x-1}}\right]$$

so oft x ein numerus integer ist.

Nachdem ich diese Observation wieder durchgelesen, finde ich dieselbe von keiner Wichtigkeit; man darf nur setzen $a = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, so ist $a^x + a^{-x}$ der terminus generalis.

Goldbach.

*) Emendandum vid. infra. G. **) V. la lettre suivante.

LETTRE XLII.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE Mêmes sujets.

Berlin d. 8 Mai 1742.

— — Die Corollaria, welche Ew. aus meinem theoremate, dass $4mn - m - n$ kein quadratum seyn könne, hergeleitet, sind sehr merkwürdig und übertreffen das theorema selbst weit an Wichtigkeit. Denn dass $4mn - m - n$ auch kein numerus trigonalis seyn könnte, hatte ich nicht wahrgenommen; anjetzo habe aus dieser Anleitung auch befunden, dass eben diese Formul $4mn - m - n$ auch kein numerus heptagonalis seyn könne. Ueberhaupt habe gefunden, dass alle Zahlen welche nicht $= 4mn - m - n$ seyn können, in dieser Formul $xx + yy + y$ enthalten sind. Daher diese Expression $4mn - m - n + xx + yy + y$ alle möglichen Zahlen geben muss, welches theorema einiger-

maassen ähnlich ist dem Fermatiano, dass $pp + qq + rr + ss$ alle mögliche Zahlen hervorbringe. Ich habe noch viel mehr dergleichen theoremata, als $3aa + 3bb + 7cc$ kann niemals ein quadratum seyn; item $2aa + 6bb + 21cc$ quadratum esse nequit und dergleichen. Ich habe aber noch keine dergleichen formulam finden können, in welcher 4 litterae a se invicem non pendentes enthalten wären.

Dass im Uebrigen meine jüngst überschickte Demonstration bei Ew. Beifall gefunden, erfreuet mich sehr. Dass aber diese Formul $(a+b)^p - a^p - b^p$ auch durch p oder einen divisorem des p, praeter unitatem, wenn p kein numerus primus ist, divisibilis seyn sollte, kann durch meine Demonstration nicht nur nicht erwiesen werden, sondern es trifft auch in vielen Fällen nicht zu. Als wenn $a = 1$ et $b = 1$, et $p = 35$, so lässt sich $2^{35} - 2$ weder durch 5 noch durch 7 theilen.

Wenn generaliter $a^{p\sqrt{-1}} + a^{-p\sqrt{-1}} = b$, so ist

$$a^{xp\sqrt{-1}} + a^{-xp\sqrt{-1}} = \left(\frac{b + \sqrt{(bb-4)}}{2}\right)^x + \left(\frac{b - \sqrt{(bb-4)}}{2}\right)^x,$$

und folglich, wenn $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 3$, so wird $2^{xp\sqrt{-1}} + 2^{-xp\sqrt{-1}} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2x}$. Somit kommen Ew. Observationen mit meinem General-theoremate, dass $a^{+p\sqrt{-1}} + a^{-p\sqrt{-1}} = 2\cos.\mathrm{Arc}.pla$ meistentheils überein, nur dass $2^{(4n+q)p\sqrt{-1}} + 2^{-(4n+q)p\sqrt{-1}}$ nicht gleich ist $2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-qp\sqrt{-1}}$, wenn nicht entweder $(2n+q)pl2$ oder $2npl2$ gleich ist $m\pi$ denotante $1:\pi$ rationem diametri ad peripheriam.

Euler.

LETTRE XLIII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Continuation sur les mêmes sujets. Deux théorèmes d'analyse

Moscau d. 7 Juni n. st 1742.

— — — Ohngeachtet ich mich in meinem vorigen Briefe mit der particula vielleicht précautionniret, so hätte doch nicht geglaubet, dass die Formul $(a+b)^p - a^p - b^p$ sich nicht allezeit durch einen von den divisoribus numeri p sollte dividiren lassen, wenn solches nicht durch das von Ew. angefuhrte exemple deutlich bestätiget wurde.

So viel ich mich erinnere, hatte ich mir in meinem letzten Briefe die Formul $2^{xp\sqrt{-1}} + 2^{-xp\sqrt{-1}}$, posito $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$, als applicatas einer curvae serpentiformis, deren abscissae x sind, vorgestellet, und welche den axem so oft durchschneidet, als die Formul $= 0$ wird,

so dass, wenn die formula ipsa $= 2$ ist, die applicata maxima unten oder oben herauskommt, folglich unzählige andere applicatae unter sich gleich seyn müssen; nichts desto weniger ist in meiner damaligen Expression ein Fehler eingeschlichen, den Ew. mit Recht angemerket haben, und leicht verbessert werden kann, indem es heissen sollen, dass wenn q ein numerus quicunque und $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$ gesetzet wird, alsdann posito pro n integro quocunque, seyn werde

$$2^{(8n-4-q)p\sqrt{-1}} + 2^{-(8n-4-q)p\sqrt{-1}} = 2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-qp\sqrt{-1}}.$$

Ew. haben gefunden, dass alle Zahlen, so nicht $4mn-m-n$ seyn können, in dieser Formul begriffen sind v^2+v+u^2, und ich finde, dass alle $4mn-m-n$ zu dieser Formul y^2+y-x^2 gebracht werden können, so dass eine jede gegebene Zahl gleich ist $p^2+p\pm q^2$, woselbst p et q numeros integros anzeigen, oder auch eine von beiden litteris 0 bedeuten kann; woraus zu sehen ist, dass eine jede Zahl aus einem duplo numeri triangularis $\pm$ numero quadrato bestehet. Weil aber auch eine jede Zahl gleich ist der Formul

$$u^2+v^2+v+y^2+y-x^2,$$

so wird, wenn man setzet $u = \frac{z^2+z}{4} + 1$, $x = \frac{z^2+z}{4} - 1$, $u^2 - x^2 = z^2 + z$, folglich jedes numeri dati dimidium

$$\frac{n}{2} = \frac{v^2+v+y^2+y+z^2+z}{2},$$

id est tribus trigonalibus.

Dass in der formula polygonalium $\frac{(p-2)x^2-(p-4)x}{2}$, wenn sie gleich werden soll $4mn-m-n$, p weder 5 ± 2 noch 5 ± 1 seyn könne, sondern alle trigonales, tetragonales, hexagonales und heptagonales ausgeschlossen werden, folget ex iisdem principiis.

Ich halte es nicht für undienlich, dass man auch diejenigen propositiones anmerke, welche sehr probabiles sind, ohngeachtet es an einer wirklichen Demonstration fehlet, denn wenn sie auch nachmals falsch befunden werden, so können sie doch zu Entdeckung einer neuen Wahrheit Gelegenheit geben. Des Fermatii Einfall, dass jeder numerus $2^{2^{n-1}}+1$ eine seriem numerorum primorum gebe, kann zwar, wie Ew. bereits gezeiget haben, nicht bestehen; es wäre aber schon was Sonderliches, wenn diese series lauter numeros unico modo in duo quadrata divisibiles gäbe. Auf solche Weise will ich auch eine conjecture hazardiren: dass jede Zahl, welche aus zweyen numeris primis zusammengesetzt ist, ein aggregatum so vieler numerorum primorum sey, als man will (die unitatem mit dazu gerechnet), bis auf die congeriem omnium unitatum *); zum Exempel

$$4=\begin{cases}1+3\\1+1+2\\1+1+1+1\end{cases}\qquad 5=\begin{cases}2+3\\1+1+3\\1+1+1+2\\1+1+1+1+1\end{cases}$$

$$6=\begin{cases}1+5\\1+2+3\\1+1+1+3\\1+1+1+1+2\\1+1+1+1+1+1\end{cases}\qquad \text{etc.}$$

*) Nachdem ich dieses wieder durchgelesen, finde ich, dass sich die conjecture in summo rigore demonstriren lässet in casu $n+1$, si successerit in casu n, et $n+1$ dividi possit in duos numeros primos. Die Demonstration ist sehr leicht. Es scheinet wenigstens, dass eine jede Zahl, die grösser ist als 1, ein aggregatum trium numerorum primorum sey. G.

Hierauf folgen ein Paar observationes, so demonstriret werden können:

Si v sit functio ipsius x ejusmodi, ut facta $v = c$ numero cuicunque, determinari possit x per c et reliquas constantes in functione expressas, poterit etiam determinari valor ipsius x in aequatione $v^{2n+1} = (2v+1)(v+1)^{n-1}$.

Note marginale d'Euler:

$v^{2n+1} - (vv+v)(v+1)^{n-1}$ divisib. per $vv - v - 1$
addatur $(vv - v - 1)(v+1)^{n-1}$
$v^{2n+1} - (2v+1)(v+1)^{n-1}$ divisib. per $vv - v - 1$.

Si concipiatur curva cujus abscissa sit x, applicata vero sit summa seriei $\frac{x^n}{n \cdot 2^{2n}}$, posita n pro exponente terminorum hoc est, applicata $= \frac{x}{1.2^2} + \frac{x^2}{2.2^4} + \frac{x^3}{3.2^6} + \frac{x^4}{4.2^8} +$ etc., dico, si fuerit abscissa $=$

1, applicatam fore $= \frac{1}{3}$ $\left\{ = l\frac{4}{3}\right.$, nam sit haec applicata $= y$, erit $y = l \cdot \frac{4}{4-x}$. *Note marginale d'Euler* $\}$

2 . . . . $l2$

3 . . . . $2l2$

4 vel major . . . infinitam.

Goldbach.

P. S. Die beiden andern formulas numerorum non quadratorum, deren Ew. Erwähnung thun, habe ich noch nicht untersuchet, ich glaube aber, dass selbige, wenn man setzet

$$a = hx + k,\quad b = lx + m,\quad c = nx + p$$

sich wohl möchten unter nachfolgende Formul rangiren lassen, allwo f, g, γ, δ numeri integri affirmativi sind

$$\begin{array}{lll}(2f - 4\gamma\delta)x^2 & + 4(f - 2\gamma\delta)(2g - \delta^2)x & + (2g - \delta^2)^2 \\ - 4\gamma^2 & \quad - 2f & \quad - 2g\end{array}$$

denn diese kann niemals ein quadratum geben .....

Positis m et p numeris integris affirmativis, haec expressio $\frac{p + 2 \pm \sqrt{(4p - m + 3)}}{m}$ non potest fieri numerus integer.

LETTRE XLIV.

Euler à Goldbach

Sommaire. Travaux d'Euler. Sommation des séries des puissances réciproques. Formules à exposans imaginaires. Recherches sur les nombres et diviseurs Sur les deux théorèmes de la lettre précédente.

Berlin d. 30 Juni 1742

— — Ich werde nun bald wieder eine Dissertation nach Paris schicken Sur la meilleure manière d'observer l'inclinaison de l'aiguille aimantée, und da ich bei dieser Gelegenheit auf die theoriam magnetis meditirt, so habe ich endlich ein sehr simples und den legibus naturae gemässes systema gefunden, wodurch ich alle proprietates und phaenomena magnetis et ferri auf eine sehr leichte und deutliche Art erklären kann, über welche Materie ich künftiges Jahr eine pièce nach Paris senden werde.

Letztens habe ich wiederum eine pièce nach Petersburg de oscillationibus pendulorum flexibilium geschickt, und nächstens wird hier der 7[te] tomus Miscellaneorum zum Vor-

schein kommen, darin ich eine ziemliche Anzahl Pièccn gegeben. Einige davon handeln von einer neuen Art die summas serierum potestatum reciprocarum zu finden. Erstlich habe ich eine Methode gegeben alle formulas differentiales rationales zu integriren, da dann das integrale, wenn dasselbe nicht algebraicum ist, entweder a logarithmis, oder a quadratura circuli, oder von beiden zugleich dependiret. Hieraus habe ich das integrale dieser Formul $\int \frac{x^{m-1} - x^{n-m-1}}{1 - x^n} dx$ generaliter exprimirt und dabei gefunden, dass wenn man setzt $x = 1$, alsdann im integrali sich die membra logarithmica destruiren, und nur diejenigen, so a quadratura circuli dependiren, übrigbleiben, welche zusammengenommen endlich auf diese Expression $\frac{\pi \cos \frac{m}{n} \pi}{n \sin \frac{m}{n} \pi}$ reducirt werden. Hierauf habe ich die Formul $\int \frac{x^{m-1} - x^{n-m-1}}{1 - x^n} dx$ per series integrirt, modo ordinario, und nachdem ich $x = 1$ gesetzet, diese Aequation gefunden

$$\frac{\pi \cos \frac{m}{n} \pi}{n \sin \frac{m}{n} \pi} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \text{etc.}$$

alwo $1 : \pi$ rationem diametri ad peripheriam bedeutet, und folglich posito radio, seu sinu toto $= 1$, die halbe peripheria oder der arcus 180° durch π angedeutet wird; und also wird $\frac{m}{n} \pi$ ein arcus determinatus, davon man den sinum und cosinum anzeigen kann. Nun setze ich $\frac{m}{n} = x$, so kommt diese series heraus

$$\frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \text{etc.}$$

Setzt man $x = \frac{1}{4}$, so wird $\pi x = 45^0$ und $\cos \pi x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, et $\sin \pi x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, und folglich $\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} -$ etc. Hieraus kann man aber per differentiationem auf höhere potestates kommen, denn sumto x variabili, ist $d \,.\cos \pi x = -\pi dx \sin \pi x$ und $d \,.\sin \pi x = \pi dx \cos \pi x$; dahero wird

$$d\,.\frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{-\pi\pi\,dx\,(\sin \pi x)^2 - \pi\pi\,dx\,(\cos \pi x)^2}{(\sin \pi x)^2} = \frac{-\pi\pi\,dx}{(\sin \pi x)^2}$$

ob $(\sin \pi x)^2 + (\cos \pi x)^2 = 1$, nempe quadrato radii. Also wenn die series auch differentiirt wird, so kommt

$$\frac{-\pi\pi dx}{(\sin \pi x)^2} = \frac{-dx}{xx} - \frac{dx}{(1-x)^2} - \frac{dx}{(1+x)^2} - \frac{dx}{(2-x)^2} - \frac{dx}{(2+x)^2} - \text{etc.},$$

und durch $-dx$ dividirt

$$\frac{\pi\pi}{(\sin \pi x)^2} = \frac{1}{xx} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} + \frac{1}{(2+x)^2} + \text{etc.}$$

Setzt man $x = \frac{1}{4}$, weil $\sin \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, so wird

$$2\pi\pi = \frac{16}{1} + \frac{16}{9} + \frac{16}{25} + \text{etc. oder } \frac{\pi\pi}{8} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.}$$

Man kann aber auch weiter differentiiren, und solchergestalt ad summas quarumque potestatum gelangen, denn es wird

$$d\cdot\frac{\pi\pi}{(\sin \pi x)^2} = \frac{-2\pi^3\,dx \cos \pi x}{(\sin \pi x)^3} = \frac{-2dx}{x^3} + \frac{2dx}{(1-x)^3} - \frac{2dx}{(1+x)^3} + \text{etc.}$$

und folglich

$$\frac{\pi^3 \cos \pi x}{(\sin \pi x)^3} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{(2-x)^3} + \frac{1}{(2+x)^3} - \text{etc.}$$

Sit $x = \frac{1}{4}$, erit $2\pi^3 = \frac{64}{1} - \frac{64}{3^3} + \frac{64}{5^3} - \frac{64}{7^3} +$ etc. Solchergestalt finde ich also die summas omnium potestatum und noch viel generaler als durch die vorhergebrauchte Methode, weil ich hier loco x quamcunque fractionem substituiren kann. Diese Methode habe ich dem Hn. Nicolao Bernoulli nach Basel geschrieben und erwarte darüber noch seine

Meinung *). Ich erinnere mich aber, dass Ew. schon vormals angemerkt haben, dass wenn man die Summ von dieser serie wisse $\frac{1}{a+\alpha x} + \frac{1}{b+\beta x} + \frac{1}{c+\gamma x}$ + etc., man daraus per differentiationem die Summ von dieser finden könne $\frac{\alpha^{n-1}}{(a+\alpha x)^n} + \frac{\beta^{n-1}}{(b+\beta x)^n} + \frac{\gamma^{n-1}}{(c+\gamma x)^n}$ + etc., wovon meine summatio hier ein casus ist.

Generaliter ist $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 2\cos A.pl2$. Wenn also $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}}$ soll $= 0$ seyn, so muss $pl2$ einem solchen arcui circuli gleich seyn, dessen cosinus $= 0$. Diese Eigenschaft aber haben alle arcus in hac formula contenti $\frac{(2n+1)\pi}{2}$, und folglich wird $p = \frac{(2n+1)\pi}{2l2}$. Dahero posito $p = \frac{(2n+1)\pi}{2l2}$ oder $2^{p\sqrt{-1}}+2^{-p\sqrt{-1}}=0$, so wird $2^{xp\sqrt{-1}}+2^{-xp\sqrt{-1}} = 2\cos A.xpl.2 = 2\cos A.\frac{(2n+1)x\pi}{2}$. Wenn also seyn soll $2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-qp\sqrt{-1}} = 2^{rp\sqrt{-1}} + 2^{-rp\sqrt{-1}}$, so muss $\cos A.\frac{(2n+1)q\pi}{2} = \cos A.\frac{(2n+1)r\pi}{2}$. Die cosinus aber von zweyen verschiedenen arcubus sind einander gleich, wenn entweder die summa oder differentia arcuum gleich ist einem multiplo von der ganzen Peripherie 2π. Dahero wird $\frac{(2n+1)q\pi}{2} \pm \frac{(2n+1)r\pi}{2} = 2m\pi$ und folglich $q \pm r = \frac{4m}{2n+1}$, so dass seyn wird

$$2^{\left(\frac{4m}{2n+1}-q\right)p\sqrt{-1}} + 2^{-\left(\frac{4m}{2n+1}-q\right)p\sqrt{-1}} = 2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-qp\sqrt{-1}},$$

worin alles dasjenige enthalten ist, was Ew. von dieser Materie mir überschrieben haben.

Nicht nur alle Zahlen, welche diese Formul $4mn - m - n$ gibt, sind enthalten in $yy + y - xx$, sondern gar alle mögliche Zahlen, welche sowohl in $4mn - m - n$, als nicht darin begriffen sind, und also ist independenter

*) Voire la 1re lettre de Nic Bernoulli dans le 2me volume.

von diesem theoremate eine jede Zahl in dieser Formul $uu + vv + v + yy + y - xx$ enthalten. Hieraus lässt sich aber nichts ad resolutionem numeri cujusque in numeros trigonales vel quadratos schliessen, und da ein jeder Buchstab u, v, y und x eine jegliche Zahl andeutet, so kann man nicht für u, $\frac{zz+z}{4} + 1$, noch für x, $\frac{zz+z}{4} - 1$ setzen, weilen diese formulae $\frac{zz+z}{4} \pm 1$ nicht mehr alle möglichen Zahlen geben, welche doch durch u und x angedeutet werden. Denn da eine jede Zahl sogar in dieser Formul $uu - xx$ enthalten ist, so musste, kraft dieser Substitution, auch eine jede Zahl in dieser $zz + z$ enthalten, und also ein numerus trigonalis seyn.

Wenn alle in dieser formula $2^{2^{n-1}} + 1$ enthaltenen Zahlen nur unico modo in duo quadrata divisibiles wären, so müssten auch alle diese Zahlen nothwendig numeri primi seyn, welches aber nicht ist. Denn alle diese Zahlen sind in dieser formula $4m + 1$ enthalten, welche so oft sie ein numerus primus ist, unfehlbar in duo quadrata, hocque unico modo, resolviret werden kann. So oft aber $4m + 1$ kein numerus primus ist, so ist dieselbe Zahl entweder gar nicht resolubilis in duo quadrata oder pluribus uno modis. Dass aber $2^{32} + 1$, welche Zahl kein numerus primus ist, zum wenigsten duobus modis in duo quadrata divisibilis sey, kann ich also zeigen: 1. Wenn a und b in duo quadrata resolubiles sind, so wird auch das Product ab in duo quadrata resolubile seyn; 2. Si productum ab et alter factor a fuerint numeri in duo quadrata resolubiles, tum quoque alter factor b in duo quadrata erit resolubilis. Diese theoremata konnen rigidissime demonstriret werden. Nun ist

$2^{32}+1$, welche Zahl in duo quadrata est resolubilis, nempe 2^{32} et 1, divisibilis per $641 = 25^2 + 4^2$. Dahero der andere factor, den ich brevitatis gratia b nennen will, gewiss auch eine summa duorum quadratorum. Sit $b = pp + qq$, ita ut sit $2^{32}+1 = (25^2+4^2)(pp+qq)$, erit $2^{32}+1 = (25p+4q)^2 + (25q-4p)^2$ et simul $2^{32}+1 = (25p-4q)^2 + (25q+4p)^2$ und folglich zum wenigsten duobus modis eine summa duorum quadratorum. Hieraus kann man nun die resolutionem duplicem a priori finden. Denn es wird $p = 2556$ et $q = 409$ und folglich $2^{32}+1 = 65536^2 + 1^2 = 62264^2 + 20449^2$. Dass eine jegliche Zahl, welche in zwey numeros primos resolubilis ist, zugleich in quot, quis voluerit, numeros primos zertheilt werden könne, kann aus einer Observation, so Ew. vormals mit mir communicirt haben, dass nehmlich ein jeder numerus par eine summa duorum numerorum primorum sey, illustrirt und confirmirt werden. Denn, ist der numerus propositus n par, so ist er eine summa duorum numerorum primorum, und da $n-2$ auch eine summa duorum numerorum primorum ist, so ist n auch eine summa trium, und auch quatuor u. s. f. Ist aber n ein numerus impar, so ist derselbe gewiss eine summa trium numerorum primorum, weil $n-1$ eine summa duorum ist, und kann folglich auch in quotvis plures resolvirt werden. Dass aber ein jeder numerus par eine summa duorum primorum sey, halte ich für ein ganz gewisses theorema, ungeachtet ich dasselbe nicht demonstriren kann. — Dass $\frac{p+2\pm\sqrt{(4p-m+3)}}{m}$ nimmer ein numerus integer werden könne, erhellet daher, weilen wenn man diese Formul einem numero integro n gleich setzt, herauskommt $p = mn \pm \sqrt{(4mn-1)}$; es kann aber $4mn-1$ kein quadratum seyn.

Ew. theorema, dass wenn man ex aequatione $v = c$, existente v functione quapiam ipsius x, die radicem x finden kann, man auch ex hac aequatione

$$v^{2n+1} = (2v + 1)(v + 1)^{n-1}$$

den valorem ipsius x bestimmen könne, — hat mich zu ergründen viel Mühe gekostet, bis ich endlich gemerket, dass diese Aequation $v^{2n+1} - (2v + 1)(v + 1)^{n-1} = 0$ divisibilis sey per $vv - v - 1$. Denn es ist

$$v^{2n+1} - (2v + 1)(v + 1)^{n-1} = v(v^{2n} - (v + 1)^n) + (vv - v - 1)(v + 1)^{n-1}$$

und $v^{2n} - (v + 1)^n$ ist durch $vv - (v + 1)$ divisibilis. Quicquid ergo sit n, aequationi $v^{2n+1} = (2v + 1)(v + 1)^{n-1}$ satisfacit $vv = v + 1$, und ist also $v = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, aus welcher Aequation man per hypothesin die radicem x finden kann.

Si concipiatur curva, cujus abscissa posita $= x$, applicata sit $y = \frac{x}{1.2^2} + \frac{x^2}{2.2^4} + \frac{x^3}{3.2^6} + \frac{x^4}{4.2^8} +$ etc. erit generaliter $y = l\frac{4}{4-x}$, und folglich ist die curva eine logarithmica, darin die applicata zum asymtoto wird, wenn $x = 4$. Es sey (Fig. 6) VCB eine logarithmica ordinaria asymtoton habens VD, deren subtangens constans $AT = 1$. Capiatur applicata $AC = 1$, et ducta alia quacunque PM, positisque $AP = t$, et $PM = u$, erit $t = lu$, seu $udt = du$. Jam ducatur applicata $DB = 4AC = 4$, erit $AD = l4$, et ducta MQ, fiet $BQ = x$ et $QM = y$ pro casu proposito. Erit enim $AP = t = l4 - y$ et $PM = u = 4 - x$, unde ob $t = lu$ erit $l4 - y = l(4 - x)$ et $y = l \cdot \frac{4}{4-x}$. Sonsten haben Ew. pro summa seriei ipsi y aequalis casu $x = 1$ geschrieben $\frac{1}{3}$, da diese Summ ist $= l \cdot \frac{4}{3}$.

Euler.

LETTRE XLV.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Sur un passage des oeuvres de Wallis, relatif au déchiffrement. Réponse à la lettre précédente. Considérations sur la sommation des séries. Théorème de géométrie.

Moscau d. 30. Juli n. St. 1742.

Ich gratulire Ew. zu der bevorstehenden perpetuellen Pension aus Paris, denn es scheinet je länger je mehr, dass Ew. die dortige Académie des sciences sich bey Austheilung der Preise gänzlich tributaire machen werden....

Ich erinnere mich in den von Wallisio dechifrirten Briefen einige Stellen angemerket zu haben, die einer andern interprétation bedürfen, wie es Ew., wenn sie nachfolgende remarques mit den Briefen selbst conferiren wollen, ohne Zweifel befinden werden. Tom. III Op. p. 666 lin. 4 hatte in dem Briefe gestanden 125. 44. 24. 123. 68. 28. Er setzet anstatt 24 die Zahl 26 und lieset 125. 44. 26. 123. 68. 28, *co n d ni st e*

welches kein französisches Wort ist, da doch vielmehr von dem Copisten die zwei Zahlen 40 und 20, oder die eine 348 ausgelassen worden und das ganze Wort heissen soll *Conclaviste*. Lin. 10 ibid. setzet er für 128 die Zahl 138 und interpretiret sie *Hongrois*; es ist aber viel wahrscheinlicher dass 128 recht geschrieben und *homme* heisst. Auch ist nicht zu sehen, warum pag. 665 lin. 7 von unten, die Zahl 380, welche er gar nicht in den clavem gesetzet, *pall* heissen soll, da dieselbe vielmehr *paye* bedeuten wird. Die Zahl 136, welche er gar nicht interpretirt, soll vermuthlich heissen *Dame*. Dessen ohngeachtet halte ich die von Wallisio bewerkstelligte Dechifrirung vor einen grossen effort de l'esprit humain. Er gestehet aber aufrichtig, dass ihm unterschiedene chifrirte Briefe in die Hände gekommen, daraus er nichts finden können.

Ich sehe wohl, dass bey meinen Briefen allezeit die Erinnerung nöthig ist: Omnia probate, weil es mehrentheils an gehöriger Attention fehlet; indessen wird es mir doch lieb seyn, wenn nur Etwas darin enthalten ist, so Ew. Approbation meritiret. An die Observation, welche Sie mir schon längst communiciret, dass die numeri $4m+1$ nur auf einerley Art in zwey quadrata getheilt werden können, habe ich damals, als ich den letzten Brief geschrieben, nicht gedacht. Dass alle Zahlen in der formula y^2+y-x^2 begriffen sind, ist gewiss; doch hätte dieses meiner damaligen Intention nichts gehindert, wenn nur die suppositiones $u=\frac{z^2+z}{4}+1$ und $x=\frac{z^2+z}{4}-1$ aus zulänglichen Grunden wären hergeleitet worden. Denn wie es in dieser Proposition: Quilibet numerus est aequalis tribus trigonalibus uni affirmativo et duobus negativis, darauf nicht ankommt, dass in

den tribus formulis $\frac{x^2+x-y^2-y-z^2-z}{2}$, x, y und z alle nur mögliche Zahlen bedeuten, sondern vor x auch gar wohl gesetzt werden kann $2u^2$, wenn man nur erweiset, dass diese adhibita substitutio dem numero cuicunque dato, so aus der ganzen erwähnten Formul herauskommen soll, nicht hinderlich ist, so würde es auch mit dem casu, dass jeder numerus aus tribus trigonalibus bestehet, eine gleiche Bewandniss haben, wenn die suppositio $x=\frac{z^2+z}{4}+1$ gnugsam gegründet wäre.

Bald nachdem ich meinen Brief geschrieben hatte, sahe ich, dass die Observation $\frac{p+2\pm\sqrt{(4p\quad m+3)}}{m}=$ numero integro von keiner Erheblichkeit ist. Vielleicht sind diese etwas besser: $1+16a^2+16b^2$ nunquam habet radicem hujus formae $4n-1$, sed semper hujus $4n+1$. Numerus $4x^4+1$ in unico casu est primus, si $x=1$.

Gleich wie es aber series numerorum gibt, welche entweder nicht können durch $4n-1$ dividiret werden, oder gar numeri primi sind, so wären auch dergleichen series von Zahlen zu suchen, die entweder numeri primi sind, oder durch $4n+1$ nicht können dividiret werden, oder wenigstens den divisorem minimum niemals hujus formae $4n+1$ haben; denn so oft es sich träfe, dass ein terminus ejus seriei gleich wurde a^2+1, könnte man demonstriren, dass es ein numerus primus sey. In der serie numerorum trigonalium unitate auctorum sind gewiss sehr wenige casus, da der divisor minimus ad hanc formam $4n+1$ gehöret. Einer von diesen casibus ereignet sich, wenn der exponens termini ist 252, und der numerus trigonalis unitate auctus aus den factoribus 29 und 401 bestehet. Wenn man aber

dergleichen casus, in quibus divisor minimus est hujus formae $4n+1$ durch eine generale Exception ausschliessen könnte, so wären alle termini hujus formae a^2+1, in sofern sie in selbiger Exception nicht begriffen sind, numeri primi.

Was ich von $v^{2n+1}=(2v+1)(v+1)^{n-1}$ geschrieben hatte war blos ex consideratione numeri $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ hergenommen, ohne zu vermuthen, dass die aequatio dividirt werden könnte, welches doch, wie ich jetzo sehe, in dergleichen Fällen unumgänglich nöthig ist.

So viel ich mich erinnere, ist mir niemals eine Methode data summa seriei $\frac{1}{a+\alpha x}+\frac{1}{b+\beta x}+\frac{1}{c+\gamma x}+$ etc. inveniendi summam $\frac{\alpha^{n-1}}{(a+\alpha x)^n}+\frac{\beta^{n-1}}{(b+\beta x)^n}+\frac{\gamma^{n-1}}{(c+\gamma x)^n}+$ etc. bekannt gewesen, ausser in dem Fall, da summa prioris seriei aus einer bekannten functione ipsius x bestehet; solchergestalt wird auch dato $\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+$ etc. summabili, die series $\alpha x+2^n\beta x^2+3^n\gamma x^3+4^n\delta x^4+$ etc. summabilis; welches aber nichts sonderliches ist, da hingegen die grösste Schwierigkeit darin bestehet, dass man in Ermangelung einer solchen functionis finitae ipsius x, eine expressionem aequivalentem substituiren und selbige hernach immer weiter differentiiren könne, wie Ew. es mit den sinibus arcuum circuli gemachet. Indessen will ich doch ein theorema hieher setzen, so mir nur seit einigen Tagen eingefallen: Sint tres series: $A \ldots a+b+c+d+$ etc., $B \ldots ab+(a+b)c+(a+b+c)d+$ etc., $C \ldots a^2+b^2+c^2+d^2+$ etc., dico esse $B=\frac{A^2-C}{2}$, unde sequitur cognitis summis duarum serierum ex his tribus, dari etiam summam tertiae seriei, et

cognita summa unius seriei, dari etiam rationem, quam alterutra series reliquarum habet ad alteram. Sit ex gr. $a = \frac{1}{m}$, $b = \frac{1}{m^2}$, $c = \frac{1}{m^3}$ etc. erit $B = \frac{1}{(m+1)(m-1)^2}$. Sit $a = 1$, $b = \frac{1}{3}$, $c = -\frac{1}{5}$, $d = -\frac{1}{7}$ (signis post binos quosque terminos alternantibus) erit series $B = 0$. Si ponatur $\frac{1}{2^n} - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{3^n} + \left(1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)\frac{1}{4^n} - \text{etc.} = f\pi^{2n}$, ubi $\pi =$ circumferentiae circuli cujus diameter 1, erit f functio ejusmodi ipsius n, quae posito $n = 1$ fiat $= \frac{6p^2 - \pi^2}{12}$, ubi $p = l2$. Si vero n ponatur numerus integer major unitate, tota functio fiat numerus rationalis, propterea quod in illa functione his casibus quantitates numeris p et π affectae sese destruunt. Hiebey habe ich observiret, dass $1 + p^2 = \frac{3\pi^2}{20}$ fere.

Ich möchte wohl wissen, ob Ew. die summas nachfolgender serierum $ab^2 + (a+b)c^2 + (a+b+c)d^2 +$ etc. und $a^2b + (a^2 + b^2)c + (a^2 + b^2 + c^2)d +$ etc., wenn $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$, $d = -\frac{1}{4}$, oder $a + b + c +$ etc. $= l2$ per logarithmos et quadraturam circuli exprimiren können?

Neulich fand ich einen Zettel, darauf von meiner Hand, vermuthlich schon vor einigen Jahren, geschrieben war: Seriei $1 + 2^p + 3^p + 4^p +$ etc. summa ad datum terminum x est:

$$1 + 2^p(x-1) + (3^p - 2^p)(x-1)\left(\frac{x-2}{2}\right) +$$
$$(4^p - 2.3^p + 2^p)(x-1)\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{x-3}{3}\right) +$$
$$(5^p - 3.4^p + 3.3^p - 2^p)(x-1)\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{x-3}{3}\right)\left(\frac{x-4}{4}\right) + \text{etc.}$$

quae series abrumpitur si p sit numerus integer affirmativus, nec plures continet terminos quam $p + 2$ continet unitates.

Auf einem andern Zettel fand ich Folgendes: Ex his formulis

I. u^n

II. $nu^{n+1} - (n+1)u^n$

III. $n^2 u^{n+2} - (2n^2 + 2n - 1)u^{n+1} + (n+1)^2 u^n$

IV. $n^3 u^{n+3} - (3n^3 + 3n^2 - 3n + 1)u^{n+2} + (3n^3 + 6n^2 - 4)u^{n+1} - (n+1)^3 u^n$,

quae in infinitum continuari possunt ea lege, ut si antecedens fuerit

$$n^p u^{n+p} + \alpha u^{n+p-1} + \beta u^{n+p-2} + \gamma u^{n+p-3} + \text{etc.},$$

sequens fiat

$$\begin{aligned} n^{p+1} u^{n+p+1} &- n^p(n+p+1)u^{n+p} - \alpha(n+p)u^{n+p-1} - \beta(n+p-1)u^{n+p-2} - \text{etc.} \\ &+ \alpha(n+1) \qquad\qquad\quad + \beta(n-2) \qquad\quad\;\; + \gamma(n-3) \qquad\quad + \text{etc.} \end{aligned}$$

Sumatur formula quaecunque A et in casu particulari, ubi fit $n = 0$, eadem formula ponatur $= B$, dico $\frac{A-B}{(u-1)^{p+1}}$ esse summatricem seriei $1 + 2^p u + 3^p u^2 + 4^p u^3 \ldots + n^p u^{n-1}$. Sit exempli causa $p = 1$, erit $A = nu^{n+1} - (n+1)u^n$, et in casu particulari, ubi $n = 0$, transit A in $-1 = B$, quapropter

$$\frac{A-B}{(u-1)^2} = \frac{nu^{n+1} - (n+1)u^n + 1}{(u-1)^2} = 1 + 2u + 3u^2 + 4u^3 \ldots + nu^{n-1}.$$

Sonst habe ich auch bemerket, dass die summa seriei $1 + 2^{2n} + 3^{2n} + 4^{2n} + \text{etc.}$ gleich sey

$$\frac{1}{2n} x^n (x+1)^n - \frac{(n-2)}{2^2 . 3} x^{n-1} (x+1)^{n-1} + \frac{(7n-8)(n-1)(n-3)}{2^4 . 3^2 . 5} x^{n-2} (x+1)^{n-2} - \text{etc.},$$

oder (posito $y = x(x+1)$) erit summatrix

$$= \frac{1}{2n}(y^n + ay^{n-1} + by^{n-2} + \ldots my^2),$$

ubi a, b, etc. determinantur hoc modo:

$$(n-1)\,a + n\,(n-1)\,(n-2) = 0$$

$$(n-2)\,b + \frac{a(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4.5} = 0$$

$$(n-3)\,c + \frac{b(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3} + \frac{a(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2.3.4.5}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{2.3.4.5.6.7} = 0.$$

Sollte auch hierin etwas verschrieben seyn, so kann ich es doch gleich rectificiren, wie denn auch dasjenige, was jetzo von den exponentibus paribus gesagt worden, auf alle exponentes in genere zu extendiren nicht schwer seyn würde.

In den compendiis geometricis, wo das theorema Pythagoricum demonstriret wird, sollte man billig solches auch von allen figuris similibus demonstriren, woraus denn dieses corollarium folget: Si (Fig. 7) triangulum rectangulum ABC tangatur a curva quacunque $AFBGC$ in tribus punctis A, B, C, et super basibus AB et BC describantur curvae ADA, BEC, ipsi curvae ABC per omnia similes, nec sese in aliis punctis, praeter A, B, C intersecantes, fore (deductis segmentis cancellatis AFB, BGC) reliquas quasi-lunulas $ADBF + BECG = \triangle\, ABC$, quae quasi-lunulae in lunulas veras transibunt, si curva ABC fuerit semicirculus.

Goldbach.

LETTRE XLVI.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Pièces de concours aux prix des académies de Paris et de Dijon. Recherches sur les nombres et les diviseurs. Considérations ultérieures sur les séries.

Berlin d. 28. August 1742.

Dass Ew. mir einen beständigen Tribut von der Akademie zu Paris prophezeien, erkenne ich als eine deutliche marque Dero gegen mich hegenden besondern Wohlgewogenheit mit der schuldigsten Dankbarkeit. Ob ich aber gleich zu Erhaltung dieses Vortheils meinerseits nicht ermangeln lasse, so scheinet doch meine von hieraus abgeschickten pièces eben dasjenige Schicksal betroffen zu haben, welches vor etlichen Jahren den Hn. Cammerherrn Korff so viel Mühe gekostet hat zu redressiren. Denn ich habe schon zu Anfang des vorigen Monats meine pièce über die Inclination des Magneten an den Hn. De Mairan geschickt, und gleichwohl noch keine Antwort, dass selbige angekommen, erhalten. Hernach

hatte ich verwichenen Martinm eine pièce über den motum fluidorum in canalibus elasticis an die Académie des sciences nach Dijon, von welcher über diese Materie ein Preis von 30 Louisd'or bestimmt war, gesandt, und gleichfalls darüber noch keine Antwort empfangen, welches mich glauben macht, dass diese beiden Pièeen entweder irgendwo aufgehalten, oder gar verloren gegangen seyn müssen, wobei ich nur dieses am meisten bedauere, dass ich von diesen beiden Pièeen keine Copien gehalten habe. — — —

Ew. Emendationen der von Wallisio dechiffrirten Briefe halte ich für ganz richtig, erkenne aber dabei mein Unvermögen, selbsten diese tiefsinnige Materie zu untersuchen.

Dass diese Expression $\sqrt{(1 + 16aa + 16bb)}$ niemals eine Zahl von dieser Form $4n - 1$ geben könne, ist ein sehr schönes theorema, davon die Demonstration nicht so leicht in die Augen fällt. Denn gesetzt, dass

$$4n - 1 = \sqrt{(1 + 16aa + 16bb)},$$

so würde $16nn - 8n = 16aa + 16bb$ und folglich

$$n(2n - 1) = 2(a^2 + b^2).$$

Weilen nun $2(aa + bb)$ ein numerus par ist, so müsste n ein numerus par seyn, indem $2n - 1$ gewiss impar ist. Es sey also $n = 2p$, so wird $2p(4p - 1) = 2(aa + bb)$ und dannenhero $4p - 1$ ein divisor formulae $aa + bb$, welches nicht seyn kann: oder $p(4p - 1)$ müsste eine summa duorum quadratorum seyn, welches ebenfalls nicht möglich ist.

Dass $4x^4 + 1$ niemals ein numerus primus seyn könne, ausser dem casu wenn $x = 1$, ist kein Wunder, weilen diese formula generaliter in duos factores resolviret werden kann, denn es ist $4x^4 + 1 = (2xx + 2x + 1)(2xx - 2x + 1)$.

Ob es solche series numerorum gebe, welche entweder durch $4n + 1$ nicht divisibiles, oder gar numeri primi sind,

zweifle ich sehr. Wenn aber gleichwohl dergleichen sich finden sollten, so würde man daraus einen grossen Vortheil zu Erfindung der numerorum primorum ziehen können.

Uebrigens halten die divisores primi aller serierum von Zahlen, welche in dieser formula enthalten sind $\alpha xx \pm \beta yy$, eine sehr artige Ordnung, welche, ungeachtet ich davon noch keine Demonstration habe, dennoch ihre völlige Richtigkeit zu haben scheint. Ich nehme deswegen die Freyheit Ew. einige dergleichen theoremata zu überschreiben, aus welchen noch unendlich viel andere hergeleitet werden können.

I. Si x et y sunt numeri primi inter se, haec formula $xx + yy$ per alios numeros primos non est divisibilis, nisi qui contineantur in hac forma $4n + 1$, atque hi numeri primi omnes ipsi in hac forma $xx + yy$ continentur. Dieses bekannte theorema setze ich voraus, um die Connexion der übrigen desto besser vor Augen zu legen.

II. Haec formula $2xx + yy$ alios divisores primos non habet, nisi qui in his formis $8n + 1$ vel $8n + 3$ contineantur. Et quoties $8n + 1$ vel $8n + 3$ fuerit numerus primus, erit is aggregatum ex quadrato et duplo alterius quadrati, seu erit formae $2xx + yy$.

III. Haec formula $3xx + yy$ alios divisores primos non habet, nisi qui in his formis $12n + 1$ et $12n + 7$ (oder in dieser einzelnen $6n + 1$) contineantur. Et quoties $6n + 1$ est numerus primus, continebitur in forma $3xx + yy$.

IV. Haec formula $5xx + yy$ alios divisores primos non habet, nisi qui in his formis $20n + 1$, $20n + 3$, $20n + 9$, $20n + 7$ contineantur, et omnis numerus primus in una harum quatuor formularum contentus erit ipse numerus formae $5xx + yy$.

V. Haec forma $6xx + yy$ alios divisores primos non habet, nisi qui in una harum quatuor formularum $24n + 1$, $24n + 5$, $24n + 7$, $24n + 11$ contineantur, et omnis numerus primus in una harum formularum contentus est ipse numerus formae $6xx + yy$.

VI. Haec forma $7xx + yy$ alios divisores primos non habet nisi qui in una harum 6 formularum $28n + 1$, $28n + 9$, $28n + 11$, $28n + 15$, $28n + 23$, $28n + 25$ (oder in einer dieser dreyen $14n + 1$, $14n + 9$, $14n + 11$) contineantur, et omnis numerus primus in una harum formularum contentus est ipse numerus formae $7xx + yy$.

Nun aber ist omnis numerus trigonalis unitate auctus in dieser formula $7xx + yy$ enthalten, und folglich können die numeri trigonales unitate aucti keine andern divisores primos haben, als welche in diesen formulis $14n + 1$, $14n + 9$, $14n + 11$, oder welches gleich viel, in dieser $7xx + yy$ enthalten sind. Hieraus lassen sich nun leicht alle numeri primi finden, welche einen numerum trigonalem unitate auctum dividiren. Solche sind nehmlich 1, 11, 23, 29, 37, 43, 53, 67, 71, 79, etc. Dahero können keine andere numeri primi hujus formae $4m + 1$ divisores seyn numeri trigonalis unitate aucti, als welche in einer von diesen drey formulis begriffen sind $28n + 1$, $28n + 9$, $28n + 25$.

Hieraus ist also klar, dass diese Expression $pxx + yy$ keine andere divisores habe, als welche in einer gewissen Anzahl von solchen formulis $4pn + s$ enthalten sind, allwo s einige Zahlen bedeutet, welche, ob sie gleich keine Ordnung unter sich zu haben scheinen, dennoch nach einer schönen lege fortgehen, welche aus diesen theorematis erhellet:

VII. Si numerus primus formae $4pn + s$ fuerit divisor formulae $pxx + yy$, tum etiam omnis numerus primus in hac forma generaliori contentus $4pn + s^{\lambda}$ erit divisor formulae $pxx + yy$ atque etiam ipse erit numerus formae $pxx + yy$. Ex. gr. Quia numerus primus $28n + 9$, est numerus formae $7xx + yy$, erunt etiam numeri primi $28n + 81$ $(28n + 25)$: $28n + 729$ $(28n + 1)$ etc. numeri formae $7xx + yy$.

VIII. Si duo numeri primi $4pn + s$ et $4pn + t$ fuerint divisores formulae $pxx + yy$, tum omnis numerus primus hujus formae $4pn + s^{\lambda}t^{i}$ erit simul numerus formae $pxx + yy$.

Wenn man also von einer solchen Expression $pxx + yy$ schon einige divisores primos entdecket hat, so kann man durch diese theoremata leicht alle mögliche finden. Als, es sey diese Formul gegeben $13xx + yy$, worin diese Zahlen 14, 17, 22, 29, 38, 49, 62 etc. enthalten sind. Numeri igitur primi, qui sunt divisores formulae $13xx + yy$ erunt 1, 7, 11, 17, 19, 29, 31. Folglich müssen alle numeri primi in his formulis $52n + 1$, $52n + 7$, $52n + 11$ etc. divisores von $13xx + yy$ seyn können. Die Formul $52n + 7$ giebt aber nach dem theorema VII noch diese $52n + 49$, $52n + 343$ (oder $52n + 31$), $52n + 7.31$, oder $52n + 9$, ferner $52n + 7.9$, oder $52n + 11$, ferner $52n + 7.11$, oder $52n + 25$, ferner $52n + 7.25$, oder $52n + 19$, ferner $52n + 7.19$, oder $52n + 29$, ferner $52n + 7.29$, oder $52n + 47$, ferner $52n + 7.47$, oder $52n + 17$, ferner $52n + 7.17$ oder $52n + 15$, ferner $52n + 7.15$, oder $52n + 1$ und hier ändert sich die Verschiedenheit der Zahlen, welche zu $52n$ gesetzt werden können, um numeros primos in forma $13xx + yy$ contentos hervorzubringen. Also nur allein daraus, dass 7 ein divisor formae $13xx + yy$ seyn kann,

weisen die beiden letzten theoremata, dass alle numeri primi in his formulis

$$52n+1;\quad 52n+31;\quad 52n+25:\quad 52n+47$$
$$52n+7;\quad 52n+9:\quad 52n+19;\quad 52n+7$$
$$52n+49;\quad 52n+11;\quad 52n+29:\quad 5\ n+15$$

contenti diese Form $13xx+yy$ haben und auch divisores von solchen Zahlen $13xx+yy$ seyn können, und mehr formulae können auch durch die theoremata nicht herausgebracht werden. Dahero gewiss ist, dass kein anderer numerus primus ein divisor formae $13xx+yy$ seyn kann, als welcher in einer der gefundenen 12 Formuln enthalten ist. Weilen nun ein jeder numerus primus in hac forma contentus $4pn+1$ ein divisor von $pxx+yy$ seyn kann. Hieher können schöne proprietates hergeleitet werden, als z. Ex. weil 17 ein numerus primus und auch von dieser Form $2xx+yy$, so ist gewiss, dass so oft $17^{m}\pm 8n$ ein numerus primus ist, solcher auch eine solche Zahl $2xx+yy$ seyn müsse. Und wenn $17^{m}\pm 8n$ eine Zahl ist von dieser Form $2xx+yy$ und doch keinen divisorem von dieser Form admittirt, so ist dieselbe gewiss ein numerus primus.

Eine gleiche Beschaffenheit hat es auch mit den divisoribus hujusmodi formularum $pxx-yy$ oder $xx-pyy$, welche wenn sie primi sind, in dieser Form $4np\pm s$ enthalten seyn müssen, da s einige determinirte Zahlen bedeutet. Nehmlich in einigen Fällen wird seyn

1. Omnes divisores primi formae $xx-yy$ continentur in $4n\pm 1$, welches klar.

2. Omnes divisores primi formae $2xx-yy$ continentur in $8n\pm 1$.

Coroll. Ergo numerus primus $8n \pm 3$ non est numerus formae $2xx - yy$.

3. Omnes divisores primi formae $3xx - yy$ continentur in forma $12n \pm 1$.

4. Omnes divisores primi formae $5xx - yy$ continentur vel in $20n \pm 1$ vel in $20n \pm 9$ (oder in dieser einzeln $10n \pm 1$).

etc

Et si numerus primus $4pn + s$ fuerit divisor formae $pxx - yy$ oder $xx - pyy$, tum $\pm 4np \pm s^{\lambda}$ erit ipse numerus formae $pxx - yy$ vel $xx - pyy$, quoties fuerit numerus primus. Si duo numeri primi s et t fuerint numeri formae $pxx - yy$, tum quoties $\pm 4np \pm s^{\mu} t^{\nu}$ fuerit numerus primus, simul erit numerus formae $pxx - yy$. Also weil 7 und 17 numeri primi und von dieser Form $2xx - yy$ sind, so wird auch $\pm 8n \pm 7^{\mu}.17^{\nu}$ eine Zahl von dieser Form seyn, so oft dieselbe ein numerus primus ist. Es sey $\mu = 1$, $\nu = 1$, so ist $7.17 = 119$ und $119 + 8 = 127$ = numero primo, folglich wird seyn $127 = 2xx - yy = 2.64 - 1$. Hieraus ist nun klar, dass es nicht möglich ist Suiten von Zahlen, so in einer solchen Formul $pxx \pm qyy$ begriffen sind, zu finden, welche nicht divisores von dieser Art $4n + 1$ admittiren sollten.

Ich glaube aber fest, dass ich diese Materie bei weitem noch nicht erschöpfet habe, sondern, dass sich darin noch unzählig viele herrliche proprietates numerorum entdecken lassen, wodurch die doctrina de divisoribus zu einer weit grösseren Vollkommenheit gebracht werden könnte; und bin dabei gewiss, dass wenn Ew. diese Materie einiger Attention wurdigen werden, Dieselben darin sehr wichtige Découverten machen würden. Der grösste Vortheil wurde

aber sich alsdann recht zeigen, wenn man für diese theoremata demonstrationes finden sollte.

Wenn drey Series also beschaffen sind, dass $A = a + b + c + d + \text{etc.}$, $B = ab + (a + b)c + (a + b + c)d + \text{etc.}$ et $C = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{etc.}$, so ist B die summa factorum ex binis terminis seriei A, und ist folglich die dupla summa factorum ex binis, $2B$, una cum summa quadratorum singulorum C gleich dem quadrato seriei A, seu $2B + C = AA$ et $B = \frac{AA - C}{2}$. Solche theoremata können auf höhere potestates extendirt werden Als wenn

$$A = a + b + c + d + \text{etc.}$$
$$B = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{etc.}$$
$$C = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + \text{etc.}$$
$$D = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + \text{etc.}$$

so wird seyn terminorum a, b, c, d, e etc.

summa factorum ex binis $= \frac{A^2 - B}{2}$

„ „ ex ternis $= \frac{A^3 - 3AB + 2C}{6}$

„ „ ex quaternis $= \frac{A^4 - 6A^2B + 8AC + 3B^2 - 6D}{24}$

etc.

Wenn Ihre mir proponirten Series gesetzt werden

$$P = ab^2 + (a + b)c^2 + (a + b + c)d^2 + (a + b + c + d)e^2 + \text{etc.}$$
$$Q = a^2b + (a^2 + b^2)c + (a^2 + b^2 + c^2)d + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)e + \text{etc.}$$

so wird seyn $P + Q = AB - C$, folglich wenn

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{etc.}$$
$$B = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.}$$
$$C = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{64} + \frac{1}{125} - \text{etc.}$$

so kann die summa der beiden serierum $P + Q$ nicht per logarithmos et quadraturam circuli angegeben werden, weilen die series C noch nicht summirt werden kann. Viel weniger kann also eine jede für sich summirt werden. Wenn aber dieses geschehen könnte, so hätte man die summam seriei C, welche ich bisher vergebens gesucht. Die valores $1 + p^2$ und $\frac{3\pi^2}{20}$, wenn $p = l2$, differiren so wenig von einander, dass ich dieselben bald für völlig gleich gehalten hätte; ich habe deswegen beider valores genauer gesucht und gefunden $1 + p^2 = 1{,}4804530139$ und $\frac{3}{20}\pi^2 = 1{,}48044066$.

Die formulae, welche Ew. mir für die summationem seriei $1 + 2^p + 3^p + 4^p +$ etc. usque ad datum terminum uberschrieben, erinnere ich mich noch in Petersburg bei Denselben gesehen zu haben, und entspringet die erste Expression $1 + 2^p(x-1) + (3^p - 2^p)\frac{(x-1)(x-2)}{1.2} +$ etc. ex differentiis continuo sumtis, und die andern formulae kommen per differentiationem heraus. Um aber die summam in der bequemsten Form zu finden, so halte ich diese Art für die leichteste:

$$1 + 2^p + 3^p + 4^p \ldots + x^p =$$

$$\frac{x^{p+1}}{p+1} + \frac{x^p}{1.2} + \frac{p}{2.3} \cdot \frac{1}{2} x^{p-1} - \frac{p(p-1)(p-2)}{2.3.4.5} \cdot \frac{1}{6} x^{p-3}$$

$$+ \frac{p(p-1)\ldots(p-4)}{2.3\ldots7} \cdot \frac{1}{6} x^{p-5} - \frac{p(p-1)\ldots(p-6)}{2.3\ldots9} \cdot \frac{3}{10} x^{p-7}$$

$$+ \frac{p(p-1)\ldots(p-8)}{2.3\ldots11} \cdot \frac{5}{6} x^{p-9} - \frac{p(p-1)\ldots(p-10)}{2.3\ldots13} \cdot \frac{691}{210} x^{p-11}$$

$$+ \frac{p(p-1)\ldots(p-12)}{2.3\ldots15} \cdot \frac{35}{2} x^{p-13} - \text{etc.}$$

allwo das Hauptwerk auf diese seriem fractionum ankommt, welche Ew. genugsam noch bekannt seyn wird:

$$\overset{1}{\frac{1}{2}},\ \overset{2}{\frac{1}{6}},\ \overset{3}{\frac{1}{6}},\ \overset{4}{\frac{3}{10}},\ \overset{5}{\frac{5}{6}},\ \overset{6}{\frac{691}{210}},\ \overset{7}{\frac{35}{2}},\ \overset{8}{\frac{3617}{30}},\ \overset{9}{\frac{43867}{42}},\ \overset{10}{\frac{1222277}{110}},\ \overset{11}{\frac{854513}{6}},$$

$$\overset{12}{\frac{1181820455}{546}},\ \overset{13}{\frac{76977927}{2}};$$

so weit habe ich sie continuirt. Der terminus generalis exponenti n respondens kann also exprimirt werden

$$(2n+1)\Big(-\frac{1}{2}+\frac{(2^{2n}-2.1)}{3}-\frac{(3^{2n}-3.2^{2n}+3.1)}{4}$$
$$+\frac{(4^{2n}-4.3^{2n}+6.2^{2n}-4.1)}{5}\ \text{etc.}\Big)$$

welche gleichfalls abrumpirt wird.

Obgleich diese series $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+$ etc. per quadraturam circuli exprimirt wird, so kann doch die Summ von dieser $x+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}+\frac{x^4}{16}+$ etc. nicht generaliter gegeben werden, und ausser dem casu $x=1$ habe bisher noch keinen andern, als wenn $x=\frac{1}{2}$, summiren können. Nehmlich posito $p=l2$ et $\pi:1=$ periph.:diam, so kommt heraus

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{16.16}+\frac{1}{25.32}+\frac{1}{36.64}+\text{etc.}=\frac{\pi\pi-6pp}{12}.$$

Endlich habe die Ehre noch dieses theorema hinzuzufugen, welches öfters einen grossen Nutzen haben kann:

Theorema. Si fuerit

$$s=1+\frac{a}{n+1}+\frac{aa}{2n+1}+\frac{a^3}{3n+1}+\frac{a^4}{4n+1}+\text{etc.}$$

erit

$$\frac{ss}{2}=\frac{1}{2}+\frac{a}{n+2}\Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)+\frac{aa}{2n+2}\Big(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\Big)$$
$$+\frac{a^3}{3n+2}\Big(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3n+1}\Big)$$
$$+\frac{a^4}{4n+2}\Big(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{4n+1}\Big)+\text{etc.}$$

Leonh. Euler.

LETTRE XLVII.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Réponse à la lettre précédente Introduction de deux nouveaux signes: 8 et ÷. Globules de sang de Leuwenhoek. Notice littéraire

Moscau d. 1 October st. n. 1742.

——— Dass $p(4p-1)$ keine summa duorum quadratorum seyn kann, wird von Ew. als bekannt angenommen, ich deducire es aber daher, quia $n = 2p \pm \sqrt{(4p^2 - p - a^2)}$, und dieses, quia $n^2 = 4pn - p - a^2$. Sonst habe ich auch gefunden, dass eine summa trium datorum quadratorum nicht gleich seyn kann dem facto ex duobus, multiplicato per quadratum par, oder dass $e^2 + f^2 + g^2 = 4e^2f^2p^2$; imgleichen si est $fmn - m - n = a^2$ (ubi f, m, n, a sint integri affirmativi), erit etiam $fp^2mn - m - n = a^2$, ubi p praeterea sit integer. Da es aber mit dem casu $f = 4$ be-

kanntermaassen in aequatione priori seine Richtigkeit hat, so wird auch $4mnp^2 - m - n = a^2$, und kann gar wohl seyn, dass f für sich selbst noch viele oder unzählige valores ausser dem quaternario hat, wie es sich denn findet, dass wenn alle divisores primi hujus numeri $3xx + yy$ (ubi x et y sunt numeri inter se primi), unter dieser formula $6n + 1$ begriffen sind (de quo dubitare nefas), f auch $= 12$ gesetzt werden kann, folglich $12mnp^2 - m - n = a^2$. Ich habe unter den remarques, so Ew. mir von den divisoribus formulae $px^2 + y^2$ communiciren wollen, insonderheit diese betrachtet, dass ein jeder numerus trigonalis unitate auctus in dieser formula $7xx + yy$ enthalten ist und dahero keine andere divisores primos haben soll, als welche in diesen formulis $14n + 1$, $14n + 9$, $14n + 11$ bestehen. Weil aber unzählige numeri trigonales (als z. Ex. 21) unitate aucti zu dieser Formul $7x^2 + y^2$ gleichwol nicht gebracht werden können, so verstehe ich Ew. theorema nur von den numeris trigonalibus paribus, quorum scilicet exponentes sunt hujus formae $4m - \frac{(1 \mp 1)}{2}$, denn dieser exponentium trigonales unitate aucti sind offenbar $7m^2 + (m \pm 1)^2$, und gehören alle, sie mögen primi oder non primi seyn, unter nachfolgende 4 classes: $7n + 0$, $7n + 1$, $7n + 2$, $7n + 4$, welches jedoch mit Ew. Specification der divisorum (als worin der numerus 7 ausgelassen ist) nicht übereinkommet. Ich bin indessen Ew für die Communication dieser besondern theorematum sehr verbunden, ohngeachtet ich nicht alles pro rei dignitate einsehen kann.

Nach dem von Ew. mir schon längst communicirten valore $l2$, hatte ich $1 + l2 . l2$ gefunden 1480453017915 20...,

welcher von den in Dero Schreiben angefuhrten Zahlen etwas differirt, weil aber der error sich erst nach der neunten Ziffer äussert, will ich den von Ew. angegebenen valorem lieber für wahr annehmen, als die Multiplication wiederholen.

Die 12 terminos seriei $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{10}$, etc. habe ich auch schon längst abgeschrieben gehabt und den 13ten aus Dero letztem Briefe bereits dazu gesetzet.

Das quadratum seriei $s = 1 + \frac{a}{n-1} + \frac{a^2}{2n+1} +$ etc., welches ist

$$ss = 2\left(1 + \frac{a}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \text{etc.}\right)$$

scheinet nur blos deswegen merkwürdig zu seyn, weil die coëfficientes in einer so leichten Ordnung fortgehen.

Was ich in meinem vorigen von den lunulis geschrieben hatte, ist von Ew. vermuthlich übergangen worden, nicht weil es unrichtig, sondern weil es gar zu offenbar ist.

Da nach der angenommenen Bedeutung der signorum $\pm$ und $\mp$ diese Formul $\pm a \mp b$ entweder $a - b$ oder $-a + b$ heissen muss, so ist allerdings ein signum nützlich, welches ausser diesen beiden valoribus auch $a + b$ und $-a - b$ andeutet; dieses erinnere ich mich in einigen Buchern mit ∞ ausgedruckt gesehen zu haben, und auf solche Weise halte ich dafür, dass man durch $\infty 1 \infty \frac{1}{2} \infty \frac{1}{3} \infty \frac{1}{4} \infty$ etc. alle quantitates rationales, surdas et a quibuscunque quadraturis pendentes exprimiren könne; die ganze Kunst bestehet nur darin, dass die signa $+$ et $-$ suis locis recht substituiret werden.

Weil aber doch das signum 8 nur alternative entweder + oder — bedeutet, so kann man noch ein signum, etwa ÷ (welches der Stifelius vor ∓ zu gebrauchen pfleget) in diesem Verstande annehmen, dass es simul et + et — bedeute. So gibt es ex. gr. eine seriem numerorum n, der apparence nach valde irregularem, und die wohl noch von Niemanden consideriret seyn mag, von dieser Beschaffenheit $n \div p = P$, wo p und P numeros primos bedeuten, so dass, wenn $n-p$ ein numerus primus ist, ex natura numeri n auch $n+p$ ein numerus primus seyn muss; durch n aber werden folgende numeri angedeutet 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 18, 24, 30, etc. Gleichwie nun alle numeri primi majores quam 3 unter die Formul $6m \pm 1$ gehören, so hat es das Ansehen, dass die termini dieser neuen seriei, welche grösser als 8 sind, in der Formul $6m$ begriffen seyen.

Die series numerorum 2, 4, 6, 10, 14, 16, 20, 24, etc. deren quadrata, unitate aucta, numeri primi sind, scheinet diese proprietatem zu haben, dass eine jede Zahl aus zweyen der vorhergehenden bestehe, als $6 = 2 + 4$, $24 = 10 + 14$, $20 = 4 + 16$. Oftmals ist der terminus unico modo ex duobus praecedentibus compositus, als $74 = 20 + 54$.

Es ist unlängst bei einer gewissen Gelegenheit darüber raisonniret worden, ob die globi sanguinei, welche nach des Leuwenhoeks Observation, 6 zusammen einen globum majorem formiren, nicht ferner aus 6 kleinern, und diese wieder aus 6 kleineren, et sic in infinitum zusammengesetzt seyn könnten? Wenn aber 6 globi intra cavitatem globi majoris solchergestalt concipiret werden, dass sie sich einander so viel möglich berühren, so wird der diameter globi cujusvis minoris sich ad diametrum globi majoris, in quo

continentur, verhalten wie 1 zu $1 + \sqrt{2}$, und wenn dieses auf die globos sanguineos, deren ein jeder für sich selbst nicht eigentlich ein globus, sondern ein aggregatum sex minorum globorum ist, appliciret wird, diese kleineren globuli aber, wie gemeldet, aus 6 noch kleineren etc. bestehen sollen, so findet es sich, dass man nothwendig bei einem gewissen gradu determinato mit solcher diminutione globorum aufhören muss; denn weil die soliditas omnium globorum ex ordine n ad soliditatem unius globi ex ordine primo ist wie $\frac{6^{n-1}}{(1+\sqrt{2})^{3n-3}}$ ad 1, so würde, wenn die subdivisio auf gleiche Art in infinitum fortginge, propter $n = \infty$, das aggregatum omnium istorum globorum respectu globi maximi infinite parvum seyn, folglich auch mit dem besten microscopio nicht gesehen werden können, welches der expérience zuwider läuft. Ich habe (Tit.) den Hn. von Bl....*), mit welchem ich hierüber gesprochen, meo periculo versichert, dass es Ew. eben so finden würden, und bitte mir desfalls Dero sentiment hievon mit wenigem zu melden. Bei dem *meo periculo* fällt mir der Matanasius ein, davon ich unlängst die 6te Edition gelesen, nachdem ich das Buch in 18 Jahren nicht gesehen hatte. Die approbation générale, so es bey dem Publico gefunden, und davon der Autor selbst unterschiedene passages anführt, zeuget in der That von dessen mérite, und trifft hier gewissermaassen des Ciceronis Ausspruch ein: *Id ipsum est summi oratoris, summum oratorem populo videri.*

Ich habe mich nach einem Buch, so den Titul führet *Labyrinthus Algebrae*, Aut. Joh. Jac. Ferguson, Hagae

*) Blumentrost?

Com. 1667. 4. und ich selbst schon vor 30 Jahren in Händen gehabt (wiewohl nichts daraus behalten) bey unterschiedenen Personen vergeblich erkundigt. Dem Hn. Hermann, welcher doch eine grosse connoissance von dieser Art Büchern hatte, war es auch ganz unbekannt. Neulich fand ich ohngefähr obgedachten Titul in meinen excerptis, und dabey geschrieben, de quo tractatu indicium vide in Actis Anglicanis ad ann. 1669 mens. Jul. p. 202. Vielleicht ist etwas darin, so einige Attention meritiret.

Goldbach.

LETTRE XLVIII.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Réponse. Continuation sur les mêmes sujets.

Berlin d. 27 October 1742.

Wenn Ew. eine solche Demonstration haben, dass $n^2 = 4pn - p - a^2$, worin nicht angenommen wird, dass $q(4p-1)$ keine summa duorum quadratorum seyn kann, so ist dieselbe höchst merkwürdig, indem daraus nicht nur diese Wahrheit, sondern noch viel andere weit leichter demonstrirt werden können. Ich muss inzwischen gestehen, dass ich aller angewandten Mühe ungeachtet keine andere Demonstration habe finden können. Hingegen sehe ich deutlich ein, dass $ee + ff + gg = 4e^2f^2p^2$; denn soll eine summa trium quadratorum einen numerum parem machen, so muss

entweder nur ein quadratum oder alle drey quadrata paria seyn. Im ersten Fall kommt ein numerus impariter par heraus, welcher folglich kein Quadrat seyn kann; dahero ist klar, dass alle drey quadrata paria seyn müssen. Es sey also $e = 2a$, $f = 2b$, $g = 2c$, so müsste $aa + bb + cc$ gleich seyn $16a^2 b^2 p^2$, und folglich müssten um so viel mehr a, b und c numeri pares seyn, und so fort in infinitum. Aus diesem Grunde folget also noch dieser generalere Satz, dass $a^2 + b^2 + c^2 = 4abn$. Si $fmn - m - n = a^2$, erit quoque positis mpp et npp pro m et n, $fmnp^4 - mpp - npp = \square$ und folglich $fmnpp - m - n = \square$. Damit aber die erste Aequation ihre Richtigkeit habe, so kann freylich der coëfficiens f praeter 4 unendlich viel andere valores haben, wie Ew. angemerket haben; wobei ich hierauf gefallen, dass si formulae $faa + 1$ nullus extat divisor formae $4fm - 1$, auch immer $4fmn - m - n = \square$. Weil nun nach den letztens uberschriebenen Observationen, hujusmodi formula $faa + bb$ dividi nequit per numerum primum formae $4fm - 1$, so folget generaliter dass $4fmn - m - n =$ quadrato, welcher Universal-Satz sich vielleicht noch leichter demonstriren lässt, als ein casus particularis. Es käme also darauf an, dass man demonstrirte, dass $\frac{aa + m + n}{4mn}$ nimmermehr ein numerus integer seyn könne, oder dass $\frac{aa + p}{pp - qq}$, ubi p et q uterque vel numerus par vel impar esse debet, kein numerus integer seyn könne. oder dass $mpp - mqq - p$ kein quadratum seyn könne. — Bey Ueberschreibung der divisorum primorum formulae $pxx + yy$, welche alle in solchen formulis exprimirt werden können $4p + \alpha$, $4p + \beta$ etc., habe vergessen zu melden, dass aus ser diesen, der binarius et ipse numerus p ejusve divisores

Platz finden, deren numerus determinatus ist, und in den vorigen formulis nicht begriffen sind, und folglich à part bemerkt werden müssen. Also sind alle divisores primi formae $7xx + yy$ entweder 2, oder 7, oder in diesen Formuln enthalten $14n + 1$, $14n + 9$, $14n + 11$; und so oft $14n + 1$, oder $14n + 9$, oder $14n + 11$ ein numerus primus ist, so hat derselbe selbst diese formam $7xx + yy$. Alle numeri trigonales aucti unitate $\frac{xx+x}{2} + 1$ sind zwar nicht eigentlich in $7xx + yy$ enthalten, sondern in $\frac{7xx + yy}{4}$; und sind also alle numeri trigonales unitate aucti et quater sumti in dieser Form begriffen $7xx + yy$. Da nun das simplum keine andere divisores haben kann, als das quadruplum, so folget dem ungeacht, dass alle numeri primi, qui sunt divisores cujusque numeri trigonalis unitate aucti, in diesen Expressionen begriffen sind: 2, 7, $14n + 1$, $14n + 9$, $14n + 11$, und dagegen wird keine Exception gefunden werden. Dass unsere expressiones pro $l2.l2$ nicht völlig übereinkommen, rührt ohne Zweifel daher, dass der $l2$ in beiden calculis nicht gleich accurat genommen worden. Ich erinnere mich nicht mehr auf wie viel Figuren ich den $l2$ genommen; ich habe solchen in meinen Schriften nur auf 16 Figuren aufgezeichnet; es ist aber noch accurater

$$l2 = 0{,}69314718055994530941723 21$$

und nachdem ich die Multiplication nochmal gemacht, so finde ich $l2.l2 = 0{,}4804530139182014246671024$.

Das gemeldete theorema: Si

$$s = 1 + \frac{a}{n+1} + \frac{a^2}{2n+1} + \frac{a^3}{3n+1} + \text{etc.}$$

erit

$$\frac{ss}{2} = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \text{etc.}$$

ist deswegen merkwürdig, weilen durch dasselbe sehr leicht die summa hujus seriei $1+\frac{1}{3.3}+\frac{1}{5.5}+\frac{1}{7.7}+\frac{1}{9.9}+$ etc. gefunden werden kann. Denn weilen ist

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\text{ etc.}$$

ponatur summa quadratorum horum terminorum

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\text{etc.}=p,$$

et summa factorum ex binis terminis illius seriei

$$\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\text{ etc.}\right)=q, \text{ erit } p+2q=\frac{\pi\pi}{16}.$$

Erit autem

$$\begin{aligned}
q=&-\frac{1}{1.3}-\frac{1}{3.5}-\frac{1}{5.7}-\text{etc.}=-\frac{1}{2}\ (1)\\
&+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{3.7}+\frac{1}{5.9}+\text{etc.}=+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right)\\
&-\frac{1}{1.7}-\frac{1}{3.9}-\frac{1}{5.11}-\text{etc.}=-\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\\
&+\frac{1}{1.9}+\frac{1}{3.11}+\frac{1}{5.13}+\text{etc.}=+\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right).
\end{aligned}$$

Es ist also

$$\begin{aligned}
-q=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\\
-\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\text{ etc.}
\end{aligned}$$

Wenn nun in obiger serie genommen wird $a=-1$ und $n=2$, und also gesetzt wird

$$s=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\text{etc.}=\frac{\pi}{4}$$

erit $-q=\frac{ss}{2}=\frac{\pi\pi}{32}$. Dahero, weilen $p=\frac{\pi\pi}{16}-2q$, so ist $p=\frac{2\pi\pi}{16}=\frac{\pi\pi}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+$ etc. Und gleichergestalt kann dieses theorema bey andern Gelegenheiten ganz unerwartete nützliche Dienste leisten. Dass in meinem

vorigen Ew. Einfall de lunulis nicht beantwortet habe, ist aus Versehen geschehen. Der Grund davon ist zwar ex similitudine figurarum leicht einzusehen, indessen können daraus doch solche curieuse Consequenzen gezogen werden, welche auf eine andere Art schwerlich bewiesen werden können.

Was für Zahlen für n angenommen werden können, dass wenn $n - p$ ein numerus primus ist, auch $n + p$ ein solcher werde, und dabei p einen numerum primum bedeute, kann meines Erachtens nicht generaliter angezeiget werden. Wenn aber für p eine determinirte Zahl angenommen wird, so können quovis casu series numerorum pro n gefunden werden: als, wenn $p = 1$, so hat man für n diese Zahlen 2, 4, 6, 12, 18, 30, 42, 60, 72, etc., als welche Zahlen sive aucti sive minuti unitate numeros primos geben. Ist $p = 2$, so kommt für n diese series 3, 5, 9, 15, 21, 39, 45, 69, 81, etc. Weil aber hier lauter numeri impares kommen, so sey $p = 3$, und für alle valores von n kommt diese series 4, 8, 10, 14, 16, 20, 26, 34, 40, etc. Datur ergo unicus numerus 4 qui omnibus numeris primis (excepto 2) se minoribus sive auctus sive minutus producat numeros primos. Der grosse Vortheil, welchen uns die analysis bringt, kommt in der That nur von den signis her, welche man nach gewissen Grundsätzen zu tractiren pflegt, und dahero stehen noch sehr wichtige Erweiterungen zu vermuthen, wenn man neue signa introduciren sollte. Die Hauptsach aber wird auch auf die Erfindung der Regeln ankommen, nach welchen man dieselben signa tractiren muss. Der Newton in Arithmetica universali hat die signa dubia nur durch puncta angedeutet, und kann deswegen, weil dadurch die Multiplication angedeutet zu werden pflegt,

nicht imitirt werden. — Ew. Reflexion über die compositionem globulorum sanguineorum hat ihre völlige Richtigkeit; dergestalt, dass wenn eine similis compositio in infinitum fortginge, die quantitas materiae völlig evanescirte. Es sey A das volumen eines globi sanguinei, welches zugleich die quantitatem materiae, oder sein Gewicht, anzeigen würde, wenn der globus solid oder massiv wäre. Ist aber derselbe aus 6 globulis zusammengesetzt, welche alle solid sind, so ist die quantitas materiae nur $= \frac{6A}{(1+\sqrt{2})^3} = \frac{6A}{7+5\sqrt{2}}$ $= 0{,}4264068706\,A$, das ist, die quantitas materiae in einem solchen globulo sanguineo contentae wird beinahe $\frac{14}{6}$ mal kleiner seyn, als wenn derselbe solid wäre. Sollten diese 6 globuli wiederum aus 6 noch kleinern zusammengesetzt seyn, so würde die quantitas materiae, und folglich das pondus $\frac{14}{6} \cdot \frac{14}{6}$ d. i. $\frac{196}{36}$ oder 5 mal geringer und auf solche Art bald imperceptibel werden. Da nun aber doch ein jeder globulus sanguineus ein Gewicht hat, so ist klar, dass diese Art der Zusammensetzung nicht weit fortgehet und nicht einmal sich über die dritte Ordnung erstreckt. Denn sollte ein jeder von diesen globulis wiederum aus 6 andern bestehen, wenn auch diese so schwer als Gold angenommen würden, so könnte doch das wirkliche Gewicht nicht herauskommen. Um dieses deutlicher einzusehen, so sey die gravitas specifica materiae, ex qua globuli non amplius compositi constant, $= n$. Wenn also die globuli sanguinei selbst solid wären und aus dieser Materie beständen, so würde ihre gravitas specifica gleich seyn $n = 1{,}0000000\,n$ wären aber die globuli II ord. solid, so ist

die gravitas specifica . . . . $= 0{,}4264068\,n$

sind erst die globuli III ord. solid, so ist die
gravitas specifica .... $= 0{,}1818228 . n$
sind die globuli IV ord. solid, so ist die
gravitas specifica .... $= 0{,}0775305 . n$
sind die globuli V ord. solid, so ist die
gravitas specifica .... $= 0{,}0330595 . n$
Wenn also die gravitas specifica ultimae materiae sanguinem constituentis so schwer wäre als Gold, und erst die globuli V[ti] ordinis solid wären, so würde doch die gravitas specifica sanguinis schon 30 Mal kleiner seyn, als des Golds, und also fast um die Hälfte leichter als Wasser. Da nun die gravitas specifica sanguinis nicht kleiner ist als des Wassers, und die ultima materia bey weitem nicht so schwer als Gold angenommen werden kann, so ist ganz klar, dass dieser modus compositionis cujusque globuli ex sex minoribus sich unmöglich ultra III[um] ordinem erstrecken könne.

Bey dem obgedachten theoremate, dass $4nab - a - b$ nimmer ein numerus quadratus seyn könne, oder dass $\frac{pp+a+b}{ab}$ kein numerus integer per quaternarium divisibilis sey, habe ich zwar gesehen, dass $\frac{pp+a+b}{ab}$ infinitis casibus ein numerus integer werden kann; derselbe ist aber allezeit entweder impar oder doch impariter par; infinitis autem valoribus pro a et b assumtis, kann $\frac{pp+a+b}{ab}$ nicht einmal ein numerus integer werden. Sit $a = 1$, $b = 1$, erit $\frac{pp+a+b}{ab} = pp + 2$ und also entweder impar oder impariter par. Sit $a = 1$, $b = 2$, erit $\frac{pp+a+b}{ab} = \frac{pp+3}{2}$: (2, 6, 14, 26, etc.) nehmlich allezeit impariter par. Sit $a = 1$, $b = 3$, erit

$\frac{pp+a+b}{ab} = \frac{pp+4}{3}$, welche Formul nimmer ein numerus integer seyn kann. Sit $a=1$, $b=4$, erit $\frac{pp+a+b}{ab} = \frac{pp+5}{4}$; diese kann auch nimmer ein numerus integer werden. Sit $a=1$, $b=5$, erit $\frac{pp+a+b}{ab} = \frac{pp+6}{5}$: (2, 3, 11, 14, 30, etc.) entweder impar oder impariter par. Sit $a=2$, $b=2$, erit $\frac{pp+a+b}{ab} = \frac{pp+4}{4}$: (1, 2, 5, 10, 17, 26, etc.) welche numeri entweder impares oder impariter pares. Sit $a=2$, $b=3$, erit $\frac{pp+a+b}{ab} = \frac{pp+5}{6}$: (1, 5, 9, 21, etc.), alle impares. Sit $a=2$, $b=4$, erit $\frac{pp+a+b}{ab} = \frac{pp+6}{8}$, also muss seyn $p=2q$ und $\frac{2qq+3}{4} =$ int., welches unmöglich. Sit $a=2$, $b=5$, erit $\frac{pp+a+b}{ab} = \frac{pp+7}{10}$, welche Formul kein numerus integer seyn kann. Sit $a=2$, $b=6$, erit $\frac{pp+a+b}{ab} = \frac{pp+8}{12}$: (1, 2, 6, 9, 17, 22, etc.) wo kein multiplum quaternarii vorkommt. Wenn man vielleicht diese casus weiter continuiret und wohl erwägt, so könnte man den wahren Grund finden, warum $\frac{pp+a+b}{ab}$ niemals ein numerus integer per 4 divisibilis werden kann. Es scheinen auch aus der Form $\frac{pp+a+b}{ab}$ ausser den multiplis quaternarii noch andere Zahlen ausgeschlossen zu seyn, als z. Ex. 7, denn ich habe noch keine valores pro a, b et p finden können, ut $\frac{pp+a+b}{ab}$ fieret $= 7$, dem ungeachtet aber können multipla von 7, als 14, 21, etc. herauskommen Es scheinen also in dergleichen Speculationen noch.. grosse

Geheimnisse verborgen zu liegen, wovon dem Fermatio einige wichtige bekannt gewesen seyn mögen, deren Verlust um so viel mehr zu bedauern ist. Ich habe an Mr. Clairaut geschrieben, ob die Manuscripte von Fermat noch zu finden wären. Da aber der goût für dergleichen Sachen bei den Meisten erloschen ist, so ist auch die Hoffnung verschwunden . . . .

Der Herr Brigadier Baudan ist hier noch ausser Dienst und hat sich mit einer Mlle. Mirabel verheirathet, die ein artiges Haus besitzt, welches ich für 2000 Rthlr. gekauft und dazu von Ihro Königl. Majestät das Privilegium eines Freyhauses erhalten habe. Dasselbe liegt zwischen der Friedrichs- und Dorotheen-Stadt, nahe bey dem Ort, wo I. M. der König das neue Schloss und die Akademie zu bauen beschlossen hat; dass also die Situation nicht erwünschter seyn könnte.

Euler.

LETTRE XLIX.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Affaires de l'Académie de St.-Pétersb. Oeuvres de Jean Bernoulli. Correspondance avec Nic Bernoulli. Nouveau volume des *Miscellanea Berolinensia*.

Berlin d. 15 Dec. 1742.

— — Der Zustand der Akademie in Petersburg gehet mir wegen des Hn. Raths Schumacher sehr zu Herzen; am meisten aber ist der H. Bernoulli darüber allarmirt, weilen er befürchtet seine bisher genossene Gage zu verlieren. Es werden anjetzo des alten Hn. Bernoulli Schriften, so noch nicht publicirt worden, in Genève gedruckt. Dieses Werk soll unserm König dedicirt werden und der Verleger will selbst herkommen solches zu praesentiren. Mit demselben werde ich bei dieser Gelegenheit einen Accord wegen meiner Scientia navali zu treffen suchen, welches vermuthlich die Akademie nicht übernehmen wird. — —

Ich bin anjetzo auch mit dem Hn. Prof. Nicolao Bernoulli in Correspondenz gekommen. Diese hat bisher roulirt über die summationem serierum $1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} +$ etc., worüber derselbe sehr schöne Reflexionen gemacht. Bei dieser Gelegenheit habe ich demselben eine kurze Methode communicirt alle differentialia hujus formae

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}}\, dx$$

zu integriren vel absolute, wenn möglich, vel ope logarithmorum vel quadraturae circuli. Diese Methode bestehet darin, dass man erstlich den denominatorem in seine factores simplices resolvire; weil aber öfters einige von diesen factoribus imaginarii werden, so hatte ich angemerkt, dass da alle factores imaginarii immer numero pares seyn müssen, dieselben auch so beschaffen sind, dass je zween mit einander multiplicirt, ein productum reale geben. An diesem Satz zweifelte nun letztens der H. Bernoulli, und glaubte, dass es solche formulas gebe, deren factores imaginarii nicht diese Eigenschaft hätten. Dieses zu behaupten, brachte er diese Formul $x^4 - 4x^3 + 2xx + 4x + 4$ als ein Exempel vor, welche nachfolgende 4 factores simplices imaginarios hatte I. $x - 1 - \sqrt{(2 + \sqrt{-3})}$, II. $x - 1 + \sqrt{(2 + \sqrt{-3})}$, III. $x - 1 - \sqrt{(2 - \sqrt{-3})}$, IV. $x - 1 + \sqrt{(2 - \sqrt{-3})}$, von welchen man seiner Meinung nach nicht sollte zwey finden können, welche mit einander multiplicirt ein productum réale hervorbrächten*). Dieses Exempel schien mir anfänglich meinen Satz umzustossen, als ich aber die Sach reifer überlegte, so fand ich, dass der I und III mit einander multiplicirt dieses productum reale $xx - (2 + \sqrt{(4 + 2\sqrt{7})})x$

*) Voir dans le II vol. la 2de lettre de N. Bernoulli

$+1+\sqrt{7}+\sqrt{(4+2\sqrt{7})}$, die zwey übrigen aber, der II und IV, dieses $xx-(2-\sqrt{(4+2\sqrt{7})})x+1+\sqrt{7}-\sqrt{(4+2\sqrt{7})}$ geben. Weilen nun durch diese Antwort das gemachte dubium gehoben wird, so vermuthe ich nun von dem Hn. Bernoulli zur Recompens eine richtige Demonstration meines Satzes: Omnem expressionem algebraicam $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\epsilon x^4+$ etc. vel in factores reales simplices $p+qx$, vel saltem in factores reales quadratos $p+qx+rxx$ resolvi posse, welcher Satz (den ich ungefähr wie einige theoremata Fermatiana, aber nicht summo rigore demonstriren kann) in der analysi von sehr grossem Nutzen ist, denn daraus folgt omnem formulam differentialem vel rationalem vel ad rationalitatem reducibilem, nisi absolute integrari queat, semper certe ope vel logarithmorum vel quadraturae circuli integrari posse.

Mit dem neuen tomo Miscellaneorum Berolin. ist man schon ziemlich weit gekommen, worin fast die ganze classis mathematica von mir kommt*). Weilen ich aber von den in Petersburg zurückgelassenen Piècen keine Copien habe, und dieselben entweder sehr spät oder gar nicht zum Vorschein kommen dürften, so nehme die Freyheit Ew. gehorsamst um Dero Rath zu bitten, wie ich am füglichsten zu denselben gelangen könnte. Ich verlange solche gar nicht, um anderwärts drucken zu lassen, denn dazu finden sich immer Materialien genug; sondern um mich darin umzusehen, damit ich nicht eine Sach zweymal zum Vorschein bringe.

Euler.

*) C'est le tome VII contenant cinq mémoires d'Euler.

LETTRE L.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Expressions qui ne peuvent jamais produire des nombres quarrés. Valeur numérique de $(l2)^2$. Nombres de Lagni et de Sharp pour la valeur de π. Globules de sang. Sur un théorème d'analyse des lettres précédentes. Sommation de quelques séries.

Moscau d. 6. Dec. 1742.

In meinem vorigen Briefe hatte ich $n^2 = 4pn - p - a^2$ als einen casum particularem hujus $n^a = 4pn - p - a^2$ angenommen, welches aber darauf beruhet, dass $a^2 + 1$ durch $4n - 1$ nicht dividiret werden kann. Ich gestehe, dass ich zum öftern vermuthet, es würde das theorema $4mn - m - 1 = a^2$, weil kein anderer numerus determinatus als 4 und 1 darin vorkommet, sich durch die proprietates quadratorum per quaternarium divisorum demonstriren lassen, insonderheit da man die Wahrheit des theorematis gleich einsiehet, wenn m ein numerus formae $4u + 0$ oder $4u - 3$, worin schon die Hälfte aller casuum possibilium begriffen ist; hingegegen

hat sich allezeit bei den casibus $m = 4u - 1$ und $m = 4u - 2$ eine Difficultät gefunden, bis ich endlich gestern die Demonstration folgendermaassen eingerichtet:

1. Quicunque numerus, divisus per 4, relinquit 2 vel 3, ille non est quadratus.

2. Si ulla harum quatuor aequationum impossibilium

$$\left.\begin{array}{l} A \ldots 4mn - m - 1 \\ B \ldots 4mn - m - n \\ C \ldots 4mn - m - n^2 \\ D \ldots 4mn - n - 1 \end{array}\right\} = \square$$

est vera, omnes simul verae sunt; quoniam si vera est $4mn - m - n^a$, vera etiam est $4mn - m - n^{a+1}$ et $4mn - n - m^a$, et rursus, si posteriores verae sunt, vera etiam est prima, ut in superioribus litteris ostensum fuit.

3. Omnes numeri possibiles pro m et n continentur his quatuor casibus

$m = 4u + 0$, $m = 4u + 1$, $m = 4u + 2$, $m = 4u + 3$,
$n = 4v + 0$, $n = 4v + 1$, $n = 4v + 2$, $n = 4v + 3$,
sed per applicationem horum casuum apparet, quicunque sint valores ipsius m et n, semper aliquam quatuor formularum A, B, C et D ita dividi posse per 4, ut remaneat 2 vel 3. Sit enim m vel $n = 0$ (quod compendii causa scribo pro $m = 4u + 0$ et $n = 4v + 0$ et sic in ceteris), formula A vel D divisa per 4 relinquit 3.
Si m vel $n = 1$, formula A vel D divisa per 4 relinquit 2.
Si $m = 2$, $n = 2$, C divisa per 4 relinquit 2.
Si $\left.\begin{array}{l} m = 2,\ n = 3, \\ m = 3,\ n = 2, \end{array}\right\}$ B divisa per 4 relinquit 3.
$m = 3$, $n = 3$, B divisa per 4 relinquit 2.
Ergo nulla formularum A, B, C, D aequalis est quadrato.

Die Zahl, so ich pro $l2$ von Ew. communiciret bekommen, muss allerdings unrichtig abgeschrieben gewesen seyn, weil sie schon in der 14ten Ziffer fehlet, ich bin also Ew. für die weit accuratere sowohl von dem $l2$, als dessen quadrato, welche in Dero letztem Schreiben enthalten sind, verbunden.

Ein dergleichen Fehler muss gewiss auch entweder in des Mr. Lagni oder in des Hn. Sharp numerum pro quadratura circuli eingeschlichen seyn. Wenn ich mich recht erinnere, so haben Ew. diese Varietät schon längst bemerket; weil aber doch Mr. Sharp ausdrücklich saget, dass er auch von der letzten Ziffer, so weit seine Zahl gehet, gewiss sey, so glaube ich vielmehr, dass in der Zahl des M. Lagni, entweder im Drucken oder im Abschreiben, eine 6 für eine 5 gesetzt worden, welches demnach zu rectificiren wäre, wenn die in dem numero Lagniano nachfolgenden Ziffern einigen Nutzen haben sollen.

Bey dem Punct von den globulis sanguineis ist mir lieb die Confirmation meines Raisonnements zu sehen; ob man aber sicher annehmen könne, dass diese globuli mit der ganzen massa sanguinis einerley gravitatem specificam haben, zweifle ich, weil nicht allein die globuli sondern auch die lympha als partes constitutivae, sed heterogeneae, diejenige massam ausmachen, welche nach Ew. hypothesi beinahe so schwer als das Wasser ist.

Was Sie von dem theoremate

$$s = 1 + \frac{a}{n+1} + \frac{a^2}{2n+1} + \frac{a^3}{3n+1} + \text{etc.},$$

ergo

$$\frac{ss}{2} = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \text{etc.}$$

erwähnen, halte ich in der That für sehr merkwürdig, nachdem ich sehe, dass man dadurch, data summa seriei $1 \mp \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \mp \frac{1}{7} + \text{etc.}$, die summam seriei $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc.}$ finden könne, bey welcher Gelegenheit zugleich melde, dass ich (wiewohl per ambages) auch die summas nachfolgender serierum

$$1 - \frac{1}{2}\left(1 \mp \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(1 \mp \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$- \frac{1}{4}\left(1 \mp \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \mp \frac{1}{4}\right) + \text{etc.}$$

$$1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right)$$

$$- \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$- \frac{1}{25}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \text{etc.}$$

gefunden habe, wozu man vielleicht durch einen viel nähern, aber mir unbekannten Weg gelangen kann.

Wie ich gänzlich mit Ew. der Meynung bin, dass man die Zahlen, welche vor n anzunehmen sind, damit, wenn $n - p$ ein numerus primus ist, auch $n + p$ ein numerus primus werde, denotante p numerum primum, nicht generaliter bestimmen könne, so halte ich auch dafür, dass die numeri 2, 4, 6, 12, etc., welche tam addita quam demta unitate numeros primos geben, schwerlich generaliter oder per certam legem progressionis dürften zu finden seyn, so dass es hoc respectu mit beiden seriebus einerley Bewandniss zu haben scheinet. Goldbach.

P. S. Die künftigen Briefe können wieder nach St. Petersburg gesandt werden.

LETTRE LI.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Rectification d'une erreur de la lettre précédente. Sommation de quelques autres séries.

Moscau d. 24 Dec. 1742.

Als ich neulich die vermeinten summas der beyden letztern serierum in meinem vorigen Schreiben, wieder betrachtet, habe alsofort wahrgenommen, dass selbige aus einem blossen Schreibfehler entstanden, von welchem es aber in der That heisst: *Si non errasset, fecerat ille minus.* Denn ich bin durch diese Gelegenheit auf summationes aliarum serierum gerathen, die ich sonst kaum gesuchet, viel weniger gefunden haben würde.

Ich halte dafür, dass es ein problema problematum ist die summam hujus

$$1 + \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{2^m}\right) + \frac{1}{3^n}\left(1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m}\right) + \frac{1}{4^n}\left(1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m}\right) + \text{etc.}$$

in den casibus zu finden, wo m et n nicht numeri integri pares et sibi aequales sind; doch gibt es casus, da die summa angegeben werden kann, ex. gr., si $m = 1$, $n = 3$, denn es ist:

$$1 + \frac{1}{2^3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4^3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \text{etc.} = \frac{\pi^4}{72}$$

(wenn π gewöhnlichermaassen für die peripheriam circuli, cujus diameter $= 1$, genommen wird). Hingegen weiss ich die summas serierum

$$A \ldots 1 + \frac{1}{2^5}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4^5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \text{etc. und}$$

$$B \ldots 1 + \frac{1}{2^4}\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3^4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \frac{1}{4^4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \text{etc.}$$

noch nicht; ob ich gleich weiss, dass $2A + B = \frac{19\pi^6}{2.5.7.3^4}$, wie ich denn auch die summam der folgenden beyden serierum $C + D$ allezeit finden kann, si m et n sint numeri pares quicunque

$$C \ldots 1 + \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{2^m}\right) + \frac{1}{3^n}\left(1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m}\right) + \text{etc.}$$

$$D \ldots 1 + \frac{1}{2^m}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{3^m}\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \text{etc.}$$

Uebrigens beziehe ich mich auf mein voriges Schreiben.

Goldbach.

LETTRE LII.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Continuation des recherches des lettres précédentes sur les nombres et les séries.

Berlin d. 5. Januar 1745.

— — Ew. Demonstration, dass $4mn - m - n$ kein quadratum seyn könne, will mir noch kein völliges Genüge leisten. Denn, ungeacht dass, wenn $4mn - m - 1 = \square$, auch seyn muss $4mn - m - n = \square$ und $4mn - m - n^2 = \square$, so folgt doch nicht hinwiederum quibus casibus pro m et n substitutis una formula quadratum esse nequeat, iisdem casibus reliquas formulas quadrata esse non posse. Dieses erhellet aber deutlicher, wenn man die derivationem der übrigen Formuln aus der ersten betrachtet, nehmlich aus $4mn - m - 1$. Man setze also $m = 4p - 1$, so kommt $4(4np - n - p)$; wenn also $4mn - m - 1$ auf keinerley Art ein quadratum

seyn kann, so kann diese Formul auch kein Quadrat seyn, casu $m = 4p - 1$, und folglich kann auch $4np - n - p$ kein quadratum seyn. Nun aber haben Ew. nur gewiesen, dass wenn m vel n sey $= 4u + 1$, die Formul $4mn - m - 1$ kein quadratum seyn könne, und dahero folget daraus nicht, dass $4np - n - p$ kein Quadrat seyn könnte, eodem casu n vel $p = 4u + 1$. Ferner ist klar, dass wenn man nur bewiesen hätte, dass $4mn - m - 1 = \square$ casu $m = 4u - 1$, daraus schon folgen würde, dass $4np - n - p = \square$. Wenn aber bewiesen wäre, dass $4np - n - p = \square$, so würde daraus nur folgen, dass $4mn - m - 1$ kein quadratum seyn könnte casu quo $m = 4u - 1$, aber nicht generaliter. Wenn man aber nicht beweisen könnte, dass $4mn - m - 1$ kein quadratum seyn könne casu $m = 4u - 1$, so würde daraus schon folgen, dass $4mn - m - n$ ganz und gar kein quadratum seyn könne. Vielleicht dürfte aber das theorema generale $4mnp - m - n = \square$, wovon Ew. keine Meldung thun, leichter zu demonstriren fallen. Es ist aber für sich klar, dass wenn entweder $m + n = 4u + 1$ oder $m + n = 4u + 2$, die Formul $4mnp - m - n$ kein quadratum seyn könne; dahero nur die beiden casus $m + n = 4u$ und $m + n = 4u - 1$ zu demonstriren übrig bleiben. Wenn man für den ersten Fall setzt $m = 2u + a$ und $n = 2u - a$, so hat man zu beweisen, dass $p(4uu - aa) - u$ kein Quadrat seyn könne. Es kann also diese Formul $\frac{bb + u}{4uu - aa}$ kein numerus integer seyn. Ponatur $a = 2u - c$, so kann $\frac{bb + u}{c(4u - c)}$ kein numerus integer seyn, und hieraus können unendlich viel schöne theoremata hergeleitet werden. Ich muss indessen gestehen, dass ich aller angewandten Mühe ungeacht, noch keine Demonstration von diesem theoremate habe fin-

den können, dass $4mnp - m - n =$ quadrato. Es kommt aber darauf an, dass man demonstrire, dass eine solche Zahl $4paa + 1$ nimmer divisibilis seyn könne per numerum formae $4pq - 1$. Es sind aber alle mögliche divisores formulae $4paa + 1$ enthalten in einer gewissen Anzahl solcher Formuln $4np + 1$, $4np + \alpha$, $4np + \beta$, $4np + \gamma$ etc., wobey zu merken, dass wenn unter den Zahlen α, β, γ etc. eine Zahl f enthalten ist, zugleich alle potestates ipsius f darunter vorkommen; und wenn darunter zwey Zahlen f et g vorkommen, so müssen auch alle potestates einer jeden, und alle daraus möglichen producta vorkommen. Wenn man also einen oder etliche numeros pro α, β, γ etc. weiss, so kann man zugleich die übrigen finden. Die simpelsten divisores aber der Formul $4paa + 1$ sind die valores dieser Formul selbst, wenn pro a ein numerus determinatus gesetzt wird, und also hat man für α, β etc. solche valores primitivos $4p + 1$, $16p + 1$, $36p + 1$. Daher entstehen, wenn man alle potestates nimmt und solche in einander multiplicirt, alle übrigen valores litterarum α, β, γ, δ etc. Es ist aber klar, dass alle diese Zahlen von solcher Form $4mp + 1$ seyn werden. Dahero alle divisores formulae $4paa + 1$ nothwendig also seyn müssen $4np + 4mp + 1$ und kann also eine solche Zahl $4np - 1$ nimmer ein divisor seyn. Dieses ist aber nur wahr in sofern die divisores primitivi von der Form $4mp + 1$ sind. Wenn aber ein derivativus von der Form $4mp - 1$ wäre, so müsste auch ein primitivus diese Form haben. Hieraus folget nun so viel, dass wenn dieses theorema bei kleinen Zahlen wahr ist, dasselbe auch bei grossen wahr seyn müsse. — Wenn gleich Sharp sagt, dass er von seiner letzten Figur in quadratura circuli sicher sey, so kann doch solches nicht behauptet

werden, wenn er nicht zum wenigsten auf 3 oder 4 Figuren weiter hinaus gerechnet hat, welches doch nicht geschehen. Dahero dieses schon als ein Merkmal der Accuratesse zu halten, dass seine letzte Figur nur um 1 zu klein ist. Ich kann mich auch nicht erinnern, dass ich jemals um dieser Ursach willen an der Richtigkeit des Lagni's Zahlen gezweifelt habe. — Bey der Materie über die globulos sanguineos habe ich nicht so genau angenommen, dass die globuli rubri mit der ganzen massa einerley gravitatem specificam haben; denn meine Reflexionen bleiben einerley, wenn gleich dieselbe 2 oder mehr mal grösser oder kleiner angenommen würde. Unterdessen ist doch so viel gewiss, dass die gravitas specifica der globorum rubrorum nicht so sehr viel vom Wasser differiren wird; es wäre denn, dass man dieselben niemals pur ohne Vermischung der lymphae bekommen könnte, in welchem Fall es freylich nicht mehr auf die gravitatem specificam allein ankommen würde um die Unmöglichkeit des progressus in infinitum zu zeigen.

Ich hatte dieses theorema: Si

$$s = 1 + \frac{a}{n+1} + \frac{a^2}{2n+1} + \frac{a^3}{3n+1} + \text{etc.},$$

erit

$$\frac{1}{2}ss = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \text{etc.}$$

dem Hn. Professori Nicolao Bernoulli geschrieben, wovon er mir nachfolgende schöne Demonstration zugeschickt. Er schreibt x^n für a, und t für sx, eritque

$$sx = t = x + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{3n+1}}{3n+1} + \text{etc.}$$

qua differentiata prodibit $dt = dx(1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \text{etc.})$.

Diese zwey series multiplicirt er mit einander, terminos secundum potestates ipsius x ordinando, und bekommt

$$tdt = dx\left(x + x^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) + x^{2n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right)\right.$$
$$\left. + x^{3n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3n+1}\right) + \text{etc.}\right.$$

quae integrata dat

$$\frac{1}{2}tt = \frac{1}{2}s^2x^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^{n+2}}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$+ \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right) + \text{etc.};$$

dividatur per xx, et ob $x^n = a$ erit

$$\frac{1}{2}ss = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right) + \text{etc.}$$

Er geht auf diese Art weiter und multiplicirt $\frac{1}{2}tt$ nochmal mit dt und findet post integrationem

$$\frac{1}{6}s^3 = \frac{1}{6} + \frac{a}{n+3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right)$$
$$+ \frac{aa}{2n+3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right)\right)$$
$$+ \frac{a^3}{3n+3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right.$$
$$+ \frac{1}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$\left. + \frac{1}{3n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3n+1}\right)\right) + \text{etc.}$$

Um nun auf solche summationes zu kommen, dergleichen Ew. gefunden, so sey $n = 1$, erit

$$s = 1 + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3} + \frac{a^3}{4} + \text{etc.} = \frac{1}{a}\, l \cdot \frac{1}{1-a}$$

unde fit

$$A \cdots \frac{1}{2aa}\left(l \cdot \frac{1}{1-a}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{a}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{a^2}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{a^3}{5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \text{etc.}$$

Sit $n = 2$, erit $s = 1 + \frac{a}{3} + \frac{a^2}{5} + \frac{a^3}{7} + \text{etc.} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\, l \cdot \frac{1+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}$ unde fit

$$B \cdots \frac{1}{8a}\left(l \cdot \frac{1+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{a}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{a^2}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \frac{a^3}{8}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \text{etc.}$$

Sit $n = 2$ et $a = -b$, erit $s = 1 - \frac{b}{3} + \frac{b^2}{5} - \frac{b^3}{7} + \text{etc.} = \frac{1}{\sqrt{b}} A.\text{tang.}\sqrt{b}$, unde fit

$$C \cdots \frac{1}{2b}(A.\text{tang}\sqrt{b})^2 = \frac{1}{2} - \frac{b}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{b^2}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \frac{b^3}{8}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \text{etc.}$$

Ponatur in A, $a = -1$; et in C, $b = 1$, ob $A.\text{tang.}\,1 = \frac{\pi}{4}$, erit

$$D \cdots \frac{1}{2}(l2)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \text{etc.}$$

$$E \cdots \frac{\pi\pi}{32} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \text{etc.}$$

$$F \cdots \frac{1}{8}(l2)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) - \text{etc.}$$

$$E - F \cdots \frac{\pi\pi}{32} - \frac{1}{8}(l2)^2 =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \text{etc.}$$

$E+F\cdots\frac{\pi\pi}{32}+\frac{1}{8}(l2)^2=$

$$\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$$
$$-\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\text{etc.}$$

Si D subtrahatur a serie

$$\frac{\pi\pi}{12}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\text{etc.}$$

erit

$$G\cdots\frac{\pi\pi}{12}-\frac{1}{2}(l2)^2=1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\text{etc.}$$

Quoniam si fuerit $s=a-b+c-d+e-\text{etc.}$ et $t=a^2+b^2+c^2+d^2+\text{etc.}$, erit summa factorum ex binis terminis seriei $s=\frac{1}{2}ss-\frac{1}{2}t$ eritque adeo

$$\frac{1}{2}ss-\frac{1}{2}t=-b.a+c(a-b)-d(a-b+c)+$$
$$e(a-b+c-d)-\text{etc.}$$

addendo t erit

$$\frac{1}{2}ss+\frac{1}{2}t=aa-b(a-b)+c(a-b+c)-d(a-b+c-d)$$
$$+e(a-b+c-d+e)-\text{etc.}$$

Sit $s=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\text{etc.}$, erit $s=l2$ et $t=\frac{\pi\pi}{6}$, unde fit

$$H\ldots-\frac{1}{2}(l2)^2+\frac{\pi\pi}{12}=\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)$$
$$+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\text{etc.}=G.$$

$$I\ldots\frac{\pi\pi}{12}+\frac{1}{2}(l2)^2=1.1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\text{etc.}$$

$$D + H \cdots \frac{\pi\pi}{12} = 1 - \frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{2}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{5}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \text{etc.}$$

seu

$$\frac{\pi\pi}{12} = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{10}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{21}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{36}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \text{etc.}$$

Hier sind nun die beiden series G und I die beiden erstern, welche Ew. überschrieben.

Es ist bey der series $1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^4}{25} + \frac{x^5}{36} + \text{etc.}$ merkwürdig, dass dieselbe nur in drey Fällen summirt werden kann, welche sind $x = 1$, $x = -1$ und $x = \frac{1}{2}$. Der letztere casus folgt aber aus der serie G kraft dieses theorematis: Si $s = 1 . a - \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{3}(a + b + c) - \text{etc.}$ erit $s = \frac{a}{1.2} + \frac{1}{2.4}(a - b) + \frac{1}{3.8}(a - 2b + c) + \frac{1}{4.16}(a - 3b + 3c - d) + \frac{1}{5.32}(a - 4b + 6c - 4d + e) + \text{etc.}$ Wenn nun für $a + b + c + d + \text{etc.}$ diese series $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.}$ gesetzt wird, so ist $s = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}(l\,2)^2$. Um aber zu finden, was diese Expression

$$1 - \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{2} + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{4} + \text{etc.}$$

betrage, so setze ich

$$z = x - \frac{n}{1}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{x^4}{4} + \text{etc.}$$

und differentiando wird

$$dz = dx\left(1 - \frac{n}{1}\cdot x + \frac{n(n-1)}{1.2}\,.\,x^2 - \text{etc.}\right) = dx\,(1 - x)^n,$$

dahero integrando $z = \frac{1 - (1 - x)^{n+1}}{n+1}$ und facto $x = 1$ fit

$$1-\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{4}+\text{etc.}=\frac{1}{n+1}.$$

Dahero ist

$$\frac{\pi\pi}{12}-\frac{1}{2}(l2)^2=\frac{1}{1^2.2}+\frac{1}{2^2.4}+\frac{1}{3^2.8}+\frac{1}{4^2.16}+\frac{1}{5^2.32}+\text{etc.}$$

Was aber Ew. beide letztern series betrifft, nehmlich

$$p=1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)$$
$$-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)+\text{etc.}$$

$$q=\frac{1}{4}\cdot1-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$-\frac{1}{25}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\text{etc.}$$

so ist klar, dass

$$p-q=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\text{etc.}\right)\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\text{etc.}\right)$$
$$=\frac{\pi\pi}{12}l2$$

und also wenn die Summ von einer bekannt wäre, daraus die andere gleich summirt werden könnte. Es ist zwar

$$\frac{13}{1440}\pi^4=1-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)$$
$$-\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)+\text{etc.}$$

ich habe aber noch keinen Weg entdecken können, um die valores p et q zu bestimmen, dahero von Ew. die Methode diese series zu summiren mit grossem Verlangen erwarte. Wenn Ew. hernach auch diese seriem

$$r=\frac{1}{2}\cdot1-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)$$
$$-\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)+\text{etc.}$$

summiren könnten, so würden die beyden series $p + r$ die schon längst gesuchte summam dieser seriei

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$$

geben.

Euler.

P. S. Mr. Clairaut hat mir nun geschrieben, dass meine nach Paris geschickte pièce zu rechter Zeit glücklich angekommen.

LETTRE LIII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Réponse a la lettre 51ème. Sommation des séries de Goldbach. Démonstration d'un théorème de la théorie des nombres.

Berlin d. 19 Januar 1743

Ew. haben in der That den gemeldeten Schreibfehler als ein grosses Glück anzusehen, wenn derselbe zu solchen herrlichen Erfindungen Anlass gegeben. Es hat mich viele Stunden und grosse calculos gekostet, ehe ich nur die Wahrheit der mir gütigst communicirten Summationen habe einsehen können. Ich kann mich aber auch nicht weiter rühmen, als dass ich dieselben demonstrirt habe. Die Methode, wodurch ich dazu gelanget, ist ziemlich weit hergesucht und so beschaffen, dass ich auch vermittelst derselben diese summas nimmer würde herausgebracht haben, wenn mir solche nicht schon vorher aus Ew. Schreiben bekannt gewesen wären. Ich habe aber nachfolgende series zu Hülfe genommen:

$$A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.} \qquad B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$$

$$C = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.} \qquad D = 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \text{etc.}$$

$$E = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{etc.} \qquad F = 1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \text{etc.}$$

$$G = \frac{1}{1^8} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \text{etc.} \qquad H = 1 + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} + \frac{1}{4^9} + \text{etc.}$$

etc.

von welchen die summae A, C, E, G, etc. bekannt sind. Aus diesen habe ich endlich mit grosser Mühe folgende hergeleitet:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2^3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4^3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \text{etc.} = \frac{1}{2} A A.$$

$$\beta = 1 + \frac{1}{2^5}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4^5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \text{etc.} = AC - \frac{1}{2} BB.$$

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2^7}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^7}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4^7}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \text{etc.} = AE - BD + \frac{1}{2} CC.$$

$$\delta = 1 + \frac{1}{2^9}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^9}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4^9}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \text{etc.} = AG - BF + CE - \frac{1}{2} DD.$$

etc.

$$a = 1 + \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \frac{1}{4^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \text{etc.} = \frac{1}{2} A A + \frac{1}{2} C.$$

$$b = 1 + \frac{1}{2^4}\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3^4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \frac{1}{4^4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \text{etc.} = B B - \frac{1}{3} E.$$

$$c = 1 + \frac{1}{2^6}\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3^6}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right)$$
$$+ \frac{1}{4^6}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \text{etc.} = 2BD - \frac{3}{2}CC + \frac{1}{4}G.$$

$$d = 1 + \frac{1}{2^8}\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3^8}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right)$$
$$+ \frac{1}{4^8}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \text{etc.} = 2BF - 3CE$$
$$+ \frac{4}{2}DD - \frac{1}{5}I.$$

etc.

$$p = 1 + \frac{1}{2^3}\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) + \frac{1}{3^3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right)$$
$$+ \frac{1}{4^3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3}\right) + \text{etc.} = \frac{1}{2}BB + \frac{1}{2}E.$$

$$q = 1 + \frac{1}{2^5}\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) + \frac{1}{3^5}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right)$$
$$+ \frac{1}{4^5}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3}\right) + \text{etc.} = \frac{3}{2}CC - \frac{5}{8}G.$$

etc.

Weilen nun A, C, E, G, etc. gegeben sind, nehmlich $A = \frac{\pi^2}{6}$, $C = \frac{\pi^4}{90}$, $E = \frac{\pi^6}{945}$, $G = \frac{\pi^8}{9450}$ etc., so geben obige series $\alpha = \frac{1}{2}AA = \frac{\pi^4}{72}$, $2\beta + b = 2AC - \frac{1}{3}E = \frac{19\pi^6}{2.5.7.3^4}$, welches Ew. zwey erstern theoremata sind. Ferner ist auch $2\gamma + c = 2AE - \frac{1}{2}CC + \frac{1}{4}G$ und $\beta + p = AC + \frac{1}{2}E$, und endlich ist

$$1 + \frac{1}{2^5}\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) + \frac{1}{3^5}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \text{etc.} = \frac{\pi^8}{16.3.25.7}.$$

Weil aber diese meine Methode nicht natürlich genug ist, so ersuche Ew. gehorsamst mir Dero Methode gütigst zu communiciren.

Das letzte theorema war mir gleich bekannt, denn wenn man setzt

$r = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} +$ etc. und $s = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} +$ etc.

und

$$t = 1 + \frac{1}{2^{m+n}} + \frac{1}{3^{m+n}} + \text{etc.}$$

so wird seyn

$$rs + t = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{2^m}\right) + \frac{1}{3^n}\left(1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m}\right) + \text{etc.} \\ 1 + \frac{1}{2^m}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{3^m}\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \text{etc.} \end{cases}$$

Da nun, wenn m und n numeri pares sind, die summae r, s und t angegeben werden können, so sind auch in diesen beiden Fällen diese beiden letzten series zusammengenommen summabel.

Seitdem ich Ew. zugeschrieben, ist mir erst eingefallen, dass ich Denselben schon vor geraumer Zeit eine rigorose Demonstration von diesem theoremate dass $4mn - m - n \neq$ quadrato überschrieben hatte. Solches hatte ich aber so sehr vergessen, dass ich in meinem letzten schrieb, ich hätte aller Mühe ungeacht davon noch keine Demonstration finden können. Ich will also diese Demonstration kürzlich wiederholen.

Lemma. Si fuerit p numerus primus, haec expressio $a^{p-1} - 1$ divisibilis erit per p. Hievon haben Ew. die Demonstration schon approbirt. Hieraus raisonnire ich also: Sit $p = 4n - 1$, erit $a^{4n-2} - 1$ divisibile per $4n - 1$, si fuerit $4n - 1$ numerus primus. Ergo $a^{4n-2} + 1$ non erit divisibile per $4n - 1$. At $a^{4n-2} + 1$ (ob $4n - 2 =$ numero impariter pari) est divisibile per $aa + 1$. Consequenter cum $a^{4n-2} + 1$ non sit per $4n - 1$ divisibilis, nec ejus factor $aa + 1$ per $4n - 1$ erit divisibilis.

Porro si $aa + 1$ per nullum numerum primum formae $4n - 1$ fuerit divisibile, etiam per nullum numerum compositum formae $4n - 1$ divisibile erit. Si enim $4m - 1$ non fuerit numerus primus, unum saltem factorem primum habebit formae $4n - 1$. — Cum igitur $aa + 1$ per $4n - 1$ dividi nequeat, haec aequatio $aa + 1 = (4n - 1)(4m - 1)$ erit impossibilis, ideoque $aa = 16mn - 4m - 4n$, seu $4mn - m - n =$ quadrato. *Q.E.D.*

LETTRE LIV.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Racines imaginaires. Théorèmes de nombres. Sommation des séries.

St. Petersburg d. 5. Febr. 1745.

Wenn dasjenige, was Ew. von den radicibus imaginariis melden, demonstriret werden könnte, so müsste auch folgen, dass posito c imaginario quocunque, f reali quocunque, und $c\sqrt{(4c^4 - f)} = r =$ numero reali, $m = \sqrt{\left(-c^2 + \frac{r}{c}\right)}$, $n = \sqrt{\left(-c^2 - \frac{r}{c}\right)}$, sowohl $m + n$ als $c(m - n)$ reales sind. Es stünde solchemnach etwa der casus $x^4 + 72x - 20$ zu untersuchen, allwo die 4 divisores sind, positis

$$c = 1 + \sqrt{-2},\ f = -20,\ \sqrt{(4c^4 - f)} = \frac{r}{4c} = \frac{18}{1 + \sqrt{-2}},$$

$$\text{I. } x + c + \sqrt{\left(-c^2 + \frac{r}{c}\right)};\ \text{II. } x + c - \sqrt{\left(-c^2 + \frac{r}{c}\right)};$$

$$\text{III. } x - c + \sqrt{\left(-c^2 - \frac{r}{c}\right)};\ \text{IV. } x - c - \sqrt{\left(-c^2 - \frac{r}{c}\right)}.$$

Auf Dero anderes Schreiben vom 5. Januar habe ich zu antworten, dass die Objection, welche Ew. bey $4mn-m-1 = \Box$ und den andern Formuln machen, schon damals zum Theil von mir bemerkt worden, wiewohl ich meynte, dass selbige leicht würde zu solviren seyn. Jedoch glaube ich, dass alles viel kurzer und ohne dergleichen casus particulares zu Hülf zu nehmen, demonstriret werden kann. Vorhero aber will nur ad verba: *Ferner ist klar, dass wenn man nur bewiesen hätte, dass $4mn-m-1=\Box$ casu $m=4u-1$, daraus schon folgen würde, dass $4np-n-p = \Box$. Wenn aber bewiesen wäre, dass $4np-n-p=\Box$, so würde daraus folgen, dass $4mn-m-1$ kein quadratum seyn könne casu quo $m=4u-1$, aber nicht generaliter.* — diese kleine Erinnerung machen, dass nicht allein $B \ldots 4np-n-p=\Box$ ein casus particularis von $A \ldots 4mn-m-1 = \Box$, sondern auch A ein casus particularis von B ist, welches natürlicherweise contradictorium seyn würde, wenn das $\Box$ in A und B idem quadratum determinatum bedeutete; nun aber, da es in beyden Fällen diversos valores hat, gar wohl bestehen kann: denn gleich wie aus dem casu particulari ipsius A, ubi $m=4u-1$, die formula $4(4nu-u-n)$, oder diese aequivalens $B \ldots 4nu-n-u=\Box$ entspringet, so kömmt aus dem casu particulari ipsius B, wenn u gesetzt wird $=4n^2p-n$, die formula $4np-p-1=\Box$ heraus, welche posito p pro numero integro quocunque, die formulam A gibt, wie denn auch generaliter $4mn-m-n^{2\alpha-1}=\Box$ durch die Substitution $m=4n^{2\alpha}p-n^{2\alpha-1}$ alsofort in $4np-p-1=\Box$ verwandelt werden kann.

Hier sollte die neue Demonstration folgen; weil sie mir aber nach besserer Ueberlegung selbst kein Genüge thut, so muss dieser Punkt bis auf eine andere Zeit ausgesetzt

bleiben. Indessen habe ich angemerket, dass die propositio $4pmn - m - n = \square$ per substitutionem $m = 4n^2q - n$, in hanc similem $4npq - p - q = \square$ verwandelt wird.

Aus der mir communicirten Demonstration des theorematis: Si $s = 1 + \frac{a}{n+1} + \text{etc.}$, erit

$$\frac{1}{2}ss = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \text{etc.}$$

erhellet zugleich die grosse Einsicht des Hn. Autoris in dergleichen Sachen, und die unterschiedenen applicationes, so Ew. von dem theoremate selbst machen, halte ich für sehr merkwürdig. Die summae serierum G et I sind eben diejenigen, so ich gefunden hatte; die summa $D + H$ war mir auch bekannt.

Dass die summae serierum

$$p = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) - \text{etc.}$$

und

$$q = \frac{1}{4}\cdot 1 - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \text{etc.}$$

so ich gefunden zu haben vermeinet, aus einem blossen Schreibfehler entstanden wären, habe ich selbst schon in meinem letzten Schreiben erinnert; ich hätte dahero auch an selbige series nicht gedacht, wenn ich sie nicht in Dero Schreiben wiederholet gesehen, worauf ich denn alsofort befunden, dass beyder summa von

$$z = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$$

dependiret. Ew. inferiren mit grössestem Recht, dass wenn ich die seriem

$$r = \frac{1.1}{2} - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) - \text{etc.}$$

auch summiren könnte, alsdann $z = p + r$ gefunden seyn würde. Nun lässet sich zwar die series r gar schön sum-

miren, denn sie ist $=\frac{(\pi^2-3)l2}{6}$, aber p weiss ich nicht anders zu exprimiren als durch $z-r$. Ich hatte auch in meinem vorigen geschrieben, dass ich die summam seriei

$$1+\frac{1}{2^5}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\text{etc.}$$

noch nicht wüsste; selbige aber dependiret gleichfalls von der summa z, und ist $=-\frac{z^2}{2}+\frac{\pi^6}{2.3^3.7}$.

Aus Ew. letztem Schreiben vom 19. Januar ist mir lieb gewesen zu ersehen, dass die series α, β und b nicht von den leichtesten zu summiren sind. Was nun die series α und $2\beta+b$ betrifft, so kommen unsere methodi darin völlig überein, dass $\alpha=\frac{1}{2}AA$ und $2\beta+b=\frac{19\pi^6}{2.3^4.5.7}$; hierin aber sind sie unterschieden, dass Ew. Methode gibt

$$\beta=AC-\frac{1}{2}BB,\ b=BB-\frac{1}{3}E,$$

meine hingegen

$$\beta=\frac{\pi^6}{2.3^3.7}-\frac{BB}{2},\quad b=BB-\frac{11\pi^6}{2.3^4.5.7}.$$

Den valorem $p=\frac{1}{2}BB+\frac{1}{2}E$ finde ich richtig, die übrigen habe noch nicht untersuchet. Meine Methode werden Ew. aus nachfolgendem einigen schemate gnugsam pro omnibus seriebus huic similibus ersehen können: Sit

$$A=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\text{etc.}=\frac{\pi^2}{6},\quad C=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\text{etc.}=\frac{\pi^4}{90}$$

erit duplum summae productorum ex binis terminis seriei A aequale A^2-C: sed hoc duplum etiam est aequale sequentibus seriebus

$$+2\left(\frac{1}{1^2.2^2}+\frac{1}{2^2.3^2}+\frac{1}{3^2.4^2}+\frac{1}{4^2.5^2}+\text{etc.}\right)$$

	(I)	(II)	(III)
$=2\Big($	$\frac{\pi^2}{3.1^2}$	-2	$-1\Big)$

$$+2\left(\frac{1}{1^2.3^2}+\frac{1}{2^2.4^2}+\frac{1}{3^2.5^2}+\frac{1}{4^2.6^2}+\text{etc.}\right)$$

$$\overset{(I)}{=2\left(\frac{\pi^2}{3.2^2}\right.}-\overset{(II)}{\frac{2\left(1+\frac{1}{2}\right)}{2^3}}-\overset{(III)}{\left.\frac{\left(1+\frac{1}{2^2}\right)}{2^2}\right)}$$

$$+2\left(\frac{1}{1^2.4^2}+\frac{1}{2^2.5^2}+\frac{1}{3^2.6^2}+\frac{1}{4^2.7^2}+\text{etc.}\right)$$

$$\overset{(I)}{=2\left(\frac{\pi^2}{3.3^2}\right.}-\overset{(II)}{\frac{2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}{3^3}}-\overset{(III)}{\left.\frac{\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)}{3^2}\right)}$$

etc.

Wenn nun die drey columnae perpendiculares besonders summiret werden, so entstehet

$$\text{(I)}\ \frac{2\pi^2}{3}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{etc.}\right)=\frac{2\pi^4}{3.6}$$

$$\text{(II)}\ -4\left(1+\frac{1}{2^3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\text{etc.}\right)$$

$$\text{(III)}\ -2\left(1+\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{3^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\text{etc.}\right)$$

Die letzte series aber ist bekanntermaassen gleich $\frac{-7\pi^4}{180}$, also muss die mittlere seyn $A^2-C-\frac{2\pi^4}{3.6}+\frac{7\pi^4}{180}=\frac{-10\pi^4}{180}$ oder

$$1+\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{27}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$+\frac{1}{64}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\text{etc.}=\frac{\pi^4}{72}.$$

Dass das theorema $4mn-m-1=\square$ von Ew. schon längst demonstriret worden, habe ich nicht vergessen; es ist aber nur die Frage gewesen, ob man es nicht noch auf eine andere Art demonstriren könne?

Goldbach.

LETTRE LV.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Rectification d'une erreur commise dans la lettre précédente. Observations ultérieures sur la sommation des séries.

d. 12 Februar 1748.

Da ich anjetzo nach Königsberg schreibe, so habe Gegenwärtiges, als Postscriptum zu meinem letzten Briefe an Ew. mit absenden und zugleich einen abermal eingeschlichenen Fehler corrigiren wollen, denn die summa

$$p = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) - \text{etc.}$$

ist nicht $z - \frac{\pi^2 l2}{6} + \frac{l2}{2}$, sondern $z - \frac{\pi^2 l2}{6} + u$, wenn

$$u = 1 - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{9}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{16}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \text{etc.}$$

Setzet man ferner

$$v = 1 - \frac{1}{2^2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$
$$- \frac{1}{4^2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \text{etc.},$$

so wird $u + v = \frac{\pi^2 l2}{3}$.

Sonst habe ich auch observiret, dass wenn man setzet

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc},$$
$$B = \frac{3}{1.2} + \frac{5}{2.3}\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) + \frac{7}{3.4}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right)$$
$$+ \frac{9}{4.5}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3}\right) + \text{etc.}$$

alsdann seyn werde

$$\frac{B}{2A} = z = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$$

Ich weiss nicht, ob dergleichen casus bishero sonderlich betrachtet worden, ubi series $= \infty$ dividitur per aliam seriem $= \infty$. Ich mag mir nicht die Mühe nehmen zu sehen, was per actualem divisionem der seriei B durch $2A$ vor termini herauskommen möchten, weil ich vermuthe, dass dieselben sehr confus aussehen werden.

Wenn man ferner setzet

$$= 1C + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right)$$
$$+ \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3}\right) + \text{etc.}$$

so wird $\frac{C}{A} = \frac{B}{2A} = z = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$, woraus aber nicht folget, dass $2C = B$, sondern nur dass $2C - B$ ein infinite parvum sey respectu ipsius B vel C.

Goldbach.

LETTRE LVI.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Réponse aux deux lettres précédentes. Mêmes sujets.

Berlin d. 26. Februar 1743.

— — Die uber die Akademie hochverordnete Commission hat mir letztens die versprochene Pension auf das Gnädigste confirmirt und der Hr. Admiral Graf Golowin pressirt mich sehr meine Scientiam navalem nächstens gegen eine ansehnliche Recompens einzuschicken. Ich habe solche völlig zu Ende gebracht und nur um Erlaubniss gebeten, solche vorher abschreiben zu lassen.

Was ich von den radicibus imaginariis aequationum gemeldet, dass dieselben immer dergestalt paarweis genommen werden können, dass sowohl das Product als die Summ von zweien real werde, kann ich zwar nicht generaliter demon-

striren, aber doch von allen aequationibus sexto gradu inferioribus, ingleichen auch von dieser weit generaleren aequatione $\alpha x^{5n} + \beta x^{4n} + \gamma x^{3n} + \delta x^{2n} + \varepsilon x^{n} + \zeta = 0$, denotante n numerum integrum quemcunque. Dahero der von Ew. gemeldete casus keine Schwierigkeit hat. Ich glaube aber, dass in den Expressionen ein kleines Versehen seyn muss, weilen dieselben nicht zusammenstimmen; denn wenn $c = 1 + \sqrt{-2}$ und $f = -20$, so wird $\sqrt{(4c^4 - f)} = \frac{6\sqrt{2}}{1+\sqrt{-2}}$ und nicht $= \frac{18}{1+\sqrt{-2}}$. Ich bin den Spuren Ew. nachgegangen, und glaube, dass Dieselben auf diese Aequation gekommen seyn würden

$$x^4 + 8(\alpha\alpha + \beta\beta)x\sqrt{2(\beta\beta - \alpha\alpha)} + 12\alpha^4 - 40\alpha^2\beta^2 + 12\beta^4 = 0,$$

welche erstlich in diese zwey factores imaginarios resolvirt wird

$$xx + 2(\alpha + \beta\sqrt{-1})x + 4\alpha\beta\sqrt{-1} - 2(\beta\beta - \alpha\alpha) \\ - 2(\alpha - \beta\sqrt{-1})\sqrt{2(\beta\beta - \alpha\alpha)} = 0$$

$$xx - 2(\alpha + \beta\sqrt{-1})x + 4\alpha\beta\sqrt{-1} - 2(\beta\beta - \alpha\alpha) \\ + 2(\alpha - \beta\sqrt{-1})\sqrt{2(\beta\beta - \alpha\alpha)} = 0,$$

dahero die 4 radices sehr complicat seyn würden. Demungeacht aber ist eben dieselbe Aequation auch ein Product von diesen zweyen factoribus realibus

$$xx + 2x\sqrt{2(\beta\beta - \alpha\alpha)} + 6\beta\beta - 2\alpha\alpha = 0$$

$$xx - 2x\sqrt{2(\beta\beta - \alpha\alpha)} + 2\beta\beta - 6\alpha\alpha = 0$$

woraus die Wahrheit meines Satzes erhellet. Ueberhaupt aber, wenn zwey factores imaginarii in se ducti dieses productum reale $x^4 + Bxx + Cx + D$ herausbringen sollen, so müssen dieselben also beschaffen seyn

$$xx + (b + c\sqrt{-1})x - aa - ab + bc\sqrt{-1} + ac\sqrt{-1}$$

$$xx - (b + c\sqrt{-1})x - aa + ab + bc\sqrt{-1} - ac\sqrt{-1}$$

Nun aber kann das productum dieser zwey factorum ima-

ginariorum auch in diese zwey factores reales resolvirt werden $xx + 2ax + aa - bb)(xx - 2ax + aa + cc)$. Gleichergestalt wenn eine Aequation nachfolgende 4 radices imaginarias hat

I. $x = p + q\sqrt{-1} + \sqrt{(pp + 2pq\sqrt{-1} - qq - r - s\sqrt{-1})}$
II. $x = p + q\sqrt{-1} - \sqrt{(pp + 2pq\sqrt{-1} - qq - r - s\sqrt{-1})}$
III. $x = p - q\sqrt{-1} + \sqrt{(pp - 2pq\sqrt{-1} - qq - r + s\sqrt{-1})}$
IV. $x = p - q\sqrt{-1} - \sqrt{(pp - 2pq\sqrt{-1} - qq - r + s\sqrt{-1})}$

um abzukürzen, setze ich $pp - qq - r = t$, $2pq - s = u$, so wird erstlich $\sqrt{(tt + uu)} \pm t$ allzeit eine quantitas positiva, und folglich $\sqrt{(\pm t + \sqrt{(tt + uu)})}$ eine quantitas realis seyn. Dieses vorausgesetzt, so ist die summa radicum $\text{I} + \text{III} = 2p + \sqrt{(2t + 2\sqrt{(tt + uu)})}$; summa $\text{II} + \text{IV} = 2p - \sqrt{(2t + 2\sqrt{(tt + uu)})}$; productum radicum

$$\text{I} . \text{III} = pp + qq + p\sqrt{(2t + 2\sqrt{(tt + uu)})} + \sqrt{(tt + uu)} + q\sqrt{(-2t + 2\sqrt{(tt + uu)})}$$

productum radicum

$$\text{II} . \text{IV} = pp + qq - p\sqrt{(2t + 2\sqrt{(tt + uu)})} + \sqrt{(tt + uu)} + q\sqrt{(-2t + 2\sqrt{(tt + uu)})},$$

welches alles quantitates reales sind.

Ew. transformatio formulae $4pmn - m - n = \square$ in hanc $4npq - p - q = \square$ ope substitutionis $m = 4n^2q - n$ kann ein grosses Licht zur Demonstration geben. Denn wenn man nur demonstriren könnte dass $4pmn - m - n$ kein Quadrat sey, wenn m eine Zahl ist von dieser Art $4nnq - n$, so würde zugleich demonstrirt seyn dass $4pmn - m - n$ nullo modo ein Quadrat seyn könne. Eine gleiche Transformation geht auch an durch diese Substitution

$$m = (4np)^{2a}x - \frac{n((4np)^{2a} - 1)}{4np - 1}$$

oder

$$m = 4nn(4np)^{2a}y - \frac{n((4np)^{2a+1} - 1)}{4np - 1}.$$

Ich kann auf keine Weise herausbringen, dass diese series $r = \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) - \text{etc.} = \frac{(\pi\pi - 3)l2}{6}$; denn da alle termini evoluti von dieser Form $\frac{1}{xx(x+n)}$ sind, und $\frac{1}{xx(x+n)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{xx} - \frac{1}{nn}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{nn}\cdot\frac{1}{(x+n)}$, so folget nach der von Ew. mir gütigst communicirten Methode, dass

$$r = \frac{\pi\pi l2}{6} - 1 + \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \text{etc.};$$

also müsste seyn

$$\frac{1}{2}l2 = 1 - \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \text{etc.}$$

Ich finde aber die summam dieser series per approximationem $= 0{,}7504$, und folglich grösser als $l2$.

Dass diese series

$$\beta = 1 + \frac{1}{2^5}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \text{etc.} = AC - \frac{1}{2}BB$$

habe auch durch Ew. Methode gefunden. Dass ich also die Summ $\frac{\pi^6}{2.3^3.7} - \frac{1}{2}BB$ für verdächtig halte, weilen proxime $\frac{\pi^6}{2.3^3.7} = 2{,}54335$ und $\frac{1}{2}BB = 0{,}72247$, und also der valor für β viel zu gross herauskäme, dieses wird noch mehr bestätigt, wenn Ew. angeben

$$b = 1 + \frac{1}{2^4}\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3^4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \text{etc.}$$
$$= BB - \frac{11\pi^6}{2.3^4.5.7},$$

denn da $BB = 1{,}444940$ und $\frac{11\pi^6}{2.3^4.5.7} = 1{,}86513$, so würde b negativum werden.

Für die von Ew. mir gütigst communicirte Methode sage tausendfältigen Dank, indem dieselbe weit leichter und

naturlicher auf diese series leitet, als diejenige, welche ich gebranchet und sehr embarassant ist. Um aber diese herrliche Methode auf die folgenden casus zu appliciren, so habe dieses Lemma gebraucht

$$\frac{1}{x^n(x+a)^n} = \frac{1}{a^n}\left(\frac{1}{x^n} \pm \frac{1}{(x+a)^n}\right) - \frac{n}{a^{n+1}}\left(\frac{1}{x^{n-1}} \mp \frac{1}{(x+a)^{n-1}}\right)$$
$$+ \frac{n(n+1)}{1.2.a^{n+2}}\left(\frac{1}{x^{n-2}} \pm \frac{1}{(x+a)^{n-2}}\right)$$
$$- \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3.a^{n+3}}\left(\frac{1}{x^{n-3}} \mp \frac{1}{(x+a)^{n-3}}\right) + \text{etc.}$$

bis man ad potestates primas ipsarum x et $x+a$ kommt. Von den signis ambiguis gelten die oberen, wenn n ein numerus par ist, sonst die unteren. Wenn auch ungleiche dignitates mit einander multiplicirt werden, so dienet dieses Lemma: $\frac{1}{x^m(x+a)^n} + \frac{1}{x^n(x+a)^m}$

$$= \frac{1}{a^n}\left(\frac{1}{x^m} \pm \frac{1}{(x+a)^m}\right) - \frac{n}{1.a^{n+1}}\left(\frac{1}{x^{m-1}} \mp \frac{1}{(x+a)^{m-1}}\right)$$
$$+ \frac{n(n+1)}{1.2.a^{n+2}}\left(\frac{1}{x^{m-2}} \pm \frac{1}{(x+a)^{m-2}}\right) - \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{a^m}\left(\frac{1}{x^n} \pm \frac{1}{(x+a)^n}\right) - \frac{m}{1.a^{m+1}}\left(\frac{1}{x^{n-1}} \mp \frac{1}{(x+a)^{n-1}}\right)$$
$$+ \frac{m(m+1)}{1.2.a^{m+2}}\left(\frac{1}{x^{n-2}} \pm \frac{1}{(x+a)^{n-2}}\right) - \text{etc.}$$

Wenn man nun setzt $P = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \text{etc.}$, $Q = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.}$ et $Z = 1 + \frac{1}{2^{m+n}} + \frac{1}{3^{m+n}} + \frac{1}{4^{m+n}} + \text{etc.}$, so findet sich

$$PQ - Z = + \frac{1}{1.2^m} + \frac{1}{2^n.3^m} + \frac{1}{3^n.4^m} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{1.2^n} + \frac{1}{2^m.3^n} + \frac{1}{3^m.4^n} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{1.3^m} + \frac{1}{2^n.4^m} + \frac{1}{3^n.5^m} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{1.3^n} + \frac{1}{2^m.4^n} + \frac{1}{3^m.5^n} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{1}{1.4^m} + \frac{1}{2^n.5^m} + \frac{1}{3^n.6^m} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{1.4^n} + \frac{1}{2^m.5^n} + \frac{1}{3^m.6^n} + \text{etc.}$$
etc.

Wenn man nun sowohl gleiche als ungleiche dignitates mit einander multiplicirt, wie Ew. unfehlbar werden gethan haben, so finde, wie schon vorher gemeldet, $\beta = AC - \frac{1}{2}BB$ und $b = BB - \frac{1}{3}E$ und wenn man weiter geht und setzt

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2^5}\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) + \text{etc.}$$
$$\beta = 1 + \frac{1}{2^6}\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \text{etc.}$$
$$\gamma = 1 + \frac{1}{2^7}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \text{etc.}$$

so findet sich $\gamma = AE - BD + \frac{1}{2}CC$ und $2\alpha + 5\beta = 10BD - \frac{9}{2}CC$, wo A, B, C, D, etc. die vorgemeldten valores behalten.

Die series $B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} +$ etc. will sich noch auf keine Art tractiren lassen. Ich fand letztens per approximationem, dass $BB = A - \frac{1}{5}$, welches ziemlich genau eintrifft, aber doch nicht Stich hält, denn es ist

$$BB = 1{,}44494079843 \text{ und } A = 1{,}64493406684,$$
$$A - \frac{1}{5} = 1{,}44493406684 \text{ und } BB = A - \frac{1}{5} + \frac{673}{100000000}.$$

Inzwischen ist der nexus zwischen dieser Serie

$$B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$$

und den längst bemerkten Bruchen

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{10}, \frac{5}{6}, \frac{691}{210}, \frac{35}{2} \text{ etc.}$$

remarquabel; denn wenn

$$s = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{3}{10} + \frac{5}{6} - \frac{691}{210} + \frac{35}{2} - \text{etc.}$$

so ist $B = 1 + \frac{1}{2} s$. Der Beweis davon steht in meiner Dissertation: *De inventione termini summatorii ex dato termino generali.* Denn, wenn man setzt $z = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots \frac{1}{x^3}$, und $B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \text{etc. in infinitum}$, so wird

$$B = Z + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x^4} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2x^6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2x^8} - \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2x^{10}}$$
$$+ \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2x^{12}} - \frac{691}{210} \cdot \frac{1}{2x^{14}} + \text{etc.}$$

Wenn man also für x eine beliebige Zahl, als 10, nimmt, so kann man per additionem actualem Z finden: es wird nehmlich

$$Z = 1{,}1975319856741932516686862869780$$

dahero ist

$$B = Z + \frac{1}{200} - \frac{1}{2000} + \frac{1}{40000} - \frac{1}{12000000} + \frac{1}{1200000000} - \text{etc.}$$

und wird

$$B = 1{,}202056903159594.$$

Gleichergestalt können auch die summae serierum reliquarum potestatum gefunden werden, nachdem man einige terminos ab initio actu addirt hat. Als es sey

$$Z = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots \frac{1}{x^n} \text{ und } N = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \text{etc. in inf.}$$

so wird

$$N = Z + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{1.2.x^n} + \frac{n}{1.2.3} \cdot \frac{1}{2x^{n+1}}$$
$$- \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{1}{6x^{n+3}} + \frac{n(n+1)\ldots(n+4)}{1.2.3\ldots7} \cdot \frac{1}{6x^{n+5}}$$
$$- \frac{n(n+1)\ldots(n+6)}{1.2.3\ldots9} \cdot \frac{3}{10x^{n+7}} + \frac{n(n+1)\ldots(n+8)}{1.2.3\ldots11} \cdot \frac{5}{6x^{n+9}}$$
$$- \frac{n(n+1)\ldots(n+10)}{1.2.3\ldots13} \cdot \frac{691}{210x^{n+11}} + \text{etc.}$$

Durch diese Regel habe ich nachfolgende summas vero proximas gefunden

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\text{etc.}=1{,}644934066848226436=A$$

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\text{etc.}=1{,}202056903159594281=B$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\text{etc.}=1{,}082323233711138191=C$$

$$1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\text{etc.}=1{,}036927755106863293=D$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\text{etc.}=1{,}017343061984449139=E$$

$$1+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}+\text{etc.}=1{,}008349277386601872=F$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\text{etc.}=1{,}004077356197944339=G$$

$$1+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{3^9}+\text{etc.}=1{,}002008392826082210=H$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\text{etc.}=1{,}000994575127618085=I$$

$$1+\frac{1}{2^{11}}+\frac{1}{3^{11}}+\text{etc.}=1{,}000494188604194651=K$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\text{etc.}=1{,}000246086553308048=L$$

$$1+\frac{1}{2^{13}}+\frac{1}{3^{13}}+\text{etc.}=1{,}000122713347585744=M$$

$$1+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{3^{14}}+\text{etc.}=1{,}000061248135058704=N$$

$$1+\frac{1}{2^{15}}+\frac{1}{3^{15}}+\text{etc}=1{,}000030588236307020=O$$

$$1+\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{3^{16}}+\text{etc}=1{,}000015282259408657=P$$

Bald wird der 7te tomus von den hiesigen Miscellaneis zum Vorschein kommen, welcher ziemlich stark seyn wird, indem ich allein in der mathematischen Class auf 28 Bogen habe. Darunter ist eine grosse pièce von dem Cometen des vorigen Jahres und eine neue Art die series

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \text{etc.}$$

zu summiren, welche bloss allein durch Differentiation geschiehet. — Vor etlichen Wochen hat man wiederum einen Cometen allhier gesehn, welcher aber ohne Schwanz und sehr klein war, auch nur 10 Tage lang aus dem Dracone durch Ursam majorem in Leonem minorem gehend observirt worden; es ist aber keine so accurate Observation gemacht worden, wodurch man seinen Lauf bestimmen könnte. Die Opera Joh. Bernoullii omnia werden bald aus der Presse kommen und unserm König dedicirt werden. Es nimmt mich sehr Wunder ob Ew. mit der Akademie in gar keiner Connexion mehr stehen.

Euler.

LETTRE LVII.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Mêmes sujets.

St. Petersburg d. 25 Mars 1743.

Endlich stellet sich die demonstratio nova ein, so im Folgenden bestehet:

Lemma 1. Si aequatio $B \ldots 4mn - m - 1 = a^2$ non est possibilis casu quo m est numerus hujus formae $4u - 1$, neque ullo alio casu ipsius m erit possibilis, ut in superioribus litteris ostensum fuit.

Lemma 2. Si vera est aequatio B, vera etiam erit $C \ldots 4Mn - M - 1 = A^2$, posito $M = 2a + m + 4n - 1$, fiet enim $A = a + 4n - 1$.

Sed aequatio C non potest fieri vera, nisi M sit numerus hujus formae $4v - 1$ (per lemma 1), erit igitur $M = 4v - 1$ $= 2a + 4n - 1 + 4u - 1$, ergo $4v = 2a + 4n + 4u - 1$,

Remarques hätte schreiben sollen, man alsdann nicht seinem Exempel, sondern seinen Regeln zu folgen habe. Es ist mir also sehr lieb, dass Ew. an meiner Methode etwas Gutes gefunden, ohngeachtet in die von mir angeführten Exempel einigé Fehler eingeschlichen sind.

Wäre mir Ew. lemma, wodurch $\frac{1}{x^m(x+a)^n}$ in andere series resolviret wird, eher bekannt gewesen, so hätte ich die erwähnten summas viel leichter und ordentlicher finden können. Ich habe indessen angemerket, dass wenn die summa seriei, deren formula generalis ist $\frac{1}{(3x-2)^2}$ für bekannt angenommen und $= a$ gesetzt wird, alsdann jede series, cujus terminus generalis est $\frac{1}{(6x+p)^2}$, ubi p sit numerus quicunque integer, exprimiret werden kann per a et quadraturam circuli, hingegen kann ich die series hujus formae $\frac{1}{(12x+p)^2}$, dato p numero quocunque, nicht anders ad quadraturam circuli reduciren, als cognitis summis trium casuum $p = 11$, $p = 10$, $p = 9$, aut aliorum trium his aequivalentium.

Es wird Ew. vermuthlich nicht schwer seyn Ihr lemma auch auf $\frac{\alpha x^{2n-2}+\beta x^{2n-3}+\gamma x^{2n-4}+\text{etc.}}{px+q)^n(px+r)^n}$ zu extendiren; so ist z. Ex. positis $p = 4$, $q = -3$, $r = \div 1$, die summa seriei

$$\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{(4x-3)^2(4x-1)^2} = \frac{\alpha(64u+\pi^2-6\pi)}{2^9} + \frac{\beta(16u+\pi^2-4\pi)}{2^7} + \frac{\gamma(\pi^2-2\pi)}{2^6}$$

wenn u die summam seriei $\frac{1}{(4x-3)^2}$ andeutet.

Imgleichen, wenn $p = 4$, $q = -2$, $r = 0$, so wird die summa seriei

$$\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{(4x-2)^2(4x)^2} = \frac{\alpha\pi^2}{2^9} + \frac{\beta(\pi^2-8l2)}{2^8} + \frac{\gamma(\pi^2-12l2)}{3.2^6}.$$

Wenn man setzet $v = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{n}$

$$A = \frac{1}{nn(n+1)} + \frac{(2n+1)}{(n+1)^2 nn}\left(\nu + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{\pi\pi}{6(n+1)n}$$

$$B = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)} - \frac{(2n+3)}{(n+2)^2(n+1)^2}\left(\nu + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) + \frac{\pi\pi}{6(n+2)(n+1)}$$

$$C = \frac{1}{(n+2)^2(n+3)} - \frac{(2n+5)}{(n+3)^2(n+2)^2}\left(\nu + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) + \frac{\pi\pi}{6(n+3)(n+2)}$$

so werden die quantitates AC et BB desto weniger von einander differiren, je grösser der numerus n genommen wird.

Was Ew. von der summa seriei B in Dero Schreiben beyfügen, halte ich für sehr merkwürdig. Die Dissertation *de inventione termini summatorii* erinnere ich mich nicht gesehen zu haben, weiss auch nicht, ob dieselbe in Berlin oder allhier herausgekommen ist. Für die mir communicirten summas in terminis decimalibus danke ich ergebenst.

Goldbach.



LETTRE LVIII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Insuffisance de la démonstration de Goldbach du théorème $4mn - m - 1 = a^2$. Résolution des fractions composées en fractions simples. Rapport fini entre deux séries infinies. Le terme général d'one série étant donné, troover le terme sommatoire de cette série. Méthodes d'approximation pour trouver le nombre π.

Berlin d. 9 April 1748

Ew. bin ich für die mir gütigst überschriebene Demonstration, dass $4mn - m - 1$ keine Quadratzahl seyn kann, gehorsamst verbunden. Die raisonnemens darin sind wegen der propositionum exclusivarum und infinitarum, so darin häufig vorkommen, so tiefsinnig, dass ich viele Mühe gehabt, ehe ich dieselben habe völlig einsehen und aus einander wickeln können, und die gewöhnlichen Regeln der Logik scheinen mir dazu kaum hinlänglich zu seyn. Alles beruhet auf dem ersten lemmate, und wenn dasselbe seine Richtigkeit hat, so ist an der Demonstration nicht das Geringste auszusetzen. Ew. berufen sich wegen dieses lemmatis auf

Dero vorige Briefe, aus welchen ich diese Demonstration gezogen:

I. Si $4nx - x - 1$ est quadratum casu $x = m$, tum erit etiam quadratum casu $x = 16mn^2 - 4n - 1$.

II. Ergo si $4nx - x - 1$ non est quadratum casu $x = 16mn^2 - 4n - 1$, tum eadem formula $4nx - x - 1$ non erit quadratum casu $x = m$.

III. Cum igitur $16mn^2 - 4n - 1$ contineatur in forma $4v - 1$, si demonstretur formulam $4nx - x - 1$ quadratum esse non posse casu $x = 4v - 1$, tum etiam certum erit formulam $4mn - m - 1$ quadratum esse non posse.

IV. Quare formula $4mn - m - 1$ quadratum esse non poterit, nisi quadratum sit haec formula $4nx - x - 1$ existente x numero formae $4v - 1$.

V. Quoniam ergo hae formulae $4mn - m - 1$ et $4nx - x - 1$ congruunt, formula $4mn - m - 1$ quadratum esse non potest nisi sit m numerus formae $4v - 1$.

Wenn diese letzte Conclusion ihre Richtigkeit hat, als worin Ew. erstes lemma besteht, so ist die ganze übrige Demonstration vollkommen. Allein eben diese letzte Consequenz erwecket bei mir einen Scrupel, welchen ich nicht wohl mit Worten ausdrücken kann. Dass aber dieser mein Scrupel gegründet sey, kann ich dadurch zeigen, weilen man auf gleiche Art beweisen könnte, dass $4mn - m + 1$ kein quadratum seyn könnte, nisi sit m numerus hujus formae $4v + 1$, welches doch falsch ist. Diese Demonstration würde also lauten:

I. Si $4nx - x + 1$ est quadratum casu $x = m$, erit etiam quadratum casu $x = 16mn^2 + 4n + 1$, fit enim $64mn^3 - 16mn^2 + 16n^2 = 16n^2(4mn - m + 1)$.

II. Ergo si $4nx - x + 1$ non fuerit quadratum casu $x = 16mn^2 + 4n + 1$, non erit quadratum haec forma $4mn - m + 1$.

III. Cum igitur $16mn^2 + 4n + 1$ contineatur in forma $4v + 1$, si demonstretur formulam $4nx - x + 1$ quadratum esse non posse casu $x = 4v + 1$, tum simul certum foret, hanc formulam $4mn - m + 1$ prorsus quadratum esse non posse.

IV. Quare formula $4mn - m + 1$ quadratum esse non poterit, nisi quadratum sit haec formula $4nx - x + 1$ casu $x = 4v + 1$.

V. Quoniam ergo formulae $4mn - m + 1$ et $4nx - x + 1$ congruunt, formula $4mn - m + 1$ quadratum esse non poterit nisi sit m numerus formae $4v + 1$.

Da nun in dieser Demonstration ein Fehler gewiss steckt, so kann auch die vorhergehende, als welche dieser in allem gleich ist, nicht admittirt werden. Vielleicht können aber Ew. von Dero erstem lemmate eine andere Demonstration geben, welche dieser Difficultät nicht unterworfen ist, deren Richtigkeit am füglichsten auf gleiche Art erkannt werden kann, wenn nehmlich Ew. aufsuchen werden, ob eben dasselbe ratiocinium nicht auf die Formul $4mn - m + 1$ sich appliciren lasse.

Was die andere Demonstration betrifft, dass $4pmn - m - n$ kein quadratum seyn könne, so kommt gleichergestalt die ganze Sach nur darauf an, dass man richtig beweise, dieselbe Formul könne keine Quadratzahl geben, nisi sit $m = 4nnq - n$. Wenn dieser Satz seine Richtigkeit hätte, so würde die folgende Demonstration nicht einmal nöthig seyn, weilen ob eandem rationem auch seyn müsste $n =$

$4mmr - m$, und folglich zugleich $m < n$ und $n < m$, welches unmöglich ist. Man könnte aber auf eben diese Art auch beweisen, dass $pmn - m - n$ nimmer ein quadratum seyn könne, denn kraft eben des vorigen ratiocinii musste $pmn - m - n$ kein Quadrat seyn können, nisi sit $m = nnq - n$; nun aber würde dieser Schluss der Wahrheit doch nicht gemäss seyn.

Ungeacht ich aber auf diese Weise in dem ratiocinio einen Fehler verspüre, so muss ich doch gestehen, dass ich denselben nicht deutlich darthun und vor Augen legen kann, welches doch sehr nöthig wäre um in andern Fällen denselben desto sicherer vermeiden zu können.

Meine Regel um eine solche Expression

$$\frac{ax^k + bx^{k-1} + cx^{k-2} + \text{etc.}}{(px-q)^m (rx-s)^n}$$

in ihre partes simplices zu resolviren, wenn nur $k < m + n$, verhält sich folgendergestalt. Sint partes quaesitae

$$+ \frac{A}{(px-q)^m} + \frac{B}{(px-q)^{m-1}} + \frac{C}{(px-q)^{m-2}} + \frac{D}{(px-q)^{m-3}} + \cdots + \frac{M}{px-q}$$

$$+ \frac{\mathfrak{A}}{(rx-s)^n} + \frac{\mathfrak{B}}{(rx-s)^{n-1}} + \frac{\mathfrak{C}}{(rx-s)^{n-2}} + \frac{\mathfrak{D}}{(rx-s)^{n-3}} + \cdots + \frac{\mathfrak{M}}{rx-s}$$

Ponatur brevitatis gratia $\frac{ax^k + bx^{k-1} + cx^{k-2} + \text{etc.}}{(rx-s)^n} = Q$ et quaerantur per differentiationem continuam, posito dx constante, valores $\frac{dQ}{dx}, \frac{ddQ}{dx^2}, \frac{d^3Q}{dx^3}, \frac{d^4Q}{dx^4}$ etc. eritque

$$A = Q, \qquad B = \frac{1}{1.p} \cdot \frac{dQ}{dx}, \qquad C = \frac{1}{1.2.pp} \cdot \frac{ddQ}{dx^2}, \qquad D = \frac{1}{1.2.3.p^3} \cdot \frac{d^3Q}{dx^3}, \text{ etc.} \quad \Big\} \text{ posito } x = \frac{q}{p}.$$

Simili modo ponatur $\frac{ax^k + bx^{k-1} + cx^{k-2} + \text{etc}}{(px-q)^m} = S$, erit

$$\mathfrak{A} = S, \qquad \mathfrak{B} = \frac{1}{1.r} \cdot \frac{dS}{dx}, \qquad \mathfrak{C} = \frac{1}{1.2.rr} \cdot \frac{ddS}{dx^2}, \qquad \mathfrak{D} = \frac{1}{1.2.3.r^3} \cdot \frac{d^3S}{dx^3}, \text{ etc.} \quad \Big\} \text{ posito } x = \frac{s}{r}.$$

Wenn also diese Formul $\frac{axx + bx + c}{(4x-3)^2 (4x-1)^2}$ proponirt wird, um die partes $\frac{A}{(4x-3)^2} + \frac{B}{4x-3} + \frac{\mathfrak{A}}{(4x-1)^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4x-1}$ zu finden, so wird erstlich

$$Q = \frac{axx + bx + c}{(4x-1)^2}, \quad \frac{dQ}{dx} = \frac{2ax + b}{(4x-1)^2} - \frac{8(axx + bx + c)}{(4x-1)^3}$$

und posito $x = \frac{3}{4}$ ob $p = 4$ et $q = 3$, erit

$$A = \frac{\frac{9}{16}a + \frac{3}{4}b + c}{4} = \frac{9}{64}a + \frac{3}{16}b + \frac{1}{4}c$$

$$B = \frac{1}{4}\left(\frac{\frac{3}{2}a + b}{4} - \frac{\frac{9}{2}a - 6b - 8c}{8}\right) = -\frac{3}{64}a - \frac{1}{8}b - \frac{1}{4}c$$

Hernach ist

$$S = \frac{axx + bx + c}{(4x-3)^2}, \quad \frac{dS}{dx} = \frac{2ax + b}{(4x-3)^2} - \frac{8(axx + bx + c)}{(4x-3)^3}$$

und posito $x = \frac{1}{4}$ ob $r = 4$ et $s = 1$, erit

$$\mathfrak{A} = \frac{\frac{1}{16}a + \frac{1}{4}b + c}{4} = \frac{1}{64}a + \frac{1}{16}b + \frac{1}{4}c$$

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{4}\left(\frac{\frac{1}{2}a + b}{4} + \frac{\frac{1}{2}a + 2b + 8c}{8}\right) = \frac{3}{64}a + \frac{1}{8}b + \frac{1}{4}c$$

Folglich wird die proponirte Expression $\frac{axx + bx + c}{(4x-3)^2 (4x-1)^2}$ in diese partes resolvirt

$$+ a\left(\frac{9}{64(4x-3)^2} - \frac{3}{64(4x-3)} + \frac{1}{64(4x-1)^2} + \frac{3}{64(4x-1)}\right)$$

$$+ b\left(\frac{3}{16(4x-3)^2} - \frac{1}{8(4x-3)} + \frac{1}{16(4x-1)^2} + \frac{1}{8(4x-1)}\right)$$

$$+ c\left(\frac{1}{4(4x-3)^2} - \frac{1}{4(4x-3)} + \frac{1}{4(4x-1)^2} + \frac{1}{4(4x-1)}\right)$$

Wenn also die gegebene expressio ein terminus generalis seriei infinitae ist, ob

$$\int\frac{1}{4x-3} - \int\frac{1}{4x-1} = \frac{\pi}{4} \text{ et } \int\frac{1}{(4x-3)^2} + \int\frac{1}{(4x-1)^2} = \frac{\pi\pi}{8} \text{ et}$$

$$u = \int\frac{1}{(4x-3)^2}$$

wie Ew. annehmen, so wird derselben seriei summa seyn

$$= a\left(\frac{\pi\pi}{512} + \frac{1}{8}u - \frac{3\pi}{256}\right) + b\left(\frac{\pi\pi}{128} + \frac{1}{8}u - \frac{\pi}{32}\right) + c\left(\frac{\pi\pi}{32} - \frac{\pi}{16}\right)$$

$$= \frac{\pi\pi}{512}(a + 4b + 16c) + \frac{u}{8}(a + b) - \frac{\pi}{256}(3a + 8b + 16c).$$

Wenn also $a = -b$, so kann die summa seriei per solam quadraturam circuli angegeben werden.

Dass die drey Formuln A, B, C, posito

$$v = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n}$$

so beschaffen sind, dass wenn n ein numerus valde magnus ist, proxime $AC = B^2$ seyn wird, deucht mir daraus klar zu seyn, weilen in diesem Fall dieselben Quantitäten sogar fast einander gleich werden.

Wenn die summa seriei $\frac{1}{(3x-2)^2}$ für bekannt angenommen wird, so ist auch die summa seriei $\frac{1}{(3x-1)^2}$ bekannt, und da in beiden die termini alterni besonders summirt werden können, so findt man daraus die summam seriei $\frac{1}{(6x \pm n)^2}$ denotante n numerum quemcunque integrum. Hieraus ist ferner klar, dass um die seriem $\frac{1}{(12x \pm n)^2}$ zu summiren, drey casus diversi ipsius n für bekannt angenommen werden müssen.

Ew. Postscriptum vom 12[ten] Februar habe ich wohl erhalten, und weilen ich auf die fürnehmsten Punkte schon

geantwortet hatte und nicht wusste, dass Denselben die Briefe franco zugestellt werden, so habe meine fernere Antwort bis jetzt verspart. Ew. darin enthaltene Reflexion über zwey series, deren jede eine summam infinitam hat, doch aber unter sich eine rationem finitam haben, ist sehr merkwürdig. Dergleichen series können nach Belieben auf folgende Art gefunden werden. Sit seriei $a + b + c + d +$ etc. $= A$ summa infinita, hujus autem seriei $\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ etc. $= B$ summa finita, erit

$$AB = a\alpha + b(\alpha + \beta) + c(\alpha + \beta + \gamma) + d(\alpha + \beta + \gamma + \delta) + \text{etc.}$$
$$+ \beta a \quad + \gamma(a + b) \quad + \delta(a + b + c) + \text{etc.}$$

hier ist aber die summa seriei inferioris finita und folglich evanescirt dieselbe prae superiori, dahero ist $\frac{AB}{A} = B$, oder

$$\frac{a\alpha + b(\alpha + \beta) + c(\alpha + \beta + \gamma) + d(\alpha + \beta + \gamma + \delta) + \text{etc.}}{a + b + c + d + \text{etc.}} =$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$$

ferner ist auch $b + c + d + e +$ etc. $= A$ und also

$$AB = b\alpha + c(\alpha + \beta) + d(\alpha + \beta + \gamma) + \text{etc.}$$

welche zur obigen gethan gibt

$$2AB = (a+b)\alpha + (b+c)(\alpha+\beta) + (c+d)(\alpha+\beta+\gamma) + \text{etc.} = C$$

und also $\frac{C}{2A} = B$. Wenn $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ etc. und $B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} +$ etc. so kommen Ew. series heraus.

Meine Dissertation de inventione termini summatorii ex dato termino generali seriei ist in dem 8ten tomo Commentariorum gedruckt. Dieselbe bestehet kürzlich darin, dass wenn man setzt: $\overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots + \overset{x}{X} = S$ oder wenn S den terminum summatorium einer series andeutet, deren terminus generalis ist $= X$, das ist eine quantitas ex indice x utcunque composita, so wird seyn

$$S = \int X dx + \frac{X}{1.2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dX}{1.2.3.dx} - \frac{1}{6} \cdot \frac{d^3 X}{1.2..5 dx^3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{d^5 X}{1.2...7 dx^5}$$
$$- \frac{3}{10} \cdot \frac{d^7 X}{1.2...9\, dx^7} + \frac{5}{6} \cdot \frac{d^9 X}{1.2...11.dx^9}$$
$$- \frac{691}{210} \cdot \frac{d^{11} X}{1.2...13 dx^{11}} + \text{etc.}$$

da ob integrationem $\int X dx$ eine solche constans muss addirt oder subtrahirt werden, dass die ganze expressio wird $= 0$, wenn $x = 0$.

Wenn also zum Exempel der terminus summatorius von dieser serie $1 + 2^8 + 3^8 + 4^8 + \text{etc.} \ldots + x^8$ gesucht werden soll, so ist $X = x^8$, $\int X dx = \frac{1}{9} x^9$, $\frac{dX}{dx} = 8x^7$, $\frac{ddX}{dx^2} = 7.8x^6$, $\frac{d^3 X}{dx^3} = 6.7.8x^5$, $\frac{d^4 X}{dx^4} = 5.6.7\,8x^4$, $\frac{d^5 X}{dx^5} = 4.5.6.7.8x^3$, $\frac{d^7 X}{dx^7} = 2.3.4\; 5.6.7.8x$, $\frac{d^9 X}{dx^9} = 0$ und die folgenden differentialia alle evanesciren. Dahero wird

$$S = \frac{1}{9} x^9 + \frac{1}{2} x^8 + \frac{2}{3} x^7 - \frac{7}{15} x^5 + \frac{2}{9} x^3 - \frac{1}{30} x.$$

So oft also X eine functio integra von x ist, weilen bey einer jeglichen Differentiation die dimensiones abnehmen, so muss immer ein terminus summatorius in forma finita gefunden werden. Wenn aber der terminus generalis X eine Fraction ist, so gehen auch die differentiationes in infinitum fort und folglich wird der terminus summatorius per seriem infinitam exprimirt. In diesem Fall kann auch die constans adjicienda nicht anders gefunden werden als dass man datum terminorum numerum actu addire und die constantem so annehme, dass in diesem Fall die bekannte Summa herauskomme. Als es sey $S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.} \cdots + \frac{1}{x^2}$, so ist $X = \frac{1}{x^2}$ und $\int X dx = \text{Constant.} - \frac{1}{2xx}$; ferner

$\frac{dX}{dx} = -\frac{3}{x^4}$, $\frac{ddX}{dx^2} = \frac{3.4}{x^5}$, $\frac{d^3X}{dx^3} = -\frac{3.4.5}{x^6}$, $\frac{d^5X}{dx^5} = -\frac{3.4.5.6.7}{x^8}$

Dahero wird $S =$ Const.

$-\frac{1}{2xx} + \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x^4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2x^6} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2x^8} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2x^{10}} -$ etc.

Um die constantem zu finden, so addire man actu 10 terminos. Gesetzt, die gefundene Summe sey N, so muss, posito $x = 10$, $S = N$ werden, also wird

Const. $= N + \frac{1}{2.10^2} - \frac{1}{2.10^3} + \frac{1}{2.2.10^4} - \frac{1}{2.6.10^6} + \frac{1}{2.6.10^8} -$ etc.

woraus diese constans verae proxima leicht gefunden wird.

Hiernach kann man leicht die summam seriei ad datum quemvis terminum finden, und wenn man die summam in infinitum verlangt, so setze man $x = \infty$, und da wird $S =$ Const., also die constans inventa ist die summa seriei in infinitum continuatae.

Wenn man diese seriem

$$\frac{1}{aa} + \frac{1}{aa+1} + \frac{1}{aa+4} + \frac{1}{aa+9} + \cdots + \frac{1}{aa+aa}$$

actu summirt, so ist die Summ deswegen merkwürdig, weil durch dieselbe die quadratura circuli so nahe gefunden werden kann. Es sey $s = \frac{1}{aa} + \frac{1}{aa+1} + \frac{1}{aa+4} + \cdots + \frac{1}{aa+aa}$, so wird proxime seyn $\pi = 4as - \frac{3}{a} + \frac{1}{6aa}$. Als wenn man setzt $a = 1$, fit $s = 1,5$ et $\pi = 3,166666\ldots$ zu gross. Si $a = 2$ fit $s = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} = 0,575$; $4as = 4,6$ und also $\pi = 3,14166666\ldots$ zu gross.

Sit $a = 3$ fit $s = \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \frac{1}{18} = 0,343589743589743589 7$,

$4as = 12s = 4,1230769230769230$

subtr. $\frac{3}{a} = 1$

add. $\frac{1}{6aa} = 0.0185185185185185$

fiet $\pi = 3,1415954415954415$. Diese Expression gibt also die Peripherie immer zu gross. Ich habe demnach den excessum gesucht, und gefunden, dass sey

$$\pi = 4as - \frac{3}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1.3aa} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^2.3.7a^6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2^4\,5.11a^{10}}$$

$$- \frac{35}{2} \cdot \frac{1}{2^6.7.15a^{14}} + \frac{43867}{42} \cdot \frac{1}{2^8.9.19a^{18}}$$

$$- \frac{854513}{6} \cdot \frac{1}{2^{10}\,11.23a^{22}} + \frac{76977927}{2} \cdot \frac{1}{2^{12}.13.27a^{26}} - \text{etc.}$$

$$- \frac{4\pi}{e^{2\pi a} - 1},$$

allwo dieser letzte terminus ungemein klein wird, wenn a mittelmässig gross angenommen wird; denn es ist schon $e^{6\pi} = 153552990$, weilen $e^{\pi} = 23,14069$. — Ew. waren einmal auf Operationen bedacht, wie man Zahlen finden könnte, so ohne einige legem fortgingen, um zu versuchen, ob man nicht etwa auf eine solche Art die Zahl $\pi = 3,14159$ etc. herausbringen könnte. Solche irreguläre Zahlen können nun gefunden werden durch die ordentliche Division, wenn man bey jeder Operation den divisorem um 1 vermehrt; als aus diesem Exempel zu sehen

	1 2 2 4 5 2 6 4 4 10 1 10 9 6 15 6 9 18 9
Dividend	1,0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
Divisores	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20
Quotus	0,4 6 4 7 8 2 7 4 3 9 0 7 6 3 9 3 4 9 4 etc.

Wenn ich nehmlich so viel mal nehmen könnte, dass nichts übrig bliebe, so nehme ich einmal weniger, damit diese

Division in infinitum fortgehe. Wenn man nun auf eine solche Art die quadraturam circuli finden könnte, so hielte ich dieselbe für so gut als würklich gefunden.

Auf die vorher beschriebene Art durch die series $\pi =$ $4as - \frac{3}{a} + \frac{1}{6aa}$ etc., wenn für a eine etwas grosse Zahl, als 10, genommen wird, kann der valor ipsius π auf viel Figuren ziemlich leicht gefunden werden, allein da die coëfficientes sehr irregular fortgehen, so halte ich keine Methode bequemer um den valorem ipsius π zu finden, als diejenige, welche schon längstens einmal gefunden. Ich weiss nicht, ob Ew. derselben sich noch erinnern; sie bestehet aus zwey seriebus, deren jede stark convergirt und auch leicht per approximationes auf sehr viel Figuren summirt werden kann. Es sey nehmlich

$$A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \frac{1}{9.2^5} + \frac{1}{11.2^6} - \frac{1}{13.2^7} - \text{etc.}$$

$$B = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \frac{1}{11.2^{11}} + \frac{1}{13.2^{13}} - \text{etc.}$$

so wird seyn $\pi = 4A + 2B$ oder es ist

$$\pi = 3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5.2} - \frac{1}{6.2} - \frac{1}{7.2^2} + \frac{1}{9.2^3} + \frac{1}{10.2^3} + \frac{1}{11.2^4} - \frac{1}{13.2^5} - \frac{1}{14.2^5} - \frac{1}{15.2^6} + \text{etc.}$$

Da in diesen seriebus nur die potestates binarii vorkommen, so kann ich auch solche geben, worin nur die potestates von 2 und 3 enthalten sind. Also wenn man setzt

$$C = \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \frac{1}{11.2^{11}} + \text{etc.}$$

und

$$D = \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} - \frac{1}{11.3^{11}} + \text{etc.}$$

so wird seyn $\pi = 4C + 4D$. Diese series scheinen mir nun weit bequemer zu seyn, als diejenige, welcher sich Sharp,

Machin und Lagni bedienet, als welche ihre grossen Zahlen durch Hülfe dieser seriei

$$\pi = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3.3} + \frac{2\sqrt{3}}{5.3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7.3^3} + \frac{2\sqrt{3}}{9.3^4} - \text{etc.}$$

gefunden, welche nicht so stark convergirt, als eine von den obigen, und noch dazu dieser Schwierigkeit unterworfen ist, dass man erstlich $\sqrt{3}$ auf so viel Figuren als man haben will suchen, und dann diese beschwerliche Zahl beständig dividiren muss. Deswegen kann sich in keinem termino eine revolutio periodica figurarum finden, wodurch man die folgenden Figuren aus den vorhergehenden finden könnte. Dahingegen bey meinen seriebus dieser Vortheil in einem jeden termino stattfindet, so dass ich wohl 10 terminos per fractiones decimales von meinen seriebus evolviren wollte, ehe Lagni einen einzigen von seiner evolvirt hat.

Euler.

LETTRE LIX.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Continuation sur les mêmes sujets.

St Petersburg d. 4. Mai 1748.

Ich sehe in der That, dass das letztlich angeführte lemma 1 nicht alsofort aus dem, was ich vorher von der aequatione $4mn - m - 1 = a^2$ geschrieben hatte, erhellet; dahero bitte ich nachfolgendes raisonnement in considération zu ziehen:

Si in aequatione $E \ldots 4mn - m - 1 = a^2$ ponatur $m = 4v - 1$, $v = 4n^2M - n$ et $a^2 = 16n^2A^2$, transmutabitur aequatio E in $F \ldots 4nM - M - 1 = A^2$ quae, cum non differat ab aequatione E, nisi sola specie litterarum M, A et m, a, et pro unaquaque harum litterarum poni possint omnes numeri integri affirmativi, necesse est aequationem E et F unam eandemque esse. Si vero in E solus valor (ex hypothesi impossibilis, $m = 4v - 1$ comprehendit aequationem

F in omni sua amplitudine, quae aequatio F revera aequivalet aequationi E, sequitur, per casum $m = 4v - 1$, si impossibilis est in E, non magis excludi omnes casus possibiles aequationis F, quam omnes casus possibiles ipsius aequationis E, cum nullus casus possibilis reperiatur in E, quin sit assignabilis in F.

Dieses wird sich hoffentlich auch in dem von Ew vorgeschlagenen parallelismo mit der Formul $4nx - x + 1$, deren casus quadrabilitatis ich nicht untersuchet habe, souteniren. Wo nicht, so wird es mir lieb seyn die Sache ins künftige besser einzusehen. Ich danke indessen dienstl. für die in Ew. Schreiben enthaltenen schönen theoremata, wovon ich vielleicht künftig etwas zu melden Gelegenheit haben werde.

Goldbach.

P. S. Haben Ew. eine Methode den valorem in dem casu zu determiniren, da $f = 1$ und π in der gewöhnlichen Bedeutung genommen wird in hac formula?

$$\frac{\pi^2}{6f(f-1)} - \frac{(2f-1)}{f^2(f-1)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{f}\right) + \frac{1}{f(f-1)^2}$$

Ich halte dafür, dass der valor quaesitus alsdann seyn werde

$$-\frac{\pi\pi}{6} + \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}\right)$$

Wenn ich mich recht erinnere, so haben Sie mir ehemals eine Formul communiciret, welche die summas serierum, quarum formula est $\frac{1}{xx + fx}$, generaliter gibt, posito pro f numero quocunque etiam fracto; die Formul selbst aber ist mir vorjetzo nicht bekannt.

LETTRE LX.

═

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Continuation sur les mêmes sujets.

Berlin d. 21. Mai 1748.

Aus der Verwandelung dieser Formul $4mn - m - 1 = aa$ in diese ähnliche $4Mn - M - 1 = AA$ facta substitutione $m = 4v - 1$, $v = 4nnM - n$ et $aa = 16n^2A^2$ kann ich nicht sehen, dass mehr folget als, si formula $4mn - m - 1$ quadrata nequeat esse casu $m = 4v - 1$, omnino quadratum esse non poterit; oder, wenn man demonstriren könnte, dass $4mn - m - 1$ nullo casu $m = 4v - 1$ ein Quadrat wäre, so wäre zugleich richtig erwiesen, dass eben dieselbe Formul nullo prorsus casu ein Quadrat seyn könnte. Hingegen kann diese Conclusion nicht zugegeben werden: omnes casus, quibus $4mn - m - 1$ sit quadratum, habere $m = 4v - 1$. Aber diese Consequenz hat wiederum ihre

Richtigkeit si cognitus esset casus, quo $4mn - m - 1 = \Box$, neque tamen fuerit m numerus formae $4v - 1$, ex eo certe alius casus derivari posset, quo m esset numerus formae $4v - 1$. Um aber die Sach deutlicher zu machen, so will ich diese ähnliche Formul $9mn - m - 1 = aa$ betrachten, welche wenn man setzt $m = 9v - 1$, $v = 9nnM - n$ et $a = 9n\,1$ in diese $9Mn - M - 1 = AA$ verwandelt wird. Wenn man nun schliessen wollte diese Formul $9mn - m - 1$ könne kein quadratum seyn, nisi m sit numerus formae $9v - 1$, so würde die Unrichtigkeit dieses Schlusses sogleich erhellen, denn $9mn - m - 1$ wird ein quadratum in folgenden casibus:

$n = 2,\ m = 1$	$n = 3,\ m = 1$	$n = 6,\ m = 10$
$n = 2,\ m = 10$	$n = 3,\ m = 17$	$n = 6,\ m = 17$
$n = 2,\ m = 26$	$n = 3,\ m = 37$	$n = 6,\ m = 109$
$n = 2,\ m = 53$	$n = 3,\ m = 85$	$n = 6,\ m = 130$
etc.	etc.	etc.

woraus erhellet, dass $9mn - m - 1$ infinitis modis ein quadratum seyn könne, ohne dass m ein numerus hujus formae $9v - 1$ ist, ungeacht eben dasjenige raisonnement hier angebracht werden kann, welches bey der Formul $4mn - m - 1$ gemacht worden.

Dieses Jahr hat der Hr. Prof. Daniel Bernoulli das ganze praemium erhalten und meiner pièce ist das Accessit, jedoch ohne meinen Nahmen zuerkannt worden.

Nunmehr sind die opera Joh. Bernoullii omnia in vier Quart-Bänden fertig worden. Der Verleger, M. Bousquet, hat dieselben selbst hiehergebracht und dem Könige ein magnifiq eingebundenes Exemplar praesentirt. Ich habe auch eins von dem Hn. Bernoulli zum Praesent erhalten. Die

3 ersten tomi enthalten alle seine Piècen, welche bisher hin und wieder gedruckt worden, der 4[te] aber die anecdota. Das Exemplar wird nicht anders als für 20 Rthlr. in Francfurt verkauft. M. Bousquet hat einen Contract mit mir geschlossen, kraft welches er alle meine Schriften, ausgenommen diejenigen, welche ich nach St. Petersburg zu schicken schuldig bin, drucken wird, und wird den Anfang mit dem tractatu de Isoperimetris machen. Er hätte gern mit der Scientia navali angefangen; ich muss aber erst vernehmen, ob die Akademie noch gesinnt seyn wird, dasselbe zu drucken.

Ew. problema de inveniendo valore hujus expressionis

$$P = \frac{\pi^2}{6n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)^2} - \frac{(2n-1)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{nn(n-1)^2}$$

casu quo $n = 1$ ist gewiss mit eines von den schwersten in dieser Art. Ich habe eben denjenigen valorem herausgebracht, welchen Ew. mir entdecket. Um denselben zu finden, habe ich gesetzet $n = 1 + \alpha$, denotante α numerum evanescentem. Sit enim hoc casu $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = Q$ atque formula proposita abibit in hane

$$P = \frac{\pi\pi}{6\alpha(1+\alpha)} + \frac{1}{\alpha^2(1+\alpha)} - \frac{(1+2\alpha)Q}{\alpha^2(1+\alpha)^2} =$$

$$\frac{\pi\pi}{6}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right) + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} + 1 - Q\left(1+2\alpha\right)\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha} + 3\right) =$$

$$\frac{\pi\pi}{6\alpha} - \frac{\pi\pi}{6} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} + 1 - Q\left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right).$$

Die ganze Sach kommt also auf den valorem ipsius Q an, posito $n = 1 + \alpha$. Diesen finde ich also: generaliter ist $Q = \int \frac{1-x^n}{1-x} dx$ si post integrationem ponatur $x = 1$. Denn es ist $\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots x^{n-1}$ folglich

$$\int \frac{1-x^n}{1-x} dx = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n};$$

dahero, facto $x = 1$, erit $Q = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, wie angenommen worden. Nun setze ich $n = 1 + \alpha$, eritque $Q = \int \frac{1 - x^{1+\alpha}}{1 - x} dx = \int \frac{1 - x . x^\alpha}{1 - x} dx$. At cum sit generaliter $x^y = 1 + \frac{y l x}{1} + \frac{y^2 (lx)^2}{1.2} + \frac{y^3 (lx)^3}{1.2.3} +$ etc. erit

$$Q = \int \frac{dx}{1-x}\left(1 - x - \frac{\alpha x l x}{1} - \frac{\alpha^2 x (lx)^2}{1.2} - \frac{\alpha^3 x (lx)^3}{1.2.3} - \text{etc}\right) =$$

$$x - \alpha \int \frac{x dx}{1-x} l x - \frac{\alpha^2}{2} \int \frac{x dx}{1-x} (lx)^2 - \frac{\alpha^3}{6} \int \frac{x dx}{1-x} (lx)^3 - \text{etc.},$$

posito post singulas integrationes $x = 1$. Nun integrire ich eine jede Formul à part.

Primo est $\int \frac{x dx}{1-x} l x = \int dx (x + x^2 + x^3 + \text{etc.}) l x$; at generaliter est $\int x^m dx l x = - \frac{1}{(m+1)^2}$ posito post integrationem $x = 1$. Ergo erit $\int \frac{x dx}{1-x} l x = - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} -$ etc. $= - A + 1 = 1 - \frac{\pi\pi}{6}$ posito $A = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{6}$.

Secundo est $\int \frac{x dx}{1-x} (lx)^2 = \int dx (x + x^2 + x^3 + \text{etc.}) (lx)^2$; at est generaliter $\int x^m dx (lx)^2 = \frac{1.2}{(m+1)^3}$ posito $x = 1$, unde fit $\int \frac{x dx}{1-x} (lx)^2 = 2\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}\right) = 2 (B - 1)$ posito $B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \text{etc.}$

Tertio est $\int \frac{x dx}{1-x} (lx)^3 = \int dx (x + x^2 + x^3 + \text{etc.}) (lx)^3$; at est generaliter $\int x^m dx (lx)^3 = - \frac{1.2.3}{(m+1)^4}$ posito $x = 1$, unde fit $\int \frac{x dx}{1-x} (l x)^3 = - 6 \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.}\right) = - 6 (C - 1)$ posito $C = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} +$ etc.

Simili modo si ponatur $D = 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} +$ etc. et $E = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} +$ etc. reperietur tandem $Q = 1 + \alpha(A - 1) - \alpha^2 (B - 1) + \alpha^3 (C - 1) -$ etc., hincque ob $A = \frac{\pi\pi}{6}$ erit

$$P = 1 - \frac{\pi\pi}{6} + \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}\right)$$

wie Ew. gefunden haben.

Für die summa seriei $\frac{1}{x + fx}$ habe ich eine formulam integralem schon längst gefunden; nun aber hat mich eben diese Untersuchung auf eine bequemere Expression geleitet, welche allem Ansehen nach Ew. bekannt seyn und Dieselben ebenfalls auf diese Materie geführt haben wird. Denn da, posito $x = f$, gefunden ist $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{f+1} = 1 + f(A - 1) - ff(B - 1) + f^3 (C - 1) -$ etc. erit quoque $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{1+f} = 1 + \frac{f}{2(2+f)} + \frac{f}{3(3+f)} + \frac{f}{4(4+f)} +$ etc. Sit $S = \int \frac{1}{xx + fx} = \frac{1}{1(1+f)} + \frac{1}{2(2+f)} + \frac{1}{3(3+f)} +$ etc. erit $S = \frac{1}{f}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{f}\right) = \frac{1}{1+f} + (A - 1) - f(B - 1) + ff(C - 1) - f^3 (D - 1) +$ etc.

Euler.

LETTRE LXI.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Continuation. Division infinie.

St. Petersburg d. 22 Juni st n. 1748.

Ew. waren in Dero vorigem Schreiben der Meinung, dass Alles auf dem bewussten ersten lemmate beruhete, und wenn dasselbe seine Richtigkeit hätte, an der Demonstration des theorematis nicht das Geringste auszusetzen wäre. Ich wollte dahero in meinem letzten Briefe die Wahrheit des lemmatis primi darthun, und sehe auch, dass ich darin nicht übel réussiret, nachdem Ew. zugeben, *dass wenn man demonstriren könnte, dass* $4mn - m - 1$ *nullo casu* $m = 4v - 1$ *ein Quadrat wäre, zugleich richtig erwiesen seyn würde, dass eben dieselbe Formul nullo prorsus casu ein Quadrat seyn könnte*; dieses ist aber der einzige Inhalt des lemmatis primi. Ohngeachtet aber beyde lemmata ausser Zweifel sind, so

erkenne ich doch nunmehro, dass diese Demonstration aus einer andern Ursache nicht bestehen kann, denn es heisset daselbst: *aequatio C non potest fieri vera, nisi M sit numerus hujus formae* $4v - 1$ (*per lemma primum*); dieses folget aber in der That aus dem lemmate primo nicht. Vielleicht findet sich künftig etwas Besseres

Die summam der Formul

$$P = \frac{\pi^2}{6n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)^2} - \frac{(2n-1)(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n})}{n^2(n-1)^2}$$

casu, quo $n = 1$, welche Ew. durch eine so schöne und generale Methode heraus gebracht, hatte ich ganz ohngefähr und nur in selbigem casu particulari allein angemerket, denn weil die series

$$A \cdots \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3}\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3.4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right)$$
$$+ \frac{1}{4.5}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}\right) + \text{etc.} = z =$$
$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$$

aus nachfolgenden, numero infinitis seriebus bestehet

$$B \cdots \frac{1}{1.2.1} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.9} + \frac{1}{4.5.16} + \text{etc.} = z + 1 - \frac{\pi\pi}{6}$$

$$C \cdots \frac{1}{2.3.1} + \frac{1}{3.4.4} + \frac{1}{4.5.9} + \frac{1}{5.6.16} + \text{etc.} = \frac{1}{2.1^2} + \frac{\pi\pi}{2.1.6}$$
$$- \frac{3}{4.1^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$D \cdots \frac{1}{3.4.1} + \frac{1}{4.5.4} + \frac{1}{5.6.9} + \frac{1}{6.7.16} + \text{etc.} = \frac{1}{3.2^2} + \frac{\pi\pi}{3.2.6}$$
$$- \frac{5}{9.2^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

etc.

und die summa generalis omnium serierum B, C, D etc. ist

$$\frac{\pi\pi}{6n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)^2} - \frac{(2n-1)}{n^2(n-1)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right),$$

so wird die summa seriei B (allwo $n = 1$) $= z + 1 - \frac{\pi\pi}{6}$.

Diejenige Division, welche Ew. in Dero Schreiben vom 9 April angeführet haben, dienet, so viel ich sehe, nur dazu, dass man in dem quoto einen numerum non circulantem erhalte; dergleichen numeri non circulantes aber können auf unzählige andere Arten ohne solche mühsame Division gefunden werden, zum Ex. der numerus

1 . 1 . . 1 . . . 1 . . . . 1 etc. in inf.

ist gewiss non circulans, es mögen die loca vacua, quae punctis designata sunt, mit allen Zahlen nach Belieben (wenn es nur nicht lauter 1 in infinitum sind) ausgefullt werden, als

10100100010000100000l etc.
121221222122221222 21 etc.
10123114112671135141 etc.
etc.

sind non circulantes.

Es können alle fractiones rationales per denominatorem 10000.... et numeratorem circulantem exprimiret werden, welche numeratores aber zweierley sind, 1) in quibus datur elementum initiale non circulans, 2) in quibus idem est elementum initiale, quod circulans, als z. Ex. $\frac{1}{2} + \frac{5\underline{0}}{10}$, allwo das elementum initiale non circulans ist 5, das unterstrichene elementum circulans ist 0

$\frac{1}{3} = \frac{\underline{3}}{10}$, allwo das elementum initiale und circulans idem ist, nehmlich 3.

$\frac{61}{162} = \frac{3\overline{765432198}}{10}$, allwo das elementum initiale $= 3$, das elementum circulans $= 765432198$. Es trifft sich auch

bisweilen, dass das elementum circulans aus so viel Ziffern bestehet, als in dem denominatore fractionis $\frac{1}{a+1}$ der numerus a unitates hat, ex. gr. si $a = 22$, erit

$$\frac{1}{23} = \frac{4347826086956521739130}{100}.$$

Wenn man setzet

$(y^{-1}-1)(3^2y^{-1}-1)(5^2y^{-1}-1)(7^2y^{-1}-1)\ldots((2n-1)^2y^{-1}-1)$. $= Y$ und $dY = Pdy$, so wird die formula $-\frac{Pdy}{Y} - n$ die summatrix tot terminorum seriei

$$A \ldots \frac{1}{y^{-1}-1} + \frac{1}{3^2y^{-1}-1} + \frac{1}{5^2y^{-1}-1} + \text{etc.}$$

quot n continet unitates; est autem terminus generalis seriei $A = \frac{1}{(2x-1)^2y^{-1}-1}$, posita x pro exponente terminorum; igitur quia, si ponatur $y = \frac{1}{4}$, series A transit in

$$B \ldots \frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} + \text{etc.}$$

quae in infinitum continuata aequalis est semicirculo cujus diameter $= 1$, erit seriei B summatrix $-\frac{Py}{Y} - n$, si differentiatione peracta ponatur $y = \frac{1}{4}$. Sit ex. gr. $n = 2$, fiet

$$-\frac{Py}{Y} - 2 = \frac{10y^{-1}-2}{9y^{-2}-10y^{-1}+1} = \frac{10y-2y^2}{9-10y+y^2} = \frac{38}{105}.$$

[*Note marginale d'Euler:* $\frac{1}{1-p} + \frac{1}{3^2-p} + \frac{1}{5^2-p} + \frac{1}{7^2-p} + \text{etc.}$ $= \frac{\pi\sqrt{p}}{4p\cot\frac{\pi\sqrt{p}}{2}}$; $\frac{p}{1-p} + \frac{p}{3^2-p} + \frac{p}{5^2-p} + \text{etc.} = \frac{\pi\sqrt{p}}{4}\operatorname{tang}\frac{\pi\sqrt{p}}{2}$;

$\frac{1}{y^{-1}-1} + \frac{1}{3^2y^{-1}-1} + \frac{1}{5^2y^{-1}-1} + \text{etc.} = \frac{\pi\sqrt{y}}{4}\operatorname{tang}\frac{\pi\sqrt{y}}{2}$].

Es gibt unzählige quadrata, welche zu dieser Formul $C \ldots 4nn + 2(m-1)n + m - 1$, denontantibus m et n numeris integris affirmativis, nicht gebracht werden können, als 1^2, 2^2, 3^2, 5^2, 7^2, etc. Wenn man aber eine formulam infinitorum quadratorum ad formulam C non revocabilium geben könnte, so wäre auch das problema: invenire numerum primum dato quocunque majorem solviret.

Dato termino primo seriei $\frac{1}{a}$ et lege progressionis hac, ut dato quocunque termino $\frac{1}{A}$ fiat terminus sequens $= \frac{1}{A(A-1)+1}$, erit summa totius seriei $= \frac{1}{a-1}$.

Goldbach.

LETTRE LXII.

EULER À GOLDBACH.

SOMMAIRE. Continuation. Réponse à la lettre précédente.

Berlin d. 9 Juli 1848.

Ew. erstes lemma, worauf ich die ganze Demonstration gegründet zu seyn glaubte, hatte ich nicht sowohl nach den Worten, womit dasselbe ausgedrückt war, betrachtet, als nach der Application desselben in den nachfolgenden Propositionen und habe deswegen die ganze Demonstration aus eben demjenigen Grunde für unrichtig gehalten, welchen Ew. anjetzo selbst anzeigen. Denn ich gab zu, dass wenn $4mn - m - 1$ nullo casu $m = 4v - 1$ ein quadratum wäre, eben dieselbe Formul nullo prorsus casu ein quadratum seyn könnte. Ich zog aber diesen Satz, worin die Application bestund, in Zweifel: quod omnes casus, quibus unquam formula $4mn - m - 1$ quadratum fieri queat, ideo in hac

forma $m = 4\nu - 1$ contineantur. Die Unrichtigkeit dieser Application kann durch folgendes Exempel am deutlichsten eingesehen werden: Si demonstrari posset nullum numerum imparem esse quadratum, simul demonstratum foret, nullum prorsus numerum esse quadratum. Diese propositio hypothetica hat ihre völlige Richtigkeit; daraus aber folget diese keineswegs: Ergo si ulli dantur numeri quadrati, ii omnes erunt numeri impares.

Die Art, nach welcher Ew. den schönen Satz, betreffend den valorem expressionis

$$\frac{\pi^2}{6n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)^2} - \frac{(2n-1)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}\right)}{nn(n-1)^2}$$

casu $n = 1$, herausgebracht, ist sehr merkwürdig. Man kann auf eine ähnliche Art viel andere dergleichen schöne Sätze herausbringen. Als, da

$$\frac{1}{m\,(m-a)^2} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(m-a)^2} - \frac{1}{aa}\left(\frac{1}{m-a} - \frac{1}{m}\right),$$

so wird seyn

$$B\cdots\frac{1}{2.1^2} + \frac{1}{3.2^2} + \frac{1}{4.3^2} + \frac{1}{5.4^2} + \text{etc.} = \frac{\pi^2}{1.6} + \frac{1}{1^2}(1)$$

$$C\cdots\frac{1}{3.1^2} + \frac{1}{4.2^2} + \frac{1}{5.3^2} + \frac{1}{6.4^2} + \text{etc.} = \frac{\pi^2}{2.6} - \frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$D\cdots\frac{1}{4.1^2} + \frac{1}{5.2^2} + \frac{1}{6.3^2} + \frac{1}{7.4^2} + \text{etc.} = \frac{\pi^2}{3.6} - \frac{1}{3^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

etc.

Erit ergo generaliter

$$\frac{1}{n.1^2} + \frac{1}{(n+1).2^2} + \frac{1}{(n+2).3^2} + \frac{1}{(n+3).4^2} + \text{etc.} =$$

$$\frac{\pi\pi}{(n-1).6} - \frac{1}{(n-1)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right) =$$

$$\frac{\pi\pi}{(n-1)6} - \frac{1}{(n-1)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n(n-1)^2}.$$

Dahero muss dieser expressionis valor casu quo $n = 1$ die summam hujus seriei geben $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$

Ob diejenige Division, wodurch ich einen numerum in infinitum excurrentem non circulantem erhalten, in der That einigen Nutzen haben könne, will ich nicht bestimmen; ich dachte aber, wenn man auf eine solche Art diese Zahlen 3,14159265 etc. herausbringen könnte, die quadratura circuli für völlig gefunden gehalten werden könnte. Ew. Art numeros circulantes zu formiren war mir noch sehr wohl bekannt; es ist aber meines Erachtens dienlich, viel dergleichen Arten zu bemerken, um etwan mit der Zeit eine solche zu entdecken, wodurch die quadratura circuli ausgedrückt werden könnte. Es findet sich aber in Ew. Art noch eine gewisse Ordnung, dergleichen in den Zahlen 3,14159 etc. allein Ansehen nach nicht stattfindet. Dass alle numeri rationales in fractiones decimales circulantes (das elementum initiale ausgenommen) resolvirt werden, ist eine proprietas essentialis numerorum rationalium, und es ist leicht zu sehen, dass das elementum circularis fractionis decimalis ex hac fractione $\frac{a}{b+1}$ ortae niemalen mehr als b Figuren enthalte; denn wenn man wirklich dividirt, so können nicht mehr als b-erley residua überbleiben, so oft man aber gleiche residua bekommt, so oft circulirt der quotus.

Die expressio summatrix, welche Ew. für diese seriem

$$\frac{1}{y^{-1}-1}+\frac{1}{3^2y^{-1}-1}+\frac{1}{5^2y^{-1}-1}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2y^{-1}-1}$$

geben, kann in vielen Fällen sehr nützlich seyn. Es können aber immer aus factoribus per differentiationem series summabiles gefunden werden. Die von Ew. gefundene Summ bringe ich solchergestalt heraus. Cum sit

$$(y^{-1}-1)(3^2y^{-1}-1)(5^2y^{-1}-1)\ldots((2n-1)^2y^{-1}-1)=Y,$$

erit

$$lY = l(y^{-1}-1)+l(3^2y^{-1}-1)+l(5^2y^{-1}-1)+\ldots+l((2n-1)^2y^{-1}-1)$$
$$= l(1-y)+l(3^2-y)+l(5^2-y)+\ldots+l((2n-1)^2-y)-nly$$

sumantur differentialia, eritque

$$\frac{dY}{Y}=\frac{Pdy}{Y}=-\frac{dy}{1-y}-\frac{dy}{3^2-y}-\frac{dy}{5^2-y}-\ldots-\frac{dy}{(2n-1)^2-y}-\frac{ndy}{y}.$$

Multiplicetur per $-\frac{y}{dy}$ erit $-\frac{Py}{Y}-n=$

$$\frac{1}{y^{-1}-1}+\frac{1}{3^2y^{-1}-1}+\frac{1}{5^2y^{-1}-1}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2y^{-1}-1}\cdots=A$$

Um aber auf diese Art einen numerum terminorum finitum zu summiren, so deucht mir, dass die additio actualis nicht schwerer seyn würde, als die Execution dieser Methode. Wollte man aber diese seriem in infinitum excurrentem summiren, so würde man auf diese Art um so viel weniger gewinnen, da man die summam hujus seriei A alsdann absolute anzeigen kann. Denn man suche einen angulum α, qui sit ad angulum rectum ut $\sqrt{y}$ ad 1; sit porro radius ad tangentem hujus anguli α ut 1 ad θ, dico fore

$$\frac{1}{y^{-1}-1}+\frac{1}{3^2y^{-1}-1}+\frac{1}{5^2y^{-1}-1}+\text{etc. in infinitum}=\frac{\theta\pi\sqrt{y}}{4},$$

tenente π valorem consuetum 3,14159265 etc. Ich kann auch die summam hujus seriei angeben

$$\frac{1}{y^{-1}+1}+\frac{1}{3^2y^{-1}+1}+\frac{1}{5^2y^{-1}+1}+\text{etc. inf.}=P$$

Sit enim

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

ac ponatur $e^{\pi\sqrt{y}}=\Theta$, seu sit $l.\Theta=\pi\sqrt{y}$, eritque summa quaesita $P=\frac{\Theta-1}{\Theta+1}\cdot\frac{\pi\sqrt{y}}{4}$. Est vero quoque

$$\Theta=1+\frac{\pi\sqrt{y}}{1}+\frac{\pi^2y}{1.2}+\frac{\pi^2y\sqrt{y}}{1.2.3}+\frac{\pi^4y^2}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

Vel ponatur $\frac{1}{4}\pi\pi y=n$, erit sequenti modo

$$2P = \cfrac{n}{1 + \cfrac{n}{3 + \cfrac{n}{5 + \cfrac{n}{7 + \cfrac{n}{9 + \cfrac{n}{11 + \text{etc.}}}}}}}$$

Diese Expression ist eine fractio continua, von welcher Materie etliche Dissertationen im akademischen Archiv liegen, um deren Copie ich letztens angehalten, weilen ich das Meiste vergessen, und bei mir nirgend angemerkt finde.

Was für Quadratzahlen in dieser Expression

$$4n^2 + 2(2m - 1)n + m - 1$$

nicht enthalten sind, ist schwer zu sagen, indem diejenigen quadrata, welche darin enthalten sind, nicht anders, als durch unendlich viel Formuln ausgedruckt werden können. Für das erste habe ich gleich gesehen, dass alle biquadrata in dieser Formul enthalten sind. Hernach kann ich unendlich viel series numerorum geben, deren quadrata in dieser Expression $4n^2 + 2(2m - 1)n + m - 1$ enthalten sind: nehmlich alle Quadratzahlen, welche in nachfolgenden formulis enthalten sind, werden zugleich in obiger Expression begriffen: $(5p \pm 1)^2$; $(13p \pm 4)^2$; $(17p \pm 2)^2$; $(29p \pm 6)^2$; $(37p \pm 3)^2$; $(41p \pm 16)^2$; $(53p \pm 15)^2$; $(61p \pm 25)^2$; $(73p \pm 23)^2$; $(89p \pm 17)^2$; $(97p \pm 11)^2$; $(101p \pm 5)^2$; $(109p \pm 38)^2$; $(113p \pm 49)^2$; $(137p \pm 50)^2$; $(149p \pm 22)^2$; $(157p \pm 14)^2$; $(173p \pm 40)^2$; $(181p \pm 81)^2$; $(193p \pm 56)^2$; $(197p \pm 7)^2$; $(229p \pm 61)^2$ etc.

Diejenigen quadrata aber, welche in keiner von diesen Formuln enthalten sind, sind allein diejenigen, welche Ew.

Expression nicht in sich begreift. Es käme also darauf an, wie man auf leichte Art alle diejenigen Zahlen finden solle, welche in keiner der obigen Formuln begriffen sind, und da würde man freylich das problema, de inveniendo numero primo, dato majore, leicht solviren können. Denn wenn man setzt $4n^2 + 2(2m - 1)n + m - 1 = aa$, so wird $4m = -4n + 3 + \frac{4aa+1}{4n+1}$. Wenn also $4aa + 1$ ein numerus primus ist, so kann das quadratum aa nicht in jener Expression enthalten seyn, und hinwiederum alle quadrata aa, welche nicht in $4n^2 + 2(2m - 1)n + m - 1$ enthalten, sind von dieser Beschaffenheit, dass $4aa + 1$ ein numerus primus ist. Da nun $4b^4 + 1$ nimmer ein numerus primus ist, sondern allzeit zwey oder mehr divisores formae $4n + 1$ hat, so sind auch alle numeri biquadrati in Ew. Expression enthalten. Ich erinnere mich, dass ich einmal eine Tabelle gemacht von allen Zahlen bis auf 1000, deren quadrata unitate aucta numeri primi sind*), wovon der Hr. Prof. Krafft Ew. eine Abschrift gemacht. Dieselbe Tabelle habe ich fast aus einem gleichen Grund verfertiget, als Ew. bey Dero Formul ohne Zweifel vor Augen gehabt haben.

Wenn $4n + 1$ ein numerus primus ist, so ist derselbe immer eine summa duorum quadratorum, idque unico modo. Es gibt aber allzeit unendlich viel quadrata, quae unitate aucta sint per $4n + 1$ divisibilia. Alle diese quadrata können nun leicht in einer formula generali exprimirt werden folgendergestalt: Sit $4n + 1 = r^2 + s^2$, erunt utique r et s numeri inter se primi. Formetur fractio $\frac{r}{s}$ et quaeratur in minoribus numeris fractio proxime accedens $\frac{p}{q}$, ita ut

*) Voir à la fin de cette lettre.

$ps - qr$ sit ± 1 (der Bruch $\frac{p}{q}$ kann aber durch eine von mir gegebene Methode allzeit leicht gefunden werden). Tum ponatur $pr + qs = k$, atque dico omnes numeros, quorum quadrata unitate aucta sint per $4n+1$ divisibilia, contineri in hac forma $(4n+1)m \pm k$. Sic

1. Omnes numeri, quorum quadrata unitate aucta sint divisibilia per 5 continentur in formula $5m \pm 2$.
2. Si sit $aa+1$ divisibile per 13 erit $a = 13m \pm 5$.
3. Si sit $aa+1$ divisibile per 17 erit $a = 17m \pm 4$.
4. Si sit $aa+1$ divisibile per 29 erit $a = 29m \pm 12$.

etc.

Exemplum. Quaerantur omnes numeri, quorum quadrata unitate aucta sint divisibilia per numerum primum 1381. Cum sit $1381 = 15^2 + 34^2$, quaeratur fractio $\frac{p}{q}$ tam prope accedens ad $\frac{15}{34}$, ut differentiae numerator fiat $= 1$. Ad hoc cum duobus numeris 15 et 34 instituatur operatio, qua maximus communis divisor quaeri solet, hoc modo

```
15 | 34 | 2
      4 | 15 | 3
           3 |  4 | 1
                1 | 3 | 3
```

Ex quotis 2, 3, 1, 3 formetur sequens fractionum series

$$\overset{2}{\frac{0}{1}}, \quad \overset{3}{\frac{1}{2}}, \quad \overset{1}{\frac{3}{7}}, \quad \overset{3}{\frac{4}{9}}, \quad \frac{15}{34}$$

incipiendo ab $\frac{0}{1}$; hac lege ut quisque numerator per indi-

cem supra scriptum multiplicatus cum numeratore praecedente, praebeat numeratorem sequentem. similique modo denominator quisque per indicem suprascriptum multiplicatus cum praecedente denominatore, praebeat denominatorem sequentem. Hoc modo ultima fractio $\frac{15}{34}$ semper erit ipsa proposita, penultima vero erit ea proxime accedens $\frac{p}{q}$, quam quaero. Jam ergo erit $k = 4.15 + 9.34 = 366$, unde omnes numeri, quorum quadrata unitate aucta sunt per 1381 divisibilia, continentur in hac forma $1381\, m \pm 366$.

Ew. summatio seriei $\frac{1}{a} + \cdots\cdots \frac{1}{A} + \frac{1}{A(A-1)+1}$ ist so merkwürdig, dass ich anfänglich darüber erstaunet bin, indem diese series so stark convergirt und die grössten exponentes ipsius a in den denominatoribus nach der progressione geometrica dupla aufsteigen, dergleichen series summabiles sehr rar sind. Ich habe aber nach einigem Nachsinnen bald diese Demonstration gefunden. Sit

$$\frac{1}{a-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b-1} \quad \text{erit } b = a(a-1)+1$$

porro $$\frac{1}{b-1} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c-1} \quad \text{erit } c = b(b-1)+1$$

$$\frac{1}{c-1} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d-1} \quad \text{erit } d = c(c-1)+1$$

etc.

Ergo fiet $\frac{1}{a-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} +$ etc. welches Ew. series ist.

Euler.

Addition à la marge.

Einige numeri primi, so grösser sind als 1000000, welche ich durch obige Methode leicht gefunden, sind: 1008017; 1020101; 1073297; 1110917; 1123601; 1136357; 1144901;

1196837; 1201217; hi enim numeri sunt formae $aa + 1$, neque ullum habent divisorem primum formae $4n + 1$.

Feuille volante appartenant à cette lettre.

Catalogus numerorum a, ex quibus fit $4aa + 1$ *numerus primus*:

1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 13, 18, 20, 27, 28, 33, 37, 42, 45, 47, 55, 58, 60, 62, 63, 65, 67, 73, 75, 78, 80, 85, 88, 90, 92, 102, 103, 105, 112, 115, 118, 120, 125, 128, 130, 132, 135, 140, 142, 150, 153, 157, 163, 170, 175, 192, 193, 198, 200, 203, 210, 215, 218, 220, 222, 232, 233, 235, 237, 245, 248, 268, 272, 278, 285, 288, 292, 297, 317, 318, 322, 323, 327, 337, 340, 343, 345, 348, 350, 352, 357, 358, 370, 375, 380, 382, 390, 392, 408, 413, 422, 430, 432, 445, 453, 455, 460, 465, 468, 473, 475, 480, 483, 493, 502, 505, 518, 527, 530, 533, 535, 547, 548.

Sollte in diesen Zahlen eine series regularis enthalten seyn, so wäre das problema de inveniendo numero primo, datum numerum excedente, leicht solvirt. Es kommt mir aber diese series eben so confus vor, als die series numerorum primorum ipsa.

LETTRE LXIII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Nouvelle démonstration du théorème $4mn - m - 1 = a^2$. Détermination approximative de la valeur de π. Théorèmes de nombres.

St. Petersburg d. 30 Juli n. st. 1743.

Nachfolgende Demonstration habe ich zu dem Ende in unterschiedene kleine propositiones abgetheilet, damit Ew. diejenige, bei welcher sie einigen Anstand finden möchten, desto bequemer anzeigen könnten:

1. In aequatione $4mn - m - 1 = aa$ pono aa quadratum integrum minimum omnium eorum quae aequationi satisfacere possunt (si quae possunt).

2. Utrique aequationis parti addo $-4ma + 4mm$, fiet $4m(n - a + m) - m - 1 = (a - 2m)^2$.

3. In hac aequatione non potest fieri $a = m$ (posset enim altera pars aequationis dividi per m, altera non posset).

4. Neque potest fieri $a > m$, esset enim $n - a + m < n$, adeoque $(a - 2m)^2 < a^2$, quod est contra hypothesin, cum aa sit omnium possibilium minimum.

5. Restat ergo ut sit $a < m$.

6. Similiter si ad aequationem $4mn - m - 1 = aa$ ex utraque parte addatur $- 4an + 4nn$, fiet $4n(m - a + n) - m - 1 = (a - 2n)^2$.

7. In hac aequatione non potest fieri $a = n$, propterea quod foret

$4mn - m - 1 = nn$ seu $n = 2m + \sqrt{(4mm - m - 1)}$,

qui numerus nequit esse rationalis.

8. Sed non potest fieri $a > n$, quia $(m - a + n)$ fieret $< m$ et $(a - 2n)^2 < aa$, *quod est contra hypothesin.*

9. Restat igitur ut a sit $< n$, et quia jam supra prop. 5 ostensum est $a < m$, sequitur $aa < mn$.

10. Erit igitur $4mn - m - 1 < mn$, quod est absurdum.

Ergo inter omnia quadrata (si quae sunt) hujus formae $4mn - m - 1$ non datur minimum in integris, ergo datur nullum.

Diese Demonstration kann etwas kürzer gefasset und nur allein gezeiget werden, dass a non $> m$, nec $> n$, woraus schon folget, dass $4mn - m - 1$ non $> mn$, quod est absurdum.

Was die von Ew. angeführte Aequation

$$\frac{1}{m(m-a)^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(m-a)^2} - \frac{1}{aa}\left(\frac{1}{m-a} - \frac{1}{m}\right)$$

für eine influence in die series B, C, D, etc. habe, sehe ich noch nicht.

Mir ist es wahrscheinlich, dass eine solche series

$$\frac{a}{1} + \frac{b}{10} + \frac{c}{100} + \frac{d}{1000} + \text{etc.} = \pi$$

gefunden werden könne, darin die numeratores a, b, c, etc. (entweder integri oder fracti) allezeit grösser werden, obgleich die Methode, selbige numeratores zu determiniren, vielleicht niemals bekannt werden wird; denn durch formulas algebraicas diese numeratores zu bestimmen, ist in sofern eine vergebliche Mühe, als man persuadiret seyn kann, dass die ratio diametri ad peripheriam nicht in numeris rationalibus bestehet: doch gibt es einige merkwurdige approximationes. Es ist z. Ex. eine sehr leichte progressio numerorum secundum hanc formulam $\frac{2xx-4x+12}{10^x}$, und wenn ich 7 solcher terminorum zu 2 addire, so wird die summa 3,1415922.

Ew. danke ich dienstl. fur die Communication der Zahlen a, welche $4aa+1$ numerum primum geben. Den Aufsatz von dergleichen Zahlen bis 1000 habe ich zwar schon; ich weiss aber denselben jetzo unter meinen andern Schriften nicht hervor zu finden. Dass aus solchen Zahlen eine ordentliche series herausgebracht werden sollte, zweifle ich sehr. Es haben aber nicht allein alle quadrati aa, welche in der formula $4nn+2(2m-1)n+m-1$ nicht vorkommen, diese Eigenschaft, dass sie in $4aa+1$ einen numerum primum geben, sondern alle trigonales in illa formula non extantes geben gleichfalls $4\triangle+1$ numerum primum und die Formul $4nn+2(2m-1)n+m-1$ kommt dermaassen mit dieser $4MN+M+N$ überein, dass kein casus in der einen ist, welcher nicht in der andern assignabilis wäre (wie denn auch alle casus $4nn+2(2m-3)n-m-1$) in dieser Formul $4MN-M-N$, et contra, enthalten sind). Wenn man also nach der Formul $4MN+M+N$ folgende Tabelle formiren wollte:

6.	11.	16.	21.	26.	31.	36.	41...
	11.	20.	29.	38.	47.	56.	65...
		16.	29.	42.	55.	68.	81...
			21.	38.	55.	72.	89...
				26.	47.	68.	89...
					31.	56.	81...
						36.	65...
							41...

so könnte man festsetzen, dass alle in dieser Tabelle nicht enthaltene sowohl trigonales als quadrati per 4 multiplicati, addita unitate, numeri primi sind.

Ich erinnere mich in den Göttinger gelehrten Zeitungen gelesen zu haben, dass wenn $4m + 1$ ein numerus primus ist, selbiger allezeit eine summa duorum quadratorum sey, welche Observation ohne Zweifel von Ew. kommt, und mir schon vorher bekannt war. Gleichwie aber auf diese Weise in den numeris primis hujus formae $4m + 1$ allezeit wird $m = aa + bb \pm b$, hoc est *duplo trigonali plus quadrato*. so halte ich davor, dass in den numeris primis $4m - 1$ allezeit seyn wird $m = 2(a - 1)^2 + \frac{bb - b}{2}$, hoc est *duplo quadrato + trigonali*. Sit ex. gr. $m = 1$, erit $a = b = 1$; $m = 2$, erit $a = 2$, $b = 1$; $m = 3$, erit $a = b = 2$, etc.

Als ich vor einigen Wochen in einem Buche schon A. 1718 von mir notiret fand $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{1807} +$ etc. $= 1$, nebst der lege denominatorum $2 + 1 = 3$, $2.3 + 1 = 7$, $2.3.7 + 1 = 43$, $2.3.7.43 + 1 = 1807$ etc., schrieb ich gleich dabei: si terminus primus fuerit $\frac{1}{a}$, lex progressionis ut dato termino quocunque $\frac{1}{A}$, fiat terminus sequens

$\frac{1}{A(A-1)+1}$, erit summa seriei $\frac{1}{a-1}$; ich erinnere mich aber nicht mehr, worin meine Demonstration bestanden, und danke Ew. desfalls um so viel mehr, dass Sie mir die Ihrige communiciren wollen, welche ganz evident ist. Sonst halte auch bey dieser serie die leichte Art, dato termino quocunque die summam ipsius seriei usque ad hunc terminum zu finden, fur merkwurdig. Sit terminus quicunque datus $\frac{1}{A}$, erit summa ejusdem et omnium sequentium terminorum $= \frac{1}{A-1}$, summa vero ipsius seriei usque ad hunc terminum $\frac{1}{A}$ exclusive erit $\frac{1}{a-1} - \frac{1}{A-1}$.

Dass H. Rasumovsky und H. Teplov bey Ew. logiren und sich noch eine Zeit lang in Berlin aufhalten werden, ist mir sehr lieb; Ew. werden hiedurch nicht allein Gelegenheit haben die Russische Sprache ferner zu excoliren, sondern auch die hiesigen nova academica von denselben recht frisch erhalten können.

Goldbach.

LETTRE LXIV.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Réponse aux articles de la lettre précédente.

Berlin d. 24 August 1743.

Wenn $4mn - m - 1$ in einem Fall ein quadratum wäre, so würde man gleich unendlich viel andere casus daraus finden können. Wenn nun Ew. annehmen, dass aa das kleinste quadratum sey, welches in formula $4mn - m - 1$ enthalten ist, so muss nothwendig a kleiner seyn als m, und daher haben die 5 ersten propositiones ihre völlige Richtigkeit. Wenn aber Ew. ferner zu dieser Aequation fortgehen $4n(m - a + n) - m - 1 = (a - 2n)^2$, weilen dieselben nicht in der vorgelegten Form $4mn - m - 1$ enthalten ist, so folgt auch nicht, dass $(a - 2n)^2$ kleiner seyn müsse als a^2, denn $4mn - m - 1$ könnte das kleinste mögliche quadratum geben, ungeacht $4n(m - a + n) - m - 1$ einem

noch kleinern quadrato gleich wäre, und also kommt mir die 8[te] Proposition verdächtig vor, weilen non obstante hypothesi aa grösser seyn kann als $(a-2n)^2$.

Bey diesem tentamine fällt mir ein, ob man dieses theorema nicht etwan auf eine gleiche Art demonstriren könnte, wie man zu erweisen pflegt, dass a^4+b^4 oder a^4-b^4 kein quadratum seyn könne. Man nimmt nehmlich an dari casum, quo a^4+b^4 sit numerus quadratus, puta $=mm$, und leitet daher einen andern $c^4+d^4=nn$, dergestalt dass $n<m$. Auf diese Weise zeigt man, dass wenn ein quadratum quantumvis magnum mm eine summa duorum biquadratorum wäre, man daraus sogleich ein kleineres nn, und daher ferner ein kleineres, und so fort finden könnte. Man nimmt aber als ein postulatum an, dass in numeris parvis kein casus satisfaciens begriffen sey. Weil nun ebenfalls gewiss ist, dass in numeris parvis $4mn-m-1$ kein Quadrat seyn könne, so wurde die Demonstration auf folgende Art vollkommen richtig seyn:

I. Ponamus dari quadratum aa qui in forma $4mn-m-1$ contineatur.

II. Inde inveniri posset alius quadratus bb minor quam aa, qui pariter in forma $4mn-m-1$ esset contentus.

III. Continuo ergo ad numeros quadratos minores perveniretur, quod foret absurdum.

Die ganze Demonstration würde also auf den II[ten] Satz ankommen: an concesso quadrato aa, aliud minus bb ex eo inveniri possit, quod in forma $4mn-m-1$ contineatur.

Ew. bin für die Communication Dero Idee über die seriem $\frac{a}{1}+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}+\frac{d}{1000}+$ etc. sehr verbunden, denn auf solche Art werden öfters grosse und beschwerliche Zahlen

leicht ausgedrückt werden können. Um diese Zahl 1,141592 durch sieben terminos zu bekommen, brauchen Ew. diesen terminum generalem $\frac{2xx-4x+12}{10^x}$. Ich glaube aber Dieselben haben sich verschrieben, indem 7 termini hujus seriei nicht mehr geben als 1,1412882. Die verlangte Zahl kommt aber heraus wenn man diesen terminum generalem $\frac{10-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x^3}{10^x}$ annimmt.

Ich habe neulich eine expressionem indefinitam gefunden, wodurch der valor ipsius π ausgedrückt wird. In circulo, cujus radius $=1$, capiatur arcus quicunque u, cujus cosinus $=a$ et sinus $=\alpha$; sit autem sinus arcus $2u=\beta$, $\sin.3u=\gamma$, $\sin.4u=\delta$, $\sin.5u=\varepsilon$ etc. His positis dico fore $\frac{\pi}{2}=u+a\alpha+\frac{1}{2}a^2\beta+\frac{1}{3}a^3\gamma+\frac{1}{4}a^4\delta+$ etc. Setzt man $u=\frac{\pi}{4}$, ob $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta=1$, $\gamma=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\delta=0$, $\varepsilon=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ etc. findet man folgende seriem

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{2.2^2}-\frac{1}{5.2^3}-\frac{1}{6.2^3}-\frac{1}{7.2^4}+\frac{1}{9.2^5}+\frac{1}{10.2^5}+\frac{1}{11.2^6}-\text{etc.}$$

welche ziemlich stark convergirt.

Diese Aequation $\frac{1}{m(m-a)^2}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(m-a)^2}-\frac{1}{aa}\left(\frac{1}{m-a}-\frac{1}{m}\right)$ hatte ich, wo ich nicht irre, zu diesem Ende angeführt, um die summam hujus seriei

$$\frac{1}{(a+1)1^2}+\frac{1}{(a+2)2^2}+\frac{1}{(a+3)3^2}+\frac{1}{(a+4)4^2}+\text{etc.}$$

desto leichter zu finden, denn im ersten termino ist $m=a+1$, im zweiten $m=a+2$, im dritten ist $m=a+3$ und so fort, dahero diese series sogleich in diese resolvirt wird

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^4}+\text{etc.}\right)=\frac{\pi^2}{6a}$$
$$-\frac{1}{aa}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{a+2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{a+3}+\text{etc.}\right)$$
$$=-\frac{1}{aa}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{a}\right),$$

welche summas Ew. in Dero letztem Schreiben, allem Ansehen nach, auf eine andere Art gefunden haben.

Dass alle numeri quadrati aa, welche in dieser Formul $4nn + 2(2m-1)n + m - 1$ oder in dieser $4MN + M + N$ (welche mit jener übereinkommt ponendo $N = n$ et $M = n + m - 1$) nicht enthalten sind, einen numerum primum für $4aa + 1$ geben, ist klar. Denn wenn

$$aa = 4n^2(2m-1)n + m - 1 = 4MN + M + N,$$

so wird

$$4aa + 1 = (4n + 4m - 3)(4n + 1) = (4M + 1)(4N + 1)$$

und hat folglich Factoren. Wenn also $4aa + 1$ ein numerus primus ist, so kann aa in obgedachten formulis nicht enthalten seyn. Ich zweifle aber sehr, ob durch solche formulas exclusivas jemals etwas herausgebracht werden wird, indem darin die ganze Kenntniss, welche wir von den numeris primis haben, gegründet ist; denn auf gleiche Art kann man sagen, dass alle numeri, welche nicht in dieser Formel $mn + m + n + 1$ enthalten sind, numeri primi seyen.

Ich zweifle auch sehr, ob die valores von m, wenn $4m - 1$ ein numerus primus ist, eine solche gewisse Eigenschaft haben, dergleichen statt findet, wenn $4m + 1$ ein numerus primus ist. Denn dass m nicht immer sey ein duplum quadratum + numero trigonali, wenn $4m - 1$ ein numerus primus ist, erhellet aus dem casu $4m - 1 = 79$; dann wird $m = 20$, welche Zahl die vermuthete Eigenschaft nicht hat.

Euler.

LETTRE LXV.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Nouvel amendement à la démonstration précédente. Séries représentant la valeur de π, Divers sujets.

St. Petersburg d. 28 Sept. 1743.

Aus Ew. Erinnerung gegen die vorige Demonstration, habe ich die prop. 6 ipsius demonstrationis allerdings unrichtig befunden; dahero ich dieselbe nebst den darauf folgenden in meinem letzten Schreiben auszustreichen und an deren Stelle folgende zu substituiren bitte:

6. Ad hanc aequationem $(4n-1)m-1=aa$ ex utraque parte addatur $-2a(4n-1)+(4n-1)^2$, fiet
$(4n-1)(m-2a+4n-1)-1=(a-(4n-1))^2$.

7. Quoniam vero aa est quadratum minimum quaesito satisfaciens ex hypothesi, erit $aa<(a-4n+1)^2$, vel $aa=$ eidem, sed aequale esse non potest ob $4n=1$, erit ergo $(-2a+(4n-1))(4n-1)>0$, ergo $(4n-1)>2a$; est



autem ex hypothesi $4n - 1 = \frac{aa+1}{m}$, ergo $\frac{aa+1}{m} > 2a$, seu $aa > 2am - 1$, seu $a > 2m - \frac{1}{a}$.

8. Sed per prop. 5 patet esse $a < m$, ergo $m > 2m - \frac{1}{a}$, quod est absurdum si m et a sint integri, quod absurdum sequeretur ex $4mn - m - 1 = aa$.

Vor einigen Tagen fielen mir unterschiedene propositiones ein, die bey dem ersten Anblick schwer zu demonstriren scheinen möchten, ex. gr., wenn ich setze

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.} = A$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \text{etc.} = B$$

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \text{etc.} = C \text{ et sic porro,}$$

$$\text{erit } \frac{\pi}{2} = A + \frac{B}{2} + \frac{C}{4} + \frac{D}{8} + \text{etc.}$$

Vel si ponatur

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} = \beta$$

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.} = \gamma$$

$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.} = \delta \text{ et sic porro}$$

$$\text{erit } \frac{\pi}{2} = \beta + \frac{\gamma}{4} + \frac{\delta}{4^2} + \frac{\varepsilon}{4^3} + \text{etc.}$$

Wenn ich eine seriem mache, in deren terminis der numerator perpetuus ist 1, die denominatores aber aus allen numeris possibilibus omnium potestatum bestehen, folgendergestalt:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \pm \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \pm \frac{1}{25} \pm \frac{1}{27} + \frac{1}{32} + \text{etc.}$$

so wird die summa seriei in casu signi superioris seyn 1;

in casu signi inferioris autem (quod omnibus denominatoribus imparibus praefigitur) erit summa seriei $2l2 - 1$.

Was Ew. bey der formula der 7 terminorum, welche 1,141592 machen, erinnert haben, ist ganz richtig; die andere Formul war aus Versehen dahin geschrieben.

Ob es zwar sehr leicht ist zu demonstriren, dass eine formula algebraica hujusmodi $a + bx + cxx + dx^3 +$ etc. lauter numeros primos geben kann, posita x pro exponente terminorum, die coëfficientes a, b, c, etc. mögen numeri integri quicunque seyn, so gibt es doch formulas, welche vor vielen andern eine Menge numerorum primorum in sich halten; dergleichen ist die series $xx + 19x - 19$, so in den ersten 47 terminis nur vier numeros non primos hat.

Gleichwie in casu $4m + 1 =$ numero primo, m est $=$ duobus triangularibus $+ \square$, so könnte dennoch wohl seyn in casu $4m - 1 =$ numero primo, dass $m =$ duobus quadratis $+ \triangle$ wäre, uti $20 = 1 + 4 + 15$, wiewohl ich es noch nicht probiret und fernerer Untersuchung anheimstelle.

Diese beyden propositiones: dass $8n + 3$ allezeit in drey quadrata, und n in tres trigonales resolvirt werden kann, sind aequivalentes und concessa una, sequitur altera.

Es scheinet mir sehr probable, dass wenn in der obgedachten Formul $xx + 19x - 19$ vor x gesetzt wird 2^m, alsdann posito m numero quocunque integro affirmativo, allezeit ein numerus primus herauskommt; wenn aber dieses auch wäre, würde es doch schwer zu demonstriren seyn; ingleichen, dass dieselbe Formul $x^2 + 19x - 19$ keinen divisorem hujusmodi $10n + 1$ hat.

Goldbach.

LETTRE LXVI.

Euler à Goldbach.

Sommaire. La démonstration du théorème $4mn - m - 1 = aa$ approuvée. Démonstration de celui-ci $4mn - m - n = aa$. Autres théorèmes analogues. Séries pour $\frac{\pi}{2}$ et autres. Théorèmes de nombres.

Berlin d. 15 October 1743

Nunmehr hat Ew. Demonstration, dass $(4n-1)m - 1 = aa$ ihre völlige Richtigkeit; denn da Dieselben vorher erwiesen, dass posito aa omnium quadratorum, si quae darentur, minimo, seyn müsse $m > a$, anjetzo aber pro eodem casu, dass $4n - 1) > 2a$, so muss folglich seyn $(4n-1)m > 2a^2$; nun aber ist $(4n-1)m = aa + 1$ und wäre also $aa + 1 > 2aa$, welches nicht seyn kann nisi sit $a = 0$ vel $a = 1$ (denn hier muss das Zeichen $>$ nicht *majus*, sondern *non minus* heissen). Wenn man aber setzt vel $a = 0$, vel $a = 1$, so wird die Aequation $(4n-1)m - 1 = aa$ unmöglich. Ich muss gestehen, dass ich nicht geglaubt hatte, dass dieses theorema auf eine so leichte und schöne Art bewiesen wer-

den könnte, und bin daher versichert, dass die meisten theoremata Fermatii auf eine gleiche Art bewiesen werden können, weswegen ich Ew. um so viel mehr für die Communication dieser herrlichen Demonstration verbunden bin. Ungeacht nun daraus folget, dass auch diese Formul $4mn - m - n$ kein Quadrat seyn könne, so habe ich doch nach Ew. Anleitung darüber folgende Demonstration gemacht:

Qui negat veritatem propositionis $4mn - m - n = aa$, is statuere debet dari quadratum aa minimum, cui formula $4mn - m - n$ aequari possit. Sit ergo aa hoc quadratum minimum, sitque $4mn - m - n = aa$ erit $(4m-1)(4n-1)-1 = 4aa$ Addatur utrinque $- 8a(4n-1) + 4(4n-1)^2$, erit $(4m-1-8a+4(4n-1))(4n-1)-1 = 4(a-4n+1)^2 = \square$. Quod cum praecedente minus esse nequeat, sequitur $(4m - 1 - 8a + 4(4n-1))(4n-1) > (4m-1)(4n-1)$ ideoque $4n - 1 > 2a$ (ubi signum $>$ significat *non minus*). Simili modo demonstrabitur esse $4m - 1 > 2a$. Sit ergo $4m - 1 = 2a + p$ et $4n - 1 = 2a + q$ eritque $p > 0$ et $q > 0$, unde fiet $(4m-1)(4n-1) = 4aa + 2a(p+q) + pq$. At est $(4m-1)(4n-1) = 4aa + 1$ et ideo $2a(p+q)+pq = 1$, quod fieri nequit nisi sit $a = 0$ et $p = 1$ et $q = 1$. Verum aliunde constat esse non posse $a = 0$; quamobrem non datur quadratum minimum aa formulae $4mn - m - n$ aequale et consequenter haec formula quadratum nullo modo esse potest. Q. E. D.

Ich habe noch einen grossen Vorrath von dergleichen theorematis, welcher Demonstration, wenn solche auf gleiche Art sollte herausgebracht werden können, gewiss nicht wenig zu Erweiterung dieser Wissenschaft beytragen würde. Diese theoremata, wie ich sie der Ordnung nach herausgebracht

habe, sind folgende, nehmlich alle nachfolgenden formulae können nullo modo numeros quadratos geben

I. $4mn - 1(m+n)$	XV. $20mn - 1(m+n)$	XXVII $24mn - 1(m+n)$
II. $4mn - 3(m+n$	XVI $20mn - 3(m+n)$	XXVIII. $24mn - 5(m+n)$
	XVII. $20mn \pm 3(m-n)$	XXIX. $24mn - 7(m+n)$
III. $8mn - 1(m+n)$	XVIII. $20mn - 7(m+n)$	XXX. $24mn \pm 7(m-n)$
IV. $8mn - 3(m+n)$	XIX. $20mn \pm 7(m-n)$	XXXI. $24mn - 11(m+n)$
V. $8mn \pm 3(m-n)$	XX. $20mn - 9(m+n)$	XXXII. $24mn \pm 11(m-n)$
VI. $8mn \pm 5(m-n)$	XXI. $20mn + 11(m+n)$	XXXIII $24mn \pm 13(m-n)$
VII. $8mn + 5(m+n)$	XXII. $20mn \pm 13(m-n)$	XXXIV. $24mn + 13(m-n)$
VIII. $8mn + 7(m+n)$	XXIII. $20mn + 13(m+n)$	XXXV. $24mn \pm 17(m-n)$
	XXIV. $20mn \pm 17(m-n)$	XXXVI $24mn + 17(m+n)$
IX. $12mn - 1(m+n)$	XXV. $20mn + 17(m+n)$	XXXVII. $24mn + 19(m+n)$
X. $12mn + 5(m+n)$	XXVI. $20mn + 19(m+n)$	XXXVIII. $24mn + 23(m+n)$
XI. $12mn \pm 5(m+n)$		etc.
XII. $12mn \pm 7(m+n)$		
XIII. $12mn - 7(m+n)$		
XIV. $12mn - 11(m+n)$		

ferner ist auch $7mn - m - n = aa$.

Ausser diesen habe ich auch noch einige, welche generaler sind, als $4kmn - m - n = \Box$, oder auf folgende Art exprimirt:

Theorema. Existente mn divisore quocunque numeri N dico formulam $4N - m - n$ quadratum nunquam esse posse.

Hernach kann auch diese Formul

$$4(4k+1)mn - (8k+1)(m+n)$$

nimmer ein quadratum geben.

Die theoremata, welche Ew., durch unendlich viel series den valorem $\frac{\pi}{2}$ zu exprimiren, gefunden, waren mir schon längst bekannt, denn da $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} +$ etc. so wird seyn

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{2-1} - \frac{2}{4-1} + \frac{2}{6-1} - \frac{2}{8-1} + \text{etc. oder}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4-\frac{1}{2}} + \text{etc.}$$

Wenn nun ein jeglicher terminus in progressionem geometricam resolvirt wird, so kommt

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \text{etc.} \\ \quad - \frac{1}{2} - \frac{1}{2.4} - \frac{1}{2^2.8} - \frac{1}{2^3.16} - \frac{1}{2^4.32} - \text{etc.} \\ \quad + \frac{1}{3} + \frac{1}{2.9} + \frac{1}{2^2.27} + \frac{1}{2^3.81} + \frac{1}{2^4.243} + \text{etc.} \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{etc.} \\ + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \text{etc.}\right) \\ - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{64} + \frac{1}{125} - \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{16} + \frac{1}{81} - \frac{1}{256} + \frac{1}{625} - \text{etc.}\right) \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right.$$

Gleichergestalt, da $\frac{\pi}{2} = \frac{4}{1.3} + \frac{4}{5.7} + \frac{4}{9.11} + \text{etc.}$, so wird seyn $\frac{\pi}{2} = \frac{4}{2^2-1} + \frac{4}{6^2-1} + \frac{4}{10^2-1} + \text{etc.} = \frac{1}{1^2-\frac{1}{4}} + \frac{1}{3^2-\frac{1}{4}} + \frac{1}{5^2-\frac{1}{4}} + \text{etc.}$ Wenn nun ein jeglicher terminus in eine seriem geometricam resolvirt wird, so kommt Ew. andere Expression heraus

$$\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} = \quad 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} \\ \quad + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.}\right) \\ \quad + \frac{1}{16}\left(1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.}\right) \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

In der serie

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\pm\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\pm\frac{1}{25}\pm\frac{1}{27}+\frac{1}{32}+\frac{1}{36}+\text{etc.},$$

wovon Ew. casu signorum superiorum die Summ $= 1$, at casu signorum inferiorum die Summ $= 2l2 - 1$ angeben, wird ein Versehen seyn, indem alle denominatores unitate minui debebant. Alsdann aber kommen eben diejenigen theoremata heraus, welche Ew. mir schon längst communiciret und gütigst erlaubet, dieselben nebst Dero Demonstration im 9[ten] tomo zu publiciren.

Die series, deren terminus generalis ist $xx + 19(x-1)$, ist in der That wegen der häufigen numerorum primorum, so darin vorkommen, sehr merkwürdig. Inzwischen finden sich doch die numeri compositi um so viel häufiger ein, je weiter man die seriem continuirt. Denn da in den ersten 47 terminis nur 4 numeri non primi vorkommen, so kommen in den ersten 75 terminis schon 14 numeri non primi hervor. So weit habe ich diese seriem continuirt, und dieses war genug, um Ew. beyden Muthmassungen über die Beschaffenheit dieser Progression zu widerlegen. Denn erstlich habe ich gesehen, dass nicht immer ein numerus primus herauskommt, wenn vor x eine potestas binarii gesetzt wird: der 64[te] terminus ist $5293 = 67.79$. Hernach weiset aber der 73 terminus $6697 = 37.181$, dass die divisores formae $10n + 1$ nicht excludirt werden. Was im übrigen die divisores terminorum hujus seriei anlangt, so ist zu merken, dass keine andern stattfinden, als welche zugleich divisores numerorum hujus formae $19aa - 23bb$ sind und vicissim.

Ew. Observation, dass, wenn $4m - 1 =$ numero primo, auch m ein numerus sey ex duobus quadratis et trian-

gulari compositus, kann ich weder refutiren noch demonstriren, indem ich noch nicht einmal einen numerum habe finden können, der nicht in duo quadrata et numerum trigonalem resolubilis wäre, zum wenigsten gibt es unter 100 keinen. Sollten nun alle numeri diese Eigenschaft haben, so hätte auch diese Observation ihre Richtigkeit, aber auf eine solche Art, als wenn ich sagen wollte, dass m immer eine summa trium trigonalium oder quatuor quadratorum wäre. Dass diese beyden Propositionen: $8m + 3 =$ summae $3 \square$ et $m =$ summae $3 \triangle$ aequivalentes sind, ist leicht einzusehen, und dependiret eben davon auch die Demonstration, dass omnis numerus summa 4 quadratorum sey. Denn, si $m = \frac{aa+a}{2} + \frac{bb+b}{2} + \frac{cc+c}{2}$ erit $8m + 3 = (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 + (2c + 1)^2$, folglich ist immer $8m + 4$ eine summa quatuor quadratorum, und ferner ejus quadrans $2m + 1$, folglich omnis numerus impar, et per consequens omnis omnino numerus erit in 4 quadrata resolubilis. Bey dieser Form $8m + 3$ ist zu merken, dass so oft dieselbe ein numerus primus ist, auch in dieser Form $2aa + bb$ enthalten sey. Um dieses und andere dergleichen theoremata zu beweisen, kommt das meiste auf folgende lemmata an, wovon ich noch keine rechte Demonstration habe finden können:

I. Si numerus integer n non sit summa duorum quadratorum integrorum, talis quoque non erit in fractis, seu nullus numerus npp in duo quadrata integra resolvi poterit. Atque vicissim, si npp fuerit summa duorum quadratorum, etiam numerus n erit summa duorum quadratorum, idque in integris.

II. Si numerus n non fuerit summa 3 quadratorum in integris, etiam talis non erit in fractis.

III. Si numerus npp fuerit summa 4 quadratorum, erit quoque numerus n summa 4 quadratorum integrorum cyphra non exclusa.

Ich kann mich nicht erinnern ob Ew. nachfolgende Expression bekannt ist

$$a^m - \frac{n}{1}(a+b)^m + \frac{n(n-1)}{1.2}(a+2b)^m - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(a+3b)^m + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}(a+4b)^m - \text{etc.}$$

Wenn m und n numeri integri sind und $m < n$, so ist die ganze Expression immer $= 0$.

Nachfolgendes theorema scheint mir auch merkwürdig zu seyn: Si fuerit $aa + 4n$ numerus primus $= p$, atque d sit divisor quicunque numeri n, erit p numerus in hac forma $dxx + yy$ contentus (idque unico modo). Ex. gr. sit $n = 30$; sumto $a = 11$, fit $4n + aa = 241 = p$. Continetur ergo numerus 241 in sequentibus formis $xx + yy$; $2xx + yy$; $3xx + yy$; $5xx + yy$; $6xx + yy$; $10xx + yy$; $15xx + yy$; $30xx + yy$; in unaquaque autem semel tantum continetur.

Gleich wie eine summa duorum quadratorum inter se primorum $aa + bb$ keine andere divisores haben kann, als welche in dieser Form $4n + 1$ enthalten sind; also kann ich auch demonstriren, dass alle divisores formae $a^4 + b^4$ in dieser Formul $8n + 1$ enthalten sind; gleichergestalt, dass alle divisores von $a^8 + b^8$ numeri hujus formae $16n + 1$ seyn müssen. Et generaliter

Numerorum in hac forma $a^{2^m} + b^{2^m}$ contentorum alii divisores non dantur, nisi hujus naturae $2^{m+1}n + 1$.

Wenn diese factores in infinitum wirklich mit einander multiplicirt werden $(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)(1-n^5)$ etc., so kommt nachfolgende series heraus

$$1 - n^1 - n^2 + n^5 + n^7 - n^{12} - n^{15} + n^{22} + n^{26} - n^{35} - n^{40} + n^{51} + n^{57} - \text{etc.}$$

wovon per inductionem leicht erhellet, dass omnes termini in hac forma $n^{\frac{3xx \pm x}{2}}$ begriffen sind, und das signum $+$ praefixum haben, wenn x ein numerus par, das signum $-$ aber, wenn x ein numerus impar ist. Ich habe aber noch keine Methode finden können, wodurch ich die Identität dieser zwey Expressionen demonstriren könnte. Der Hr. Prof. Nicolaus Bernoulli hat auch praeter inductionem nichts darüber herausbringen können.

Euler.

LETTRE LXVII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Réponse à la précédente.

St. Petersburg d. Dec. 1748.

Aus Ew. Schreiben vom 15. October habe ich mit Vergnugen ersehen, dass endlich aus meiner Demonstration etwas geworden ist. Ob mir nun wohl meine andere occupationes fast keine Zeit übrig gelassen, die von Ew. beygefügten andern theoremata etwas genauer zu untersuchen, so hoffe ich doch, dass man künftig in dieser generali aequatione impossibili $emn - f(m + n) = aa$ die conditiones numerorum e et f in unendlich vielen casibus wird bestimmen können.

In der serie $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \pm \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \pm \frac{1}{25} \pm \frac{1}{27}$ etc. und den von mir angegebenen summis ist gar kein Fehler, wie sol-

ches Ew., wenn Sie selbige noch einmal zu betrachten belieben, leicht ersehen werden.

Dass die divisores formae $10n+1$ in der serie, cujus terminus generalis est $xx+19x-19$, nicht excludiret werden, ist so offenbar, dass es mir des Morgens nach Abgang meines vorigen Briefes, als ich ohngefähr daran dachte, selbst beyfiel; ich achtete aber die gloriam der ersten Entdeckung dieses erroris nicht so wichtig, dass ich selbige durch ein besonderes, nur blos dazu gewidmetes Schreiben notificiren sollte.

Die series $a^m - n(a+b)^m + n(n-1)(a+2b)^m -$ etc. $= 0$ ist mir vorher gar nicht bekannt gewesen; um mich von der Wahrheit derselben zu convinciren, wollte ich gradatim erst $m=1$, $m=2$, etc. setzen, und dann successive auch $n=1$, $n=2$, etc. nehmen, so würde es sich zeigen, dass auch in den grösseren valoribus m et n, die series sich allezeit destruiren müsse.

Bey der serie $(1-n)(1-nn)(1-n^3)$ etc. ist mir ein besonderes problema eingefallen: Data serie A infinitorum terminorum, signis + et — dato ordine variantibus procedentium, invenire seriem B hujus naturae, ut in producto AB signa + et — eodem ordine sibi succedant, quo ordine isbi succedebant in A. Dieses problema kann sehr leicht solviret werden in dem casu $A = (1-n)(1-nn)(1-n^3)$ etc., obgleich darin, wie Ew. angemerkt haben die signa + et — auf eine gar ungewöhnliche Art abwechseln, denn wenn ich setze $B = (1-n^{\frac{1}{2}})(1-n^{\frac{2}{2}})(1-n^{\frac{3}{2}})$ etc., so wird A multiplicata per B eine neue series, welche dieselbe variationem signorum in sich hält. Goldbach.

LETTRE LXVIII.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Mêmes sujets. Problème de la géométrie des courbes.

Berlin d. 21. Januar 1744.

— — Ausser den vorher gemeldten theorematibus über die formulas, quae quadratos numeros praebere nequeunt, habe ich seit der Zeit in dieser Materie nichts anders angemerkt, als dass diese Formul $2abc - b - c$ kein quadratum seyn könne, si vel b vel c fuerit numerus impar formae $4n-1$. Ferner kann auch diese Formul $2abc - b + c$ kein Quadrat seyn, si fuerit a numerus impar et b numerus vel hujus $4n+1$ vel $4n+2$ formae. Hernach kann auch $2abc+b\pm c$ nimmer ein quadratum seyn, si fuerit a numerus impar et b vel hujus formae $4n-1$, vel hujus $4n-2$. Ich kann aber von allen diesen Propositionen noch keine andere völlig demonstriren, als diejenigen, welche aus $4mn-m-n = aa$

fliessen, und welche Ew. folglich auch durch Dero letztgemeldte Methode demonstriren können.

Ich kann noch nicht einsehen, dass kein Schreibfehler in der von Ew. letztangeführten serie

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\pm\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\pm\frac{1}{25}\pm\frac{1}{27}+\frac{1}{32}+\text{etc.}$$

sollte unterlaufen seyn. Denn da Ew. gefunden, dass

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+\text{etc.}$$

so muss diese series $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+$ etc. nothwendig kleiner als 1 seyn, indem sogar der defectus angegeben werden kann, welcher ist

$$\frac{1}{3.4}+\frac{1}{7.8}+\frac{1}{8.9}+\frac{1}{15.16}+\frac{1}{24.25}+\text{etc.}$$

Gleichergestalt da fest demonstrirt worden, dass

$$2l2-1=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{15}-\frac{1}{24}-\frac{1}{26}+\frac{1}{31}+\text{etc.},$$

so kann ja eben diese series, si singuli denominatores unitate augeantur, unmöglich eben diese Summ $2l2-1$ haben. Dahero noch mehr in meiner Meinung gestärket werde, dass Ew. vergessen die denominatores um 1 zu vermindern.

Dass diese series

$$a^m-n(a+b)^m+\frac{n(n-1)}{1.2}(a+2b)^m-\text{etc.}=0$$

si fuerit $n>m$, erhellet ex natura serierum recurrentium. Denn da alle progressiones algebraicae ad genus recurrentium gehören, dergestalt dass ein jeder terminus ex aliquot praecedentibus determinirt werden kann, so muss auch diese series a^m, $(a+b)^m$, $(a+2b)^m$, etc. eine series recurrens seyn, und ein beständiges Verhältniss zwischen einem jeden termino und einigen vorhergehenden Statt finden. Dieses kann sogar infinitis modis geschehen, indem die scala rela-



tionis seyn kann $1 - n + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \text{etc.}$, wenn nur $n > m$.

Ich zweifle sehr, ob man eine leichtere Demonstration davon wird finden können, als diese, welche ex natura serierum recurrentium von selbsten folgt, denn wenn man sich schon per inductionem von der Wahrheit davon überführet, so sieht man doch nicht den Weg, so dazu geführet, ein.

Ew. Reflexion über die Expression $(1-n)(1-n^2)(1-n^3)$ etc. in Ansehung eines factoris $(1-n^{\frac{1}{2}})(1-n^{\frac{2}{2}})(1-n^{\frac{5}{2}})$ etc. also, dass das factum, si evolvatur, eine gleiche Abwechselung der signorum + et — gebe, könnte vielleicht bey andern Untersuchungen einigen Vortheil bringen; allein in der serie, welche ich daraus hergeleitet, habe ich daraus noch keinen Nutzen ziehen können.

Man siehet hier schon seit mehr als 8 Tagen einen ziemlich grossen Cometen, welcher, da er in coelo fast gar keinen motum zu haben und doch immer grösser zu werden scheinet, allem Ansehen nach genau auf die Erde zugehet.

In den Actis Lips. M. Nov. ist ein problema proponirt worden solches Inhalts: Circa data duo puncta (Fig. 8.) *E* et *F* lineam curvam describere hujusmodi ut si ex duobus ejus punctis quibusvis *A* et *B* ad illa puncta *E* et *F* ducantur rectae, area *AEB* futura sit semper proportionalis angulo *AFB*. Vel si corpus in peripheria hujus curvae revolvatur, ut areae, quas circa punctum *E* describit, proportionales sint angulis, quos circa alterum punctum *F* absolvit.

Euler.

LETTRE LXIX.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Réponse à la précédente

Moscau d. 12. März. st. n. 1744.

Das problema, dessen Ew. aus den Actis Lips. Erwähnung thun, werden Sie ohne Zweifel schon solviret haben. So viel ich sehe hat die curva unter andern diese Eigenschaft, dass wenn sie durch eine rectam quamcunque per punctum F (Fig. 8) transeuntem in zwey Theile getheilet, und von demjenigen Theile, in welchem das punctum E stehet, das triangulum rectilineum AEB abgezogen wird, das trilineum residuum AEB allezeit eine aream constantem, areae dimidiae totius curvae aequalem habe, oder dass die pars curvae $EAGB$ allezeit $=$ sey der parti curvae $EAHB$.

Die vermeinten summae serierum sind allerdings aus einem offenbaren Fehler entstanden.

Die von Ew. angegebenen vielen casus, wodurch die quantitates e und f in $emn - f(m + n) = aa$ bestimmet werden, geben mir Ursach zu vermuthen, dass selbige noch viel generaler determiniret werden können, ob mir gleich dazu bishero keine Methode bekannt ist; indessen scheinet doch auch diese kleine Observation einigen Nutzen zu haben, dass die aequatio impossibilis, so wie sie angedeutet worden, allezeit ihre Richtigkeit hat, wenn $aa \leqq 4(e-f)^2$, allwo das signum $\leqq$ *minus* oder *gleich* bedeutet, gleichwie ich seit Ew. vorigem Schreiben das signum $\geqq$ für *majus* vel *gleich* zu meinem eigenen Gebrauch angenommen.

Goldbach.

LETTRE LXX.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Cause de la pesanteur. Réponse à la précédente. Divers sujets.

Berlin d. 25 April 1844.

— — — Ich bin in Verfertigung meiner pièce, welche ich über den Magneten im vorigen Jahr nach Paris geschickt, auf einen Einfall, um die causam gravitatis zu erklären, gerathen, welcher mir je länger je gründlicher vorkommt, ungeacht ich mich noch nicht im Stande befinde denselben völlig auszuführen. Anjetzo sollte man hier schon wissen können, wer dieses Jahr den Preis bey der Akademie zu Paris erhalten; weil mir nun der Hr. Clairaut noch nichts davon gemeldet, so kann ich gewisse Rechnung machen, dass ich diesmal wieder leer ausgegangen. Ich kann auch die Ursach leicht errathen, denn da ich, um meine Erklärung zu bekräftigen, die Meinung der Engländer von der

Attraction, als einem attributo essentiali corporum, ziemlich stark angegriffen und widerleget, so wird dieses den Herren Commissariis, welche, wie ich seit der Zeit erfahren, dieser Meinung völlig beistimmen, gar nicht gefallen haben.

Die Eigenschaft, welche Ew. von den curvis, dem in den Actis Lipsiensibus proponirten problemati satisfacientibus, entdecket haben, hat ihre völlige Richtigkeit, und ist also allen den unendlich vielen krummen Linien, wodurch das problema solvirt wird, gemein. Ich habe vor etwas Zeit eine ausführliche Solution darüber nach Leipzig geschickt, darin ich ex quolibet curvarum algebraicarum ordine eine angegeben. Aus den sectionibus conicis satisfacirt der Circul, da ein punctum im centro, das andere in der Peripherie angenommen wird. Ex lineis tertii ordinis satisfacirt diese Aequation $yy = \frac{3axx - x^3}{x - a}$, positis (Fig. 9) C et D duobus illis punctis, circa quorum illud C sint areae proportionales angulis ad D formatis, et vocatis $CD = a$, $DP = x$, $MP = y$.

Ausser diesen curvis algebraicis gibt es unendlich viel, deren Construction a quadratura circuli dependirt, die übrigen aber lassen sich durch keine Quadratur construiren; ich habe aber eine General-Construction per motum tractorium gegeben.

Ueber die theoremata numerica habe ich seit der Zeit nichts Neues entdecket Was die neuen Zeichen $\geqslant$ und $\leqslant$ betrifft, dergleichen in diesen Speculationen öfters höchst nöthig sind, so wollte ich nach der Analogie dieses Zeichens $\not=$, welches *non aequale* bedeutet, vielmehr diese $\not<$ und $\not>$ gebrauchen, deren jenes *non minus*, d. i. entweder aequale oder majus ($\geqslant$), dieses aber $\not>$ *non majus*, d. i. so viel als $\leqslant$, minus oder aequale bedeutet.

Nächstens wird bei dem Hn. Bousquet mein Tractat de problemate isoperimetrico herauskommen; und darauf wird er ein anderes Werk: *Introductio ad Analysin infinitorum* drucken, worin ich sowohl den partem sublimiorem Algebrae als Geometriae abgehandelt. Ich habe für nöthig befunden dieses vor der Analysi infinitorum selbst hergehen zu lassen, an welcher ich jetzt wirklich arbeite.

Jetzt wird hier an einer Dissertation de motu Planetarum et Cometarum, worin ich die orbitam des letzten Cometen bestimmet, gedruckt. Es ist bey diesem Cometen merkwürdig, dass derselbe d. 4. April so nahe bey dem Mercurio vorbeygegangen, dass man daher eine Perturbation in dieses Planeten Lauf zu vermuthen Ursach hat. Bisher ist aber der Mercurius noch unsichtbar, dass man sich also hierüber noch nicht hat erklären können.

Euler.

LETTRE LXXI.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Encore sur les expressions qui peuvent et ne peuvent point donner des nombres quarrés. Savants de Berlin. Knutzen. Traité des comètes. Divers sujets.

Moscau d. 1 Juni st. n. 1744.

Vor wenigen Tagen habe ich ganz unvermuthet gefunden, dass die aequatio $emn \pm fm + gn = aa$ allezeit possibilis ist, nehmlich dass datis numeris e, f, g, allezeit gegeben werden können m, n et a. Die Demonstration ist sehr leicht: ponatur $m = eg \pm f \pm 2g$, $n = g$, erit $a = eg \pm f \pm g$. Wie aber bey solcher Bewandniss der Sache, 25 von den 38 casibus, welche Ew. in Dero Schreiben vom 15 Oct. als aequationes impossibiles anführen, sich werden legitimiren können, lasse ich (nach der bewussten phrasi) gar sehr an seinen Ort gestellet seyn.

Von Hn. Prof. Strube hoffe ich bey dessen Zurückkunft einige particularia von den dortigen savans als MM. Jordan, d'Argens, Algarotti etc. zu vernehmen. Ew. werden auch ohne Zweifel einen gewissen M. des Champs kennen, welcher einen, mir annoch unbekannten *Cours de la philosophie*

Wolfienne geschrieben hat. In diesem Buche soll eine passage vorkommen, da ad marginem stehet: «M. Huygens critiqué». Wo sie so beschaffen ist, wie mir hinterbracht worden, wird es Ew. nicht gereuen, selbige gelesen zu haben.

Für die Communication der aequationis ad curvam danke ich dienstlich und werde Ew. Dissertation, sobald ich die Acta Erud. bekomme, mit Vergnügen lesen. Mit der angeführten Veränderung der signorum bin ich auch wohl zufrieden.

Aus einem Stück der Hamburgischen Nachrichten habe ein favorables judicium von des Hn. Prof. Knutzen Tractat von den Cometen ersehen; es wird daselbst bey dieser Gelegenheit gemeldet, dass zwar schon einige Gelehrte gewesen, die Cometen auf eine gewisse Zeit vorausprophezeyet haben, die Cometen hätten sich aber nicht eingefunden, so dass unter Allen, der Hr. Prof. Knutzen der erste gewesen, welcher einen Cometen, nehmlich den von A. 1744, in einer öffentlichen Schrift schon 7 Jahr voraus vermuthet hat.

Aus dem, was von der Théorie de la figure de la Terre par M. Clairaut in den Leipz. gel. Zeitungen gesagt wird, schliesse ich, dass es ein sehr schönes Buch seyn muss.

Wenn ein völliger tomus von Ew. operibus herausgekommen seyn wird, bitte ich mir notice davon zu geben.

Ich erinnere mich, dass Ew. mir schon vor einigen Jahren gesagt haben, auf was für Art Sie ein Capital von 10000 Rthlr., im Fall Sie es erwerben sollten, zu employiren gesonnen wären, nehmlich ein Landgut in patria zu zu kaufen und darauf zu leben. Ohngeachtet nun vermuthlich der casus in terminis bald existiren wird, so will ich doch nicht hoffen, dass Sie Ihr damaliges Project in Erfüllung bringen werden. Goldbach.

LETTRE LXXII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Réponse à la précédente. Leçons du calcul différentiel. Mémoires de Berlin. Logogryphe à déchiffrer.

Berlin d. 4. Juli 1744.

Dass diese Formul $emn..fm..gn$ generaliter ein quadratum seyn könne, wenn nur entweder f oder g ein numerus affirmativus ist, wie Ew. angemerket haben, kann mit meinen vormals überschriebenen theorematibus gar wohl bestehen. Dieselben waren zweyerley, entweder von dieser Form $4emn - pm - pn$, oder von dieser $4emn \pm pm \mp pn$. Die erstere leidet nun durch Ew. Observation keine Noth; die letztere aber würde umgestossen, wenn nicht eine Condition hinzugethan werden müsste, davon ich mich nicht mehr erinnere, ob ich in meinem Briefe damals Meldung gethan habe, oder nicht. Nehmlich es müssen m und n respectu p primi seyn. Wenn ich also sage, dass $8mn - 3m + 3n$

nimmer ein Quadrat seyn könne, so muss diese Condition dabei gemeldet werden, dass n kein multiplum 3[r] sey. Denn wenn man dürfte $n = 3$ oder überhaupt $n = 3hh$ setzen, so könnte diese Formul $8mn - 3m + 3n$ infinitis modis ein Quadrat seyn. Diese Restriction folget unmittelbar aus der Art, welche mich dazu geführet, und welche ich auch in der pièce, so ich vor einiger Zeit über diese Materie nach St. Petersburg geschickt habe, ausdrücklich angemerkt. Denn $8mn - 3m + 3n$ kann deswegen kein Quadrat seyn, weil diese Formul $aa - 2bb$ keinen divisorem primum hujus formae $8n \pm 3$ haben kann. Dahero werden diejenigen casus ausgenommen, wenn n ein multiplum von 3 ist, eben wie auch in jener $aa - 2bb$ diese Condition hinzugethan werden muss, dass a und b numeri inter se primi seyn sollen. Denn ohne diese Restriction könnte $aa - 2bb$ per quemcunque numerum divisibilis seyn.

Ich arbeite anjetzo an einem Tractat über den calculum differentialem, in welchem ich verschiedene curieuse Decouverten über die series gemacht habe, wovon ich die Freyheit nehme Ew. einige zu communiciren:

I. Sumto in circulo arcu quocunque a, cujus sinus sit $= \alpha$, sinus arcus dupli $= \beta$, sinus arcus tripli $= \gamma$, sinus quadrupli $= \delta$, quintupli $= \varepsilon$ etc. dico hujus seriei infinitae $\frac{1}{2}a + \alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{3}\gamma + \frac{1}{4}\delta + \frac{1}{5}\varepsilon +$ etc. summam semper exprimere longitudinem arcus 90° in eodem circulo.

II. Posito radio circuli $= 1$, atque arcus cujuscunque a statuatur ut sequitur $\sin a = \alpha$, $\sin 2a = \beta$, $\sin 3a = \gamma$, $\sin 4a = \delta$, $\sin 5a = \varepsilon$ etc., $\cos a = A$, $\cos 2a = B$, $\cos 3a = C$, $\cos 4a = D$, $\cos 5a = E$ etc. sitque π longitudo semicircumferentiae, erit

$$\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{2A^2}+\frac{\gamma}{3A^3}+\frac{\delta}{4A^4}+\frac{\varepsilon}{5A^5}+\text{etc.}=\frac{\pi}{2}$$

$$1+\frac{A}{A}+\frac{B}{A^2}+\frac{C}{A^3}+\frac{D}{A^4}+\frac{E}{A^5}+\text{etc.}=0$$

$$1+A+B+C+D+E+\text{etc.}=\frac{1}{2}$$

III. Nachfolgende series sind ex divisione arcus entsprungen.

Posito radio $=1$, sumatur arcus quicunque $=s$, cujus sinus sit $=a$, cosinus dimidii arcus sit $=\alpha$, $\cos\frac{1}{4}s=\beta$, $\cos\frac{1}{8}s=\gamma$, $\cos\frac{1}{16}s=\delta$ etc. erit

$$s=\frac{a}{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\text{ etc.}}.$$

IV. Si ponatur arcus cujuscunque s tangens $=A$, tang $\frac{1}{2}s$ $=B$, tang $\frac{1}{4}s=C$, tang $\frac{1}{8}s=D$, tang $\frac{1}{16}s=E$ etc. erit

$$\frac{1}{2}B+\frac{1}{4}C+\frac{1}{8}D+\frac{1}{16}E+\text{etc.}=\frac{1}{s}-\frac{1}{A}.$$

V. Si cognita fuerit summa hujus seriei

$$a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\text{etc.}$$

quam ponam $=z$; dico semper assignari posse summam hujus seriei

$$Aa+Bbx+Ccx^2+Ddx^3+Eex^4+Ffx^5+\text{etc.}$$

dummodo series horum coëfficientium $A, B, C, D, E,$ etc. tandem habeat differentias constantes. Sit enim $B-A=P$, $C-2B+A=Q$, $D-3C+3B-A=R$ etc. Deinde quia z datur per x, statuatur $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dp}{dx}=q$, $\frac{dq}{dx}=r$, $\frac{dr}{dx}=s$ etc. Hisque valoribus inventis erit seriei

$$Aa+Bbx+Ccx^2+Ddx^3+\text{etc.}$$

summa $=Az+Ppx+\frac{1}{2}Qqx^2+\frac{1}{6}Rrx^3+\frac{1}{24}Ssx^4+\text{etc.}$

Sit exempl. gr. $z = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{etc.} = \frac{1}{1-x}$ erit $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2} = p$, $\frac{dp}{dx} = \frac{2}{(1-x)^3} = q$, $\frac{dq}{dx} = \frac{6}{(1-x)^4} = r$ etc. et pro A, B, C, D, etc. sumatur haec series

$$\begin{array}{c} 1,\ 3,\ 7,\ 13,\ 21,\ 31,\ 43 \text{ etc.} \\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12 \\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2, \\ 0,\ 0,\ 0,\ 0 \end{array}$$

deren formula generalis ist $nn - n + 1$; davon die Differenzen genommen, wird $A = 1$, $P = 2$, $Q = 2$, $R = 0$, $S = 0$ etc., folglich ist die summa seriei

$$1 + 3x + 7x^2 + 13x^3 + 21x^4 + 31x^5 + \text{etc.} = \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

Gleich wie man vermittelst der Newton'schen Evolution des binomii alle aequationum purarum $x^n - A = 0$ radices per series infinitas exprimiren kann, so habe ich auf eine ähnliche Methode gedacht, um aller aequationum affectarum radices gleichfalls per series infinitas zu exprimiren. Es sey gegeben diese Aequation

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{etc.} = 0,$$

deren eine radix sey $x = f$, welche ich folgendergestalt per seriem exprimire. Ich setze

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{etc.} = y$$

und suche per differentiationem die valores folgender Quantitäten $p = \frac{dx}{dy}$, $q = \frac{dp}{dy}$, $r = \frac{dq}{dy}$, $s = \frac{dr}{dy}$ etc., welche alle in x gegeben seyn werden. Nun nehme man nach Belieben für x einen valorem determinatum an, und bestimme daraus die valores von y, p, q, r, s etc. quo facto summa hujus seriei $x - py + \frac{1}{2}qy^2 - \frac{1}{6}ry^3 + \frac{1}{24}sy^4 - \text{etc.}$ semper aequalis erit uni radici aequationis propositae

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \text{etc.} = 0.$$

Nimmt man nun fur x einen solchen Werth an, welcher einer radici schon sehr nahe kommt, so wird die series convergens und weisct die radicem proxime.

Man kann diese Proposition auch folgendergestalt ausdrücken. Si fuerit

$$y = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{etc.}$$

hincque definiantur sequentes quantitates $p = \frac{dx}{dy}$, $q = \frac{dp}{dy}$, $r = \frac{dq}{dy}$, $s = \frac{dr}{dy}$ etc. ex quibus formetur haec series

$$x - py + \frac{1}{2}qy^2 - \frac{1}{6}ry^3 + \frac{1}{24}sy^4 - \text{etc.}$$

dico hujus serici summam, quicunque valor pro x ponatur, semper acquari uni radici hujus aequationis

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \text{etc.} = 0.$$

Wenn man sich eine lineam curvam vorstellet von dieser Natur

die abscissae sind 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc.
die applicatae 1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, etc.

dergestalt, dass, wenn die abscissa gesetzt wird $= x$, die applicata wird $y = 1 \ 2.3.4\ldots x$, so kann diese curva per infinita puncta leicht beschrieben werden. Wenn ich mich recht erinnere, so haben Ew. mir einmal Anlass gegeben auf diese curvam zu denken. Unlängst, da mir diese Materie wiederum vorkam, so habe ich die naturam dieser krummen Linie durch folgende aequationem differentialem exprimirt: Man setze

$$A = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.} = 1{,}644934066848$$

$$B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.} = 1{,}202056903159$$

$$C = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.} = 1{,}082323233711$$

$$D = 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \text{etc.} = 1{,}036927755106$$

$$E = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{etc.} = 1{,}017343061984$$

$$F = 1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \text{etc.} = 1{,}008349277386$$

etc.

und ferner sey $n = 0{,}5772156649$, so wird seyn

$$\frac{dy}{ydx} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x} - n,$$

woraus die positio tangentis, so oft x ein numerus integer ist, erkannt wird. Wenn aber x ein numerus fractus oder irrationalis, so dienet diese aequatio infinita:

$$\frac{dy}{ydx} = Ax - Bx^2 + Cx^3 - Dx^4 + Ex^5 - \text{etc.} - n$$

oder auch diese

$$\frac{dy}{ydx} = \frac{x}{1+x} + \frac{x}{4+2x} + \frac{x}{9+3x} + \frac{x}{16+4x} + \frac{x}{25+5x} + \text{etc.} - n.$$

Aus der Figur dieser curvae ist leicht zu sehen, dass dieselbe eine applicatam minimam inter abscissas 0 et 1 haben muss. Wenn man nun setzt $dy = 0$, so kommt proxime heraus $x = 0{,}46096$ oder $x = \frac{6}{13}$. Um aber aus einer jeden abscissa x die gehörige applicatam y zu finden, so habe ich diese logarithmische Aequation herausgebracht

$$ly = \frac{1}{2}\, l2\pi + (x + \tfrac{1}{2})\, lx - x + \frac{1}{1.2x} - \frac{1}{3.4.5.6x^3} + \frac{1}{5.6.7.6x^5}$$
$$- \frac{3}{7.8.9.10x^7} + \text{etc.}$$

Wenn also x eine sehr grosse Zahl ist, so ist proxime $y = \frac{x^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^x}$, posito $e = 2{,}7182818$. Setzt man aber

genommen nicht ferner darüber zu concurriren, sondern meine Dissertation nächstens allhier drucken zu lassen. *)

So favorable das judicium in den Hamburgischen Zeitungen über des Hn. Prof. Knutzen Meinung von dem letzten Cometen ist, so ist doch sowohl der Grund, als seine Ausführung völlig falsch. Er nimmt erstlich an, dass dieser Comet ein tempus periodicum von $45^3/_4$ Jahren habe, weil er aus dem catalogo Heveliano gesehen, dass fast immer nach Verfliessung dieses intervalli ein Comet erschienen. Ferner glaubt er, dass der Comet von 1698 eben derselbe gewesen, der A. 1652 gesehen worden, da man doch, wenn man die Sach genau untersuchet, kaum zwey Cometen finden wird, welche so viel von einander differiren, als diese zwey. Hernach ist auch der letzte Comet von diesen beyden so stark unterschieden, dass man mit eben der raison den Mercurium für den Saturnum halten könnte, wenn man nicht öfter beyde zugleich am Himmel sähe. Ich habe auch dem Hn. Prof. Knutzen alle diese Gründe überschrieben, wogegen er nichts anders einzuwenden findet, als dass gleichwohl seine Meinung oder Prophezeyung eingetroffen, und dass er fast nicht glauben könne, dass solches par hasard geschehen. Ich habe über diesen Cometen eine weitläufige Dissertation geschrieben, welche jetzt bald wird gedruckt seyn, darin ich den Lauf dieses Cometen auf das Genaueste bestimmet und ganz deutlich gewiesen, dass sein tempus periodicum sich über etliche saecula erstrecke: wie sich denn auch unter allen Cometen, so seit 700 Jahren observirt werden, keiner findet, dessen Lauf nur im Geringsten mit dem letzten übereinkäme.

*) Celle dissertation est publiée dans le tome V du Recueil des pièces qui ont remporté le prix de l'Académie de Paris.

Die Théorie de la figure de la terre par M. Clairaut ist in der That ein unvergleichliches Werk, sowohl in Ansehung der profunden und schweren Quaestionen, welche darin abgehandelt werden, als der angenehmen und leichten Methode, nach welcher er die sublimsten Sachen ganz klar und deutlich vorzubringen weiss.

Ob mein Tractat de problemate isoperimetrico in Lausanne schon völlig gedruckt ist, habe ich noch keine Nachricht erhalten. Ich habe inzwischen ein neues Werk dahin geschickt unter dem Titul *Introductio ad analysin infinitorum*, worin ich sowohl den partem sublimiorem der Algeber als der Geometrie abgehandelt und eine grosse Menge schwerer problematum ohne den calculum infinitesimalem resolvirt, wovon fast nichts anderswo anzutreffen. Nachdem ich mir einen Plan von einem vollständigen Tractat über die analysis infinitorum formirt hatte, so habe ich bemerkt, dass sehr viele Sachen, welche dazu eigentlich nicht gehören, und nirgend abgehandelt gefunden werden, vorhergehen müssten, und aus denselben ist dieses Werk als prodromus ad analysin infinitorum entstanden.

Die neue Akademie allhier wird nächstens einen tomum von den darin abgelesenen Pièces herausgeben. Es wird darin eine grosse Anzahl Pièces von mir kommen. Weilen nun die Herren Staats-Ministri fleissig zugegen sind, so habe, um diesen Herren keinen Ekel zu erwecken, meine Dissertationen französisch abgelesen, nachdem solche von dem Herrn Prof. Naudé corrigirt worden. Ich habe auch um dieser Ursach willen pure mathematische Speculationen und calculos zu evitiren gesucht, und mehrentheils physikalische Materien abgehandelt. Darunter befindet sich eine neue Theorie von dem Licht und Farben, wodurch ich alle phae-

nomena auf das Deutlichste erkläre und alle Schwierigkeiten, welchen andere Theorien unterworfen sind, vermeide. Hernach habe ich demonstrirt, dass die Forcen, welche von einem Stoss oder Schlag herkommen, jederzeit mit einer blossen Pression comparirt werden können, oder dass die vires vivae und mortuae unter sich homogeneae seyen. Ich habe auch ex natura gravitatis dargethan, dass die ultimae moleculae omnium corporum unter sich alle gleich dicht oder eandem gravitatem specificam haben müssen, wodurch das principium indiscernibilium einigen keinen geringen Stoss zu leiden scheinet.

Ich habe vor einiger Zeit nachfolgenden logogryphum entworfen, worin alle characteres Buchstaben bedeuten und der Text latein ist:

Pxqſwlznjdvynſtiddkqxhleebſpxdfgtlzbccſbkſodxo kſnglqxnſchejmlckzxhrſwjgſhxvzjnbgyxcdgixkoxj mlncoigdxvzflmeſnſyjqſangvnylrcxſonbfjalrkwſnbſ pjoizoxqknubroſadgiaxwkcbrbckloſrnjwngſzſhgjfc bcſvqjtxeevtbzſyjsbzhſmlnbgſsqjwglnxvzſkonbcoigd xvrkſjalzxtſnilenſgvcboofcſxnnſgnkbcjnnjynxvplgn bſzfoxeejdgxbcjcnſdyvdbhzlnvyxmbcblobbcyſekonb ceiobſplwsxzxſjcndbhrlzqxsſonbcoljſſyqſmjeevhlee xoiexmgicſdnktvoldxnſbxoſcktvpxrnv.

Ungeachtet hier die Bedeutung der characterum nicht veränderlich ist, so deucht mich doch, dass dergleichen Schrift nicht leicht dechiffrirt werden kann.

Die hiesige Akademie wird auch nächstens ein praemium von 140 Rthlr. aussetzen, womit jährlich continuirt werden soll. Für das künftige Jahr wird die causa physica electricitatis das sujet der question seyn. Euler.

LETTRE LXXIII.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Problème de nombres.

Moscau d. 16. Juli st. n. 1744.

Ich halte diese Proposition für gewiss, ohngeachtet ich glaube, dass die Demonstration davon nicht leicht zu finden sey: Dato numero primo hujus formae $4n+1$, datur alius numerus hujus formae a^2+1, quem ille dividat; (dass aber invento uno a^2+1, noch innumeri alii von dieser Eigenschaft gefunden werden können, ist an sich offenbar). In gewissen Fällen ist die Solution gar leicht, als zum Exempel, wenn in dem gegebenen numero primo $4n+1$ der numerus n quadratus oder trigonalis ist.

Ich möchte wohl wissen ob Ew. ein Buch gelesen haben, davon mir nur der folgende Titel bekannt ist: La méthode des fluxions, par M. Newton, à Paris 1740.

Im übrigen beziehe ich mich auf mein letztes Schreiben vom 1. Juni. Goldbach.

LETTRE LXXIV.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Suite sur les expressions qui peuvent, ou ne peuvent point donner des nombres quarrés.

Moscau d. 17. August 1744.

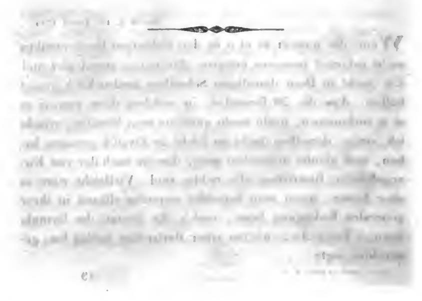
Wenn die numeri m et n in den bisherigen theorematibus nicht jederzeit numeros integros affirmativos angedeutet und Ew. nicht in Dero damaligem Schreiben ausdrücklich gesagt hätten, dass die 38 formulae, in welchen diese numeri m et n vorkommen, nullo modo quadrata seyn könnten, würde ich einige derselben nicht so leicht in Zweifel gezogen haben, und glaube nunmehro gern, dass sie nach der von Ew. angeführten Restriction alle richtig sind. Vielleicht wäre es aber besser, wenn man bemeldte numeros allezeit in ihrer generalen Bedeutung liesse, und z. Ex. anstatt der formula $8mn - 3m + 3n = aa$ (so einer Restriction nöthig hat) generaliter sagte

$8(3m \mp 1)\ 3n \pm 1) - 3(3m \mp 1) + 3(3n \pm 1) = aa$,
worin dasjenige, so bey dem theoremate essentiell ist, be-
stehet. Ich habe ferner observiret, dass wenn $emn - m - n$ kein quadratum seyn kann, auch $emn - n - e = \square$, oder wenn e ein numerus integer hujus conditionis ist, dass $\frac{aa+n}{en-1}$ niemals ein numerus integer seyn kann, alsdann auch $\frac{aa+e}{en-1}$ kein numerus integer ist.

Für die mir communicirten fürtrefflichen theoremata danke ich verbundenst.

Goldbach.

P. S. Unlängst haben I. Kais. Majestät mich (wiederum praeter meritum et petitum) zum würklichen Etatsrath nebst dem appointement von 2000 R. ernennet.



LETTRE LXXV.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Concours de Paris pour la théorie de l'aimant. Suite des recherches arithmétiques des lettres précédentes. Sommation de diverses séries.

Berlin d. 19 September 1744

— — — M. Clairaut hat mich von neuem versichert, dass bey der letzten Untersuchung der eingeschickten pièces über den Magneten, die meinige die grösste Approbation gefunden, dass aber drey von den fünf dazu ernannten Commissariis, welche Newtonianische Attractionisten seyen, in dem Gedanken stehen, dass diese Frage nimmer auf eine mathematische Art erklärt werden könne. Nach zwey Jahren müsse aber, nach den Gesetzen der Akademie, der Preis nothwendig ausgetheilt werden. Unterdessen deucht mich, dass wenn die Herren die Auflösung dieser Frage für unmöglich halten, dieselben die von neuem darauf gesetzten 2500 livres auf eine ihrem Urtheil nach mögliche und nützlichere Frage hätten setzen sollen.

Ew. Observation dass, wenn $emn - m - n = \square$, auch $emn - m - e = \square$, kann zur Entdeckung vieler neuer theorematum Anlass geben; denn wenn $emn - m - n = \square$, so wird auch, wenn man setzt $n = pmm - m$, seyn

$$epm^3 - emm - pmm = \square \text{ oder } emp - p - e = \square.$$

Ew. thun in Dero Briefe nicht die geringste Meldung, warum Dieselben die aus Dero Reise-Journal ausgeschnittenen Blätter beygefüget haben. Ich vermuthe aber, dass hiezu die series $\frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{96} + \frac{1}{216} +$ etc., deren Summ von dem Hugenio $= \frac{1}{4}$ soll angegeben worden seyn, mag Anlass gegeben haben. Ich kann aber die legem progressionis dieser serici nicht einsehen: wenn 256 anstatt 216 stehen sollte, so würde ich glauben, dass von dieser serie

$$\frac{1}{8.1} + \frac{1}{8.\frac{4}{1}} + \frac{1}{8.\frac{4}{1}.\frac{6}{2}} + \frac{1}{8.\frac{4}{1}.\frac{6}{2}.\frac{8}{3}} + \text{etc.}$$

die Rede wäre, deren Summ $=$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{16.2} + \frac{1}{32.3} + \frac{1}{64.4} + \text{etc.} = \frac{1}{4}\, l\, 2$$

und folglich kleiner als $\frac{1}{4}$. Die übrigen summas, welche Ew. in diesen Blättern aufgezeichnet, habe ich bald demonstriren können. Die formula generalis

$$\frac{anxh^{x+1} - (anx + an)h^x}{m^2h^{2x+1} + mnxh^{x+1} + (mnx + mn)h^x + n^2x^2 + n^2x}$$

resolvirt sich in

$$\frac{\frac{an}{m}x}{mh^x + nx} - \frac{\frac{an}{m}(x+1)}{mh^{x+1} + n(x+1)}.$$

Wenn nun die series, so aus dem ersten Glied entspringt,

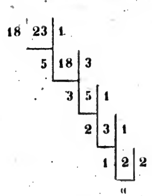
ist $A + B + C + D +$ etc., so gibt das andere Glied diese seriem $B + C + D +$ etc., folglich ist die summa $=$

$$A = \frac{an}{mmh + mn}.$$

Was Ew. in den folgenden Blättern von den imaginariis und negativis negativorum schon vor so vielen Jahren meditiret haben, ist der Wahrheit dergestalt gemäss, dass man dadurch alle Schwierigkeiten, welche über diese Materie gemacht zu werden pflegen, aus dem Grunde heben kann.

Euler.

P. S. Dass dato numero primo hujus formae $4n + 1$, allezeit eine Zahl von dieser Form $aa + 1$ gefunden werden könne, welche sich durch $4n + 1$ theilen lasse, ist deswegen gewiss, weilen der numerus primus $4n + 1$ allzeit eine summa duorum quadratorum ist. Denn wenn $4n + 1 = pp + qq$, so können immer solche Zahlen f und g gefunden werden, dass $gp - fq = \pm 1$, oder dass der Bruch $\frac{f}{g}$ dem Bruch $\frac{p}{q}$ so nahe kommt, dass wenn man einen von dem andern subtrahirt, im Zähler nur 1 überbleibt. Wenn nun solchergestalt der Bruch $\frac{f}{g}$ gefunden worden, so ist $a = fp + gq$, oder generaliter $a = (4n + 1)m \pm (fp + gq)$. Der Bruch $\frac{f}{g}$ kann aber allzeit durch meine Methode, die Brüche in kleinern Zahlen proxime auszudrücken, leicht gefunden werden. Als wenn $4n + 1 = 853$, so ist $4n + 1 = 18^2 + 23^2$ und folglich $\frac{p}{q} = \frac{23}{18}$. Nun stelle ich zwischen den Zahlen 23 und 18 die Operation an, welche zu Findung des maximi communis divisoris gebraucht wird, als



Diese quotos schreibe ich hinter einander und formire daraus folgende Brüche

$$\begin{matrix} 1, & 3, & 1, & 1, & 2 \\ \frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{4}{3}, & \frac{5}{4}, & \frac{9}{7} \end{matrix}$$

nehmlich ein jeder numerator oder denominator, mit der obgeschriebenen Zahl multiplicirt, gibt nebst dem vorhergehenden numerator oder denominator addirt, den folgenden numerator oder denominator. Also ist

$$9 = 1.5 + 4, \quad 7 = 1.4 + 3 \text{ etc.}$$

Der letzte Bruch $\frac{9}{7}$ kommt nun dem $\frac{23}{18}$ so nahe, dass die Differenz, $\frac{1}{7.18}$, durch einen Bruch exprimirt wird dessen Zähler $= 1$. Da also $\frac{p}{q} = \frac{23}{18}$, so ist $\frac{f}{g} = \frac{9}{7}$ und also

$$a = 9.23 + 7.18 = 333;$$

folglich $333^2 + 1$ divisibel durch 853.

Exempl. 2. Es sey $4n + 1 = 178481 = 391^2 + 160^2$, so operire ich also

160	391	2			
	71	160	2		
		18	71	3	
			17	18	1
				1	17 | 17

$$\begin{matrix} 2, & 2, & 3, & 1, & 17 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{2}, & \frac{17}{7}, & \frac{22}{9} & \ldots \frac{391}{160}. \end{matrix}$$

Daher ist $a = 22.391 + 9.160 = 10042$, welches die kleinste Zahl ist, deren Quadrat $+ 1$ theilbar ist durch 178481, denn

$$aa + 1 = 100841765 = 178481.565.$$

LETTRE LXXVI.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Recherches arithmétiques; suite.

Moscau d. 1 October 1744.

Ich lasse dahingestellt seyn, ob bey jetzigen Zeitläuften nicht indépendamment de toute attraction Newtonienne, trente raisons mögen gewesen seyn, wodurch man die Austheilung des Preises zu differiren genöthiget worden.

Mein voriger Brief wurde in solcher Eile geschrieben, dass ich gar vergessen zu melden, warum ich die eingeschlossenen Blätter beygefüget. Ich habe in vorigen Jahren von unterschiedenen Briefen, die es nicht werth gewesen, Copien behalten, wovon, als ich dieselben unlängst durchgeblättert, ein guter Theil cassiret worden; weil aber doch in den übersandten Blättern einige Anmerkungen über die numeros negativos waren, so sich wohl möchten behaupten

lassen, habe ich selbige Ew gleichsam vor die lange Weile communiciren wollen. Was sonsten von seriebus darinnen enthalten seyn mag, hat mir damals neu geschienen, und ist nunmehro von keiner Erheblichkeit.

Ew. Methode, die numeros $aa+1$, so durch den numerum primum $4n+1$ divisibiles sind, zu finden, gefället mir sehr; ich glaube kaum, dass ein anderer processus in diesem Falle möglich sey, und dass derselbe wohl Niemandem vor Ew. bekannt gewesen seyn mag.

Es ist mir unlängst bey der formula $emn..fm..gn$ Folgendes eingefallen: Innumerabiles sunt numeri, qui ad hanc formulam $10mn \pm (m+7n)$ redigi non possunt, ut 1, 3, 4, 6, 9, 10 etc., sed nulla potest dari formula generalis algebraica $a+bx+cxx+$ etc. (ubi x designet numerum integrum variabilem, a, b, c, etc. constantes) ita comparata, ut dici possit $10mn \pm (m+7n) = a+bx+cxx+$ etc. quemadmodum dici potest $4mn - m - n = xx$. Man könnte zwar sagen, dass auch mn für sich allein dieselbe Eigenschaft hat, es ist aber selbiges theils alsofort evident, theils gehöret mn nicht eigentlich zur formula $emn..fm..gn$, allwo durch e, f, et g numeri integri verstanden werden.

Ich möchte wohl wissen, ob Ew. den numerum e in dieser Proposition $A...emn - m - n = aa$, ausser dem casu, da e ein multiplus quaternarii ist, auf vielerley Art determiniren können? Dieses kann ich indessen demonstriren, dass die propositio A allezeit falsch ist, wenn e nicht diese Form hat $(4hk - h + 1)$, so dass h und k numeri integri affirmativi seyen; denn wenn e diese Form nicht hätte, so wäre A evidenter falsch in casu $n = 1$, und folglich nicht universaliter negans.

Als mir neulich ein Theil von den Mémoires de l'Académie p. l'année 1734 in 8° in die Hände gerathen, habe ich daselbst p. 268 s. des Hn. Clairaut solution de plusieurs problèmes etc. angetroffen. Die Solution, so er gibt, kann meines Erachtens nicht generalior erdacht werden, und was er von dem problème troisième sagt, scheinet mir auch sehr merkwürdig. Der Hr. Bouguer brauchet, vor das signum, so Ew. schreiben $\nless$, dieses $\geqq$, welches zwar nicht compendiös, aber sehr expressif ist.

Goldbach.

LETTRE LXXVII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Même sujet.

Berlin d. 17 November 1744.

— — — Dass Ew. meine Methode die numeros $aa+1$ zu finden, so durch den numerum primum $4N+1$ theilbar sind, einiger Attention gewürdiget, erfreuet mich sehr. Der Beweis davon ist dieser: Wenn $aa+bb$ divisores haben soll, so müssen die Buchstaben a und b also beschaffen seyn $a=mp+nq$ und $b=mq-np$; denn da wird $aa+bb=(mm+nn)(pp+qq)$, und folglich ist $aa+bb$ divisibel durch $pp+qq$. Da nun $4N+1$ immer auf die Form $pp+qq$ gebracht werden kann, so müssen solche Zahlen für m und n gefunden werden, damit $b=$ wird ± 1, oder $mq-np=\pm 1$. Wenn ich also aus der Aequalität $4N+1=pp+qq$ den Bruch $\frac{p}{q}$ formire, so muss ein anderer Bruch $\frac{m}{n}$ gesucht

werden dergestalt, dass wenn diese Brüche $\frac{m}{n} \times \frac{p}{q}$ per crucem multiplicirt werden, die producta mq und np nur unitate differiren; oder der Bruch $\frac{m}{n}$ muss in minoribus numeris dem Bruch $\frac{p}{q}$ proxime gleich seyn. Wenn ich nun mit den Zahlen p und q die Operation anstelle, welche man um den maximum communem divisorem davon zu finden, zu machen pflegt, und aus den quotis auf vorher beschriebene Art fractiones formire, so ist der letzte Bruch $= \frac{p}{q}$; und da in einer solchen Reihe Brüche, zwey neben einander stehende immer so beschaffen sind, dass die producta ex multiplicatione per crucem orta nur um 1 von einander differiren, so kann die fractio penultima für $\frac{m}{n}$ angenommen werden, da dann herauskommt $a = mp + nq$.

So viel ich mich erinnere, so sind mir die in den jungstens überschickten Briefen enthaltenen Begriffe von den numeris imaginariis sehr gründlich vorgekommen.

Wenn $emn + fm + gn = a + bx + cxx$, so würde auch $4cemn + 4cfm + 4cgn = 4ac + 4bcx + 4ccxx = 4ac - bb + (b + 2cx)^2$ und folglich würde $4cemn + 4cfm + 4cgn - 4ac + bb = \square$. Ob es nun möglich ist dergleichen Formuln zu finden? so kommt es darauf an, ob es solche Formuln gebe $emn \pm fm \pm gn \pm h$, welche immer ein Quadrat werden können. Ich habe aber auf dergleichen Formuln vorher nicht gedacht und daruber auch noch jetzt nichts entdecket, welches an Ew. uberschrieben zu werden verdiente.

Was die Formul $emn - m - n$ betrifft, so habe ich sehr weit hinaus alle Zahlen fur e gesucht, in welchen diese

Formul ein quadratum werden kann, und habe gefunden, dass für e alle Zahlen gesetzt werden können, ausser diesen: 4, 7, 8, 12, 15, 16, 20, 23, 24, 28, 31, 32, 36, 39, 40, 44, 47, 48, 52, 55, 56, 60, 63, 64, 68, 71, 72, — so weit bin ich mit meiner Untersuchung gekommen. Da nun in diesen Zahlen keine andere, als welche in diesen beyden formulis $4k$ und $8k-1$ enthalten sind, vorkommen, so däucht mich die Induction richtig zu seyn, wenn ich sage, dass sowohl diese Formul $4kmn-m-n$ als diese

$$(8k-1)mn-m-n$$

kein Quadrat werden könne. Ich habe noch, nicht nur keine von diesen beyden formulis falsch befunden, sondern wenn auch für e irgend eine andere Zahl ausser $4k$ und $8k-1$ angenommen wird, so habe ich noch immer die Formul $emn-m-n$ auf ein Quadrat bringen können.

Auf Ew. Veranlassung habe ich des Hn. Clairaut pièce in den Mémoires A. 1734 nachgelesen. Die Solution der beyden erstern ist die Newtonianische, und kann freylich nicht allgemein seyn. Das dritte problema ist in der That sehr merkwürdig. Die Solution ist aber so beschaffen, dass dieselbe auf keinen andern, als einen rechten Winkel applicirt werden kann, da doch der casus, wenn der angulus nicht rectus ist, eben so möglich ist. Ich habe mit dem Hn. Clairaut viel darüber correspondirt, wir haben aber beyde diesen letztern casum nicht ins Reine bringen können.

Euler.

LETTRE LXXVIII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Même sujet

St. Petersburg d. 26. Januar 1745.

Aus Ew. letztern Schreiben habe ich ersehen, dass Sie zu der aequatione $emn - m - n$ keine andere valores vor e, als die entweder multipli quaternarii, oder $= 8k - 1$ sind, gefunden haben; weil Sie sich aber hierin blos auf eine Induction beziehen, so habe hiebey anmerken wollen, dass, wenigstens ausser diesen beyden casibus, die propositio $emn - m - n = aa$ allezeit falsch ist und die quadrata, denen $emn - m - n$ gleich wird, sogar angegeben werden können, so oft entweder e oder $e - 1$ ein divisor von einem quadrato unitate aucto seyn kann. Denn in casu primo, ubi $be = cc + 1$, fiat $n = b + 1$, $m = b + bb$, erit

$$emn - m - n = eb(b+1)^2 - b(b+1) - (b+1) =$$
$$(eb-1)(b+1)^2 = cc(b+1)^2;$$

in casu secundo, wenn $e-1$ ein divisor ist von $aa+1$, ponatur $m=1$, $n=\frac{aa+1}{e-1}$. Igitur nullae aliae sunt formulae possibiles pro e in propositione $emn-m-n=aa$, nisi cum e est vel quaternarius (aut ejus multiplus quicunque), vel cum e est $=8k-1$; utrovis enim casu tam e quam $e-1$ nullo modo dividere possunt quadratum unitate auctum; hinc fit, ut quamvis $4k-1$ non possit dividere quadratum unitate auctum, tamen ad exprimendum valorem e in propositione $emn-m-n=aa$ ineptum sit, propterea quod $e-1=4k-2$ potest esse divisor quadrati unitate aucti, ex quibus sequitur praeter numeros in formulis $4k$ et $8k-1$ comprehensos, alios nullos posse substitui pro e, quoniam scilicet nulli alii hac gaudent proprietate, ut tam e, quam $e-1$ dividere nequeat quadratum unitate auctum, etsi non demonstratum sit omnes numeros hujus formae $8k-1$ pro e positos satisfacere, quod tamen verisimillimum arbitror, nec dubito quin aliqua ratione, quae mihi nunc non suppetit, demonstrari possit.

Auf meiner Rückreise von Moscau hieher ist mir eingefallen, dass vielleicht die propositio de numeris primis hujus formae $4n+1$, qui sunt summae duorum quadratorum, nur ein corollarium hujus theorematis seyn möchte: Omnes numeri hujus formae $4n+1$, qui dividi nequeunt per numerum hujus formae $4m \mp 1$, tot modis sunt summae duorum quadratorum, quot modis dispesci possunt in duos factores, ex. gr. 65 est numerus hujus formae $4n+1$, nec dividi potest per numerum ullum formae $4m-1$, ergo 65 tot modis est summa duor. quadr. quot modis dis-

pesci potest in duos factores, nempe duobus modis (1) 1.65, (2) 5.13, est igitur aggregatum duor. quadr. (1) 1 + 64, (2) 16 + 49.

Similiter 25 est numerus hujus formae $4n+1$ nec dividi potest per numerum hujus formae $4m-1$, igitur cum dupliciter resolvi possit in duos factores, nempe (1) in 1 et 25, (2) in 5 et 5, erit dupliciter summa duorum quadratorum (1) $0+25$, (2) $9+16$.

Similiter numerus 625 ejusdem naturae tripliciter resolvitur in duos factores (1) 1.625, (2) 5.125, (3) 25.25, ergo tripliciter est summa duor. quadr. (1) 0^2+25^2, (2) 7^2+24^2, (3) 15^2+20^2.

Numerus 493 ejusdem naturae duobus modis resolvi potest in duos factores (1) 1.493, (2) 17.29, ergo duobus modis est summa duor. quadr. (1) 3^2+22^2, (2) 13^2+18^2 etc.

Uebrigens habe ich zwey Methoden, wenn die aequatio $emq-q-m=aa$ in einem casu q possibilis ist, innumeros alios casus pro aequatione $emn-m-n=bb$ zu finden, nämlich si fiat

$$\text{I.}\quad q-2ak+(em-1)kk=n,$$

$$\text{II.}\quad ((em-1)h+1)^2q-hm((em-1)h+2)=n$$

ubi h et k sint numeri quicunque, modo n fiat integer, deren Wahrheit per ipsam substitutionem alsofort demonstriret wird.

Goldbach.

LETTRE LXXIX.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Suite des recherches arithmétiques. Problème de la courbe catoptrique. Equation différentielle à intégrer.

Berlin d. 16 Februar 1745.

— — Dass diese Formul $emn - m - n$ nimmer ein Quadrat seyn könne, wenn e entweder eine solche Zahl $4k$, oder eine solche $8k - 1$ ist, habe ich nur aus einer Induction geschlossen. Diese Observation erhält aber durch Ew. Entdeckung einen weit grössern Grad der Gewissheit. Denn dadurch wird unwidersprechlich dargethan, dass so oft entweder e oder $e - 1$ ein divisor ist von $cc + 1$, für m et n allezeit solche Zahlen gefunden werden können, dass $emn - m - n$ ein Quadrat wird. Weil nun weder $4k$ noch $8k - 1$ immer hierin Platz finden können, so kann auf diese Art weder für $e = 4k$, noch für $e = 8k - 1$ die Formul $emn - m - n$ zu einem Quadrat gebracht werden. Um

aber die Demonstration vollkommen zu machen, so müsste man auch die propositionem conversam beweisen können, dass so oft $emn - m - n$ ein Quadrat seyn kann, auch entweder e oder $e - 1$ ein divisor sey von einer solchen Zahl $cc + 1$. So lang also dieses nicht erwiesen ist, so lang kann man auch nicht behaupten, dass der obige Satz völlig bewiesen worden, ob man gleich daran gar keine Ursach zu zweifeln hat. Es gibt in der Arithmetik eine grosse Menge solcher Sätze, an welchen Niemand zweifelt, ungeacht man dieselben nicht demonstriren kann. Ich habe zum Ex. diesen Satz noch nirgend bewiesen gefunden: qui numerus in integris non est summa duorum quadratorum, eundem ne in fractis quidem esse posse summam duorum quadratorum. Um dieses zu beweisen, müsste man zeigen, dass, wenn ann einer summa duorum quadratorum gleich ist, auch allzeit a eine summa duorum integrorum quadratorum seyn müsse. Gleichergestalt ist leicht zu demonstriren, dass das Product ex binis summis duorum quadratorum, auch eine summa duorum quadratorum sey. Hieraus erhellet aber noch nicht, dass, wenn eine summa duorum quadratorum per summam duorum quadratorum dividirt wird, der quotus auch eine summa duorum quadratorum seyn müsse, woran doch Niemand zweifelt. Es ist auch meines Bedünkens noch nicht erwiesen, dass eine summa duorum quadratorum inter se primorum keine andere divisores haben könne, nisi qui sint ipsi duorum quadratorum summae. Eine gleiche Bewandniss hat es auch mit dieser Proposition: Omnem numerum primum hujus formae $4n + 1$ semper esse summam duorum quadratorum, idque unico modo. Wenn man nun dieses voraussetzt, so liessen sich Ew. theoremata leicht erweisen Denn, wenn $4n + 1$ keinen divisorem hat formae

$4m-1$, so mussen alle factores von dieser Form $4m+1$ und folglich summae duorum quadratorum seyn. Es ist aber generaliter $(aa+bb)(cc+dd)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ $=(ad+bc)^2+(ac-bd)^2$ und also duplici modo in duo quadrata resolubile. Hernach lässt sich auch leicht erweisen, quod, si quis numerus duplici modo in duo quadrata fuerit resolubilis, eum non esse primum. Sit enim $N=aa+bb$ $=cc+dd$, erit $N=\frac{((a-c)^2+(b-d)^2)((a+c)^2+(b-d)^2)}{4(b-d)^2}$. Ferner hat auch dieser Satz seine Richtigkeit: Si numerus $4n+1$ unico modo in duo quadrata resolvi possit, tum certo erit numerus primus; sin autem $4n+1$ nullo modo fuerit summa duorum quadratorum, tum non erit primus, sed factores habebit formae $4m-1$ vel duos, vel 4, vel 6, etc. At si $4n+1$ pluribus modis fuerit summa duorum quadratorum, tum quoque binos pluresve habebit factores formae $4m+1$. Und aus diesem Grunde ist nicht schwer, sehr grosse Zahlen $4n+1$ zu untersuchen, ob dieselben primi sind, oder nicht?

Gleich wie ich bewiesen habe, dass alle divisores primi hujus formae a^2+b^2 in dieser Expression $4n+1$ enthalten sind, also kann ich auch demonstriren, dass alle divisores von a^4+b^4 in dieser Form $8n+1$, und generaliter dass alle divisores von $a^{2^m}+b^{2^m}$ in dieser Form $2^{m+1}n+1$ enthalten sind. Folgende theoremata kann ich auch rigorose beweisen:

I. Si a^m-b^m fuerit divisibilis per numerum primum $2n+1$, atque p sit maximus communis divisor numerorum m et $2n$, tum quoque a^p-b^p per $2n+1$ divisibilis erit.

II. Si haec formula af^n-bg^n fuerit divisibilis per numerum primum $mn+1$, tum quoque a^m-b^m per $mn+1$

erit divisibile. Si ergo pro f et g ejusmodi numeros invenire liceat, ut $af^n - bg^n$ sit divisibile per $mn + 1$, tum formula $a^m - b^m$ necessario erit per $mn + 1$ divisibilis.

Ich bin letztens auf dieses problema gefallen: (Fig. 10) Circa datum punctum radians R curvam describere ejusmodi, ut singuli radii ex R egressi post duplicem reflexionem in M et N in ipsum punctum R revertantur. Es gibt ausser der Ellipse, alterum focum in R habente, noch unendlich viel andere Linien quaesito satisfacientes, sowohl algebraicae als transcendentes; und dieses problema däucht mich eines von den schwersten in hoc genere zu seyn.

Haec aequatio

$$ay\,dy + y\,dx\,(3ax + b) + dx\,(ax^3 + bxx + cx + f) = 0$$

potest separari et integrari.

Euler.

LETTRE LXXX.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Réponse aux deux derniers articles de la précédente.

St. Petersburg d. 29 Mai 1745.

Die integrationem aequationis

$$ay\,dy + y(3ax + b)\,dx + (ax^3 + bxx + cx + f)\,dx = 0$$

halte ich vor sehr leicht, indem ich alsofort gefunden $y = -xx + \beta x + \gamma$, ubi $aa\beta^3 + 2ab\beta\beta + (ac + bb)\beta + bc = af$ et $\gamma = \frac{-a\beta\beta \mp b\beta - c}{a}$.

Was das andere problema betrifft, so wird die curva nachfolgende proprietates haben:

1. muss (Fig. 11), posita $AB = x$, $BC = y$, $HA = a$, $AG = b$, y eine solche functio ipsius x seyn, dass positis $x = -a$ et $x = b$, $y = 0$ werde.

2. Weil die pars axis inter radium incidentem AC et radium reflexum CD intercepta, nehmlich AD per x et y

ope normalis CN bekannt wird, folglich posita $AD = u$, u per x et y data ist, so muss auch positis $AF = x'$, $FE = y'$, die inter radios AE et ED intercepta eadem pars axis AD per x' et y' gegeben seyn, durch welche Aequation y' eliminirt wird.

3. Fiat $\frac{CB}{y} : \frac{BD}{u-x} :: \frac{DF}{x'-u} : \frac{EF = y'}{\frac{(u-x)(x'-u)}{y}}$, wodurch x' eliminirt wird. Wenn endlich auch

4. die summa radiorum incidentis et reflexi usque ad axem entweder constans (wie in der ellipsi), oder certae cuidam functioni ipsius x gleich gesetzt wird, so kann dadurch auch y per x determiniret werden, wiewohl ich dieses alles jetzo nicht gnugsam einsehe und Ew. besseren Beurtheilung überlasse.

Goldbach.

LETTRE LXXXI.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Mêmes sujets.

Berlin d. 10 Juni 1746.

— — Da ein jegliches integrale, wenn es vollständig seyn soll, eine neue quantitatem constantem in sich enthalten muss, welche in dem differentiali nicht gewesen, so ist die formula $y = -xx + \beta x + \gamma$ nicht das vollständige integrale der Aequation

$$ay\,dy + y(3ax + b)\,dx + (ax^3 + bx^2 + cx + f)\,dx = 0.$$

Solches kann aber aus dem integrali particulari leicht gefunden werden, wenn man setzt $y = z - xx + \beta x + \gamma$.

Was das andere problema anlangt, welches jetzt in den Actis Lipsiensibus herauskommt, da die radii ex puncto dato emanantes post duplicem reflexionem in eben dasselbe Punct zurückkommen sollen, so hat das tentamen Ew. seine volle

Richtigkeit, und dienet, um die curvam infra axem constitutam zu finden, wenn die obere als bekannt angenommen wird. Die grösste Schwierigkeit aber beruhet darauf, dass beyde curvae eandem curvam continuam ausmachen, welcher Umstand von Ew. nicht in Betrachtung gezogen worden. Ich habe anfänglich die Solution auch auf eben diese Art tentirt, die formulae werden aber allzu weitläufig und verwirrt, als dass ich dieser letzten Bedingung hätte ein Genüge leisten können. Ich glaubte, dass die Annehmung einer Axe daran schuldig wäre, indem man wenig hinreichenden Grund hat, warum man vielmehr diese, als eine andere Linie für die Axe annehmen sollte. Daher habe ich diese Betrachtung völlig beiseit gesetzt und meine Solution folgendergestalt vorgenommen:

Lemma. Si (Fig. 12) ex foco C in curvam AM radii CM incidant, atque ex C in tangentem MP demittatur perpendiculum CP: vocatis $CM = y$, $CP = p$, erit longitudo radii reflexi $MO = \frac{pydy}{2ydp - pdy}$.

Problema. Circa datum punctum C describere curvam $AMmB$, ut radii ex C egressi post duplicem reflexionem in M et m in idem punctum C revertantur.

Solutio. Ad M et m ducantur tangentes MP, mp in easque ex C demittantur perpendicula CP, Cp. Vocentur $CM = y$, $CP = p$, $MP = q = \sqrt{(yy - pp)}$, item $Cm = Y$, $Cp = P$, $mp = -Q = -\sqrt{(YY - PP)}$. Sit MO radius reflexus, incidenti CM respondens, et mO radius reflexus, incidenti Cm respondens, erit per lemma: $MO = \frac{pydy}{2ydp - pdy}$ et $mO = \frac{PYdY}{2YdP - PdY}$ et $Mm = \frac{pydy}{2ydp - pdy} + \frac{PYdY}{2YdP - PdY}$. Bisecentur anguli CMm, CmM rectis ML, ml, quae erunt

normales ad curvam, ac propterea perpendiculis CP, Cp parallelae. Jam cum anguli MCP vel CML sit sinus $= \frac{q}{y}$, et cosinus $= \frac{p}{y}$, erit anguli dupli CMm sinus $= \frac{2pq}{yy}$, cosinus $= \frac{pp-qq}{yy} = \frac{2pp-yy}{yy}$, et anguli CmM sinus $= -\frac{2PQ}{YY}$ et cosinus $= \frac{PP-QQ}{YY} = \frac{2PP-YY}{YY}$. Ergo perpendiculum $CN = \frac{2pq}{y} = -\frac{2PQ}{Y}$ et $MN = \frac{2pp}{y} - y$ atque $mN = \frac{2PP}{Y} - Y$. Unde nascuntur hae duae aequationes:

I. $\frac{pq}{y} + \frac{PQ}{Y} = 0$ et II. $\frac{2pp}{y} - y + \frac{2PP}{Y} - Y = \frac{pydy}{2ydp-pdy} + \frac{PYdY}{2YdP-PdY}$ seu $\frac{pp}{y} + \frac{PP}{Y} = \frac{yydp}{2ydp-pdy} + \frac{YYdP}{2YdP-PdY}$.

Ad has aequationes simpliciores reddendas ex P et p in CM et Cm demittantur perpendicula PR et pr, et vocentur $CR = r$, $PR = s$, $Cr = R$ et $pr = -S$ quia in plagam oppositam vergit, eritque $r = \frac{pp}{y}$, $s = \frac{pq}{y}$, et ob $y = \frac{pp}{r}$ et $dy = \frac{2pdp}{r} - \frac{ppdr}{rr}$ erit $2ydp - pdy = \frac{p^3dr}{rr}$ ideoque $\frac{yydp}{2ydp-pdy} = \frac{pdp}{dr} = r + \frac{sds}{dr}$ ob $pp = rr + ss$. Simili modo erit $R = \frac{PP}{Y}$, $S = \frac{PQ}{Y}$, $\frac{YYdP}{2YdP-PdY} = \frac{PdP}{dR} = R + \frac{SdS}{dR}$.

Quibus valoribus substitutis binae aequationes solutionem continentes abeunt in has: I. $s + S = 0$,

II. $r + R = r + \frac{sds}{dr} + R + \frac{SdS}{dR}$, seu II. $\frac{sds}{dr} + \frac{SdS}{dR} = 0$.

Quodsi jam ponatur $s = t$ et $\frac{sds}{dr} = u$, erit $S = -t$ et $\frac{SdS}{dR} = -u$; quare, cum puncta M et m ad eandem curvam pertinere debeant, eandem relationem inter t et u atque inter $-t$ et $-u$ esse oportet; et quia s exprimitur per radicale $\sqrt{(pp-rr)}$, necesse est ut aequatio inter t et u ita sit comparata, ut

non mutetur sive t et u capiantur negative sive affirmative. Si itaque pro relatione inter t und u assumatur hujusmodi aequatio $\alpha tt + \beta uu = aa$, seu $aa = \alpha tt + \beta uu + \gamma t^4 + \delta t^2 u^2 + \varepsilon u^4$ etc. semper prodibit curva quaesito satisfaciens. Assumta autem hujusmodi idonea aequatione inter t et u, erit $s = t$ et $\frac{sds}{dr} = \frac{tdt}{dr} = u$, unde fit $r = \int \frac{tdt}{u}$, $p = \sqrt{(rr + ss)}$ et $y = r + \frac{ss}{r}$. Sicque obtinetur relatio inter quemvis radium CM et respondens perpendiculum in tangentem CP, ex qua relatione curva construi potest.

Si pro aequatione inter t et u assumatur $tt + uu = aa$, erit $udu = -tdt$ et $r = b - u$, existente $s = t = \sqrt{(aa - uu)}$, unde $p = \sqrt{(aa + bb - 2bu)}$ et $y = \frac{pp}{r} = \frac{aa + bb - 2bu}{b - u}$, seu ob $u = \frac{aa + bb - pp}{2b}$, erit $r = \frac{bb - aa + pp}{2b}$ et $y = \frac{2bpp}{bb - aa + pp}$ seu $pp = \frac{(bb - aa)y}{2b - y}$, quae aequatio praebet omnes ellipses, alterum focum in C habentes. Sumtis igitur aliis aequationibus inter t et u, supra descriptam indolem habentes, infinitae aliae curvae satisfacientes prodibunt, inter quas quoque curvae algebraicae reperientur, wie ich denn unter andern auch eine ordinis sexti gefunden habe.

Euler.

LETTRE LXXXII.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Considérations ultérieures sur la courbe catoptrique.

St. Petersburg d. .. Julii 1748.

Ich weiss nicht eigentlich, ob mir bey Abgang meines letztern Schreibens schon bekannt gewesen, dass Ew. das Directorium der mathematischen Classe in der Königl Akademie der Wissenschaften erhalten, in welchem Fall ich Deroselben (dieses relativum gehet sowohl auf Ew. als auf die Akademie selbst) schon damals, wie ich es jetzo thue, dazu hätte gratuliren sollen. Das Absterben Dero Hn. Vaters habe zu allererst aus dem letzten Briefe vernommen, und wie den Verlust, so Sie hiedurch erlitten, von Herzen bedaure, so wünsche hingegen, dass Ew. ein gleiches Alter bey guter Gesundheit und allem Vergnügen erreichen mögen.

Für die mir communicirte Solution danke ich dienstlich. Ich zweifle nicht, dass dieselbe so kurz sey, als nur mög-

lich; allein sie erfordert doch eine besondere Application, um alles recht einzusehen. Ohngeachtet nun zur Solution die consideratio unius puncti C (Fig. 13), aus welchem die radii ausgehen und wohin sie post duplicem reflexionem zurückkehren, genugsam ist, so halte ich doch davor, dass ausser diesem, noch ein anderes punctum in allen dergleichen curvis, in eadem a centro distantia zugegen seyn muss, welches eben dieselbe Proprietät als das punctum C haben wird; dahero, wenn das problema folgendergestalt concipirt würde: Datis diametris curvae AB et DE, invenire in axe AB punctum C, ex quo omnes radii etc., so möchte ich gern sehen, wie dergleichen curva non-ellipsis von einer ellipsi differiren würde, denn ich zweifle sehr, ob eine curva, deren vier quadrantes nicht similes et aequales sind (wie in der ellipsi) zur Solution geschickt seyn könne. Ist aber die curva solchergestalt beschaffen, so kann man die Probe, ob eine aequatio data satisfaciret, auch folgendermaassen, nach Ew. Anleitung anstellen: Sit radius quicunque ex puncto C in curvam incidens $CD = y$, radius a curva reflexus (in axem) $DF = y'$, radius ab axe reflexus (ita ut ang. CFD = ang. BFG) $FG = y''$, radius a curva reflexus $GC = y'''$. Requiritur ut spatium in axe interceptum CF inter y et y', item inter y'' et y''' sit idem.

Goldbach.

LETTRE LXXXIII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Recherches sur les séries *P. S.* Courbe catoptrique.

Berlin d. 7 August 1845.

— — Ich habe seit einiger Zeit mit dem Hn. Prof. Nicolao Bernoulli zu Basel eine kleine Dispute über die series divergentes, dergleichen diese ist

$$1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - \text{etc.}$$

gehabt, indem derselbe geläugnet, dass alle dergleichen series eine determinirte Summ haben, ich aber das Gegentheil behauptet, weilen ich glaube, dass eine jegliche series einen bestimmten Werth haben müsse. Um aber allen Schwierigkeiten, welche dagegen gemacht worden, zu begegnen, so sollte dieser Werth nicht mit dem Namen der Summ beleget werden, weil man mit diesem Wort gemeiniglich einen solchen Begriff zu verknüpfen pflegt, als wenn die

Summ durch eine würkliche Summirung herausgebracht würde: welche Idee bei den seriebus divergentibus nicht Statt findet. Da nun eine jegliche series aus der Evolution einer expressionis finitae entstehet, so habe ich diese neue Definition von der Summ einer jeglichen seriei gegeben:

Summa cujusque seriei est valor expressionis illius finitae, ex cujus evolutione illa series oritur.

Der Herr Bernoulli hat diese Definition vollkommen approbirt, zweifelt aber noch, ob nicht öfters eben dieselbe series divergens aus verschiedener expressionum finitarum evolutione entstehen könne, also dass man nach dieser Definition verschiedene Werthe zugeben müsste. Darüber hat er zwar kein Exempel gegeben, ich glaube aber gewiss zu seyn, dass nimmer eben dieselbe series aus der Evolution zweyer wirklich verschiedener expressionum finitarum entstehen könne. Und hieraus folget dann unstreitig, dass eine jegliche series, sowohl divergens als convergens, einen determinirten Werth oder summam haben müsse. Dahero, wenn die Summ dieser serici $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 +$ etc. gefunden werden soll, so muss man den valorem derjenigen Formul anzeigen, aus deren Evolution diese series entstehet. Um diese zu finden, so stelle man sich eine krumme Linie vor, deren abscissa $= x$ und applicata $= y = \frac{1}{1 - lx}$. Da nun $l0 = -\infty$ und $l1 = 0$, so wird diese curva eine solche Form haben (Fig. 14), und die area derselben $APM = \int y dx = \int \frac{dx}{1 - lx}$ wird $= xy - 1xy^2 + 2xy^3 - 6xy^4 + 24xy^5 -$ etc. Setzt man nun $AP = x = 1$, so wird auch $y = 1$, und die area APM wird seyn $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 +$ etc. dahero der Werth dieser seriei der areae APM gleich seyn muss, welche nicht nur determinirt, sondern auch, wie aus der

Figur erhellet, etwas grösser ist als $\frac{1}{2}$. Einen solchen Werth habe ich auch durch verschiedene Methoden, wodurch ich dieselbe series in convergentes verwandelt habe, herausgebracht. Anjetzo aber kann ich beweisen, dass diese series gleich sey dieser Expression

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{1+\cfrac{5}{1+\text{etc.}}}}}}}}}}}}$$

welche nicht nur stark convergirt, sondern auch limites continuo propiores angibt, intra quos valor contineatur. Denn wenn die summa seriei $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + \text{etc.}$ gesetzt wird $= s$, so ist $s < 1$; $s > \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$;

$$s < \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}} = \frac{2}{3};\quad s > \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+2}}} = \frac{4}{7} \text{ etc.}$$

Hieraus habe ich nun gefunden, dass proxime sey

$$s = 0{,}5963475922.$$

Es wäre also zu untersuchen ob dieser Werth nicht etwa durch die quadraturam circuli oder logarithmos angegeben werden könnte. Auf gleiche Weise kann ich auch diese seriem generalem

$s = 1 - ma + m(m+n)a^2 - m(m+n)(m+2n)a^3 + \text{etc.}$
summiren, denn es ist

$$s = \cfrac{1}{1 + \cfrac{ma}{1 + \cfrac{na}{1 + \cfrac{(m+n)a}{1 + \cfrac{2na}{1 + \cfrac{(m+2n)a}{1 + \cfrac{3na}{1 + \cfrac{(m+3n)a}{1 + \cfrac{4na}{\text{etc.}}}}}}}}}}$$

also ist $s < 1$; $s > \frac{1}{1+ma}$; $s < \frac{1+na}{1+(m+n)a}$;

$$s > \frac{1+(m+2n)a}{1+2(m+n)a+m(m+n)a^2} \text{ etc.}$$

Euler.

P. S. Meine vormals überschriebene Solution des problematis catoptrici habe seit der Zeit kürzer zusammengezogen und zum Gebrauch dergestalt eingerichtet, dass alle satisfacirende krumme Linien nicht nur leicht erkannt, sondern auch alle, welche algebraische sind, leicht angezeigt werden können. Ew. haben ganz Recht, dass alle diese Linien einen diameter nothwendig haben müssen, als *AB* (Fig. 15); es folget aber nicht, dass ausser diesen noch eine andere Linie, als *EE* die curvam in duas partes similes et aequales schneide. Um alle mögliche curvas zu finden und durch Generalformuln auszudrücken, so nehme man für v eine solche Function von u, welche verwandelt werde in $-v$, wenn für u gesetzt wird $-u$. Dergleichen Functionen sind u, u^3, u^5,

u^7, $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{u^3}$ etc. und so daraus zusammengesetzt werden, als $\alpha u + \beta u^3 + \frac{\gamma}{u} + \frac{\delta}{u^3}$ etc. Wenn nun für v eine solche functio ipsius u angenommen worden, so suche man $p = \frac{dv}{du}$, und daraus wird die curva folgendergestalt bestimmt werden. Man nehme die abscissam

$$CP = x = \frac{up^2(cc-uu)}{c(a+v)} - \frac{2p(cc-uu)}{c} - \frac{u(a+v)}{c},$$

so wird die applicata

$$PM = y = \pm\left(\frac{pp(cc-uu)}{c(a+v)} + \frac{2up}{c} - \frac{a-v}{c}\right)\sqrt{(cc-uu)}.$$

Setzt man nun $v = u$, so kommt die ellipsis heraus, deren focus in C. Denn da $v = u$, so wird $p = \frac{dv}{du} = 1$ und $x = -\frac{(aa+cc)u-2acc}{c(a+u)}$ und $y = \frac{(cc-aa)\sqrt{(cc-uu)}}{c(a+u)}$. Wenn man nun u eliminirt, so bekommt man

$$aa(xx+yy) = (aa-cc-cx)^2.$$

Setzt man aber $v = \frac{cc}{u}$ und $c = a$, so wird $p = \frac{dv}{du} = -\frac{cc}{uu}$ und folglich

$$x = \frac{3a^3 - a^2u - 3auu - u^3}{uu}$$

und

$$y = \frac{a^3 - a^2u - 3auu - u^3}{u^3}\sqrt{(aa-uu)},$$

woraus sich die Figur der krummen Linie leicht bestimmen lässt. Wollte man aber u eliminiren und eine Aequation zwischen x und y suchen, so würde dieselbe, wofern sich nichts destruirt, auf 12 Dimensionen steigen.

Uebrigens ist bey den vorgegebenen Generalformuln zu merken, dass daraus die Länge des radii

$$CM = \frac{pp(cc-uu)}{a+v} + a + v,$$

wodurch die Construction nicht wenig erleichtert wird. Wenn ferner auf diese Art das punctum primae reflexionis M bestimmt wird, so darf man nur, um das punctum alterius reflexionis N zu finden, setzen $u = -u$, da denn v in $-v$ verwandelt wird, p aber den vorigen Werth behält. Es wird nehmlich: $CQ = -\frac{upp(cc-uu)}{c(a-v)} - \frac{2p(cc-uu)}{c} + \frac{u(a-v)}{c}$ und

$$QN = \pm\left(\frac{pp(cc-uu)}{c(a-v)} - \frac{2up}{c} - \frac{u+v}{c}\right)\sqrt{(cc-uu)};$$

$$CN = \frac{pp(cc-uu)}{a-v} + a - v.$$

LETTRE LXXXIV.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Mêmes sujets. Réponse a la précédente. Méthode de transformer toutes sortes de séries divergentes en convergentes.

Sans date (St. Petersburg d. 25. Sept. 1745.)

Wenn ich (Fig. 16) das spatium, quod inter radium incidentem et reflexum in diametro intercipitur, CR, nach Ew. formulis exprimire, so wird selbiges in der ellipsi constans seyn, in den andern curvis aber jederzeit solche limites haben, dass wenn CO die abscissa respondens applicatae maximae OE ist, das spatium interceptum $CR = 2CO$ zwischen diesen limitibus begriffen sey. Es lässet sich zwar dieses spatium interceptum durch die Aequation

$$CR = \frac{CP.NQ + MP.CQ}{MP + NQ}$$

generaliter leicht bestimmen, aber in der Application auf Ew. formulas scheinet sie mir etwas weitläufig zu werden.

In demjenigen, was Ew. von den seriebus divergentibus schreiben, bin ich völlig Dero Meinung. So viel ich mich erinnere, sind dergleichen series von einigen mathematicis darum verworfen worden, weil sie aus einer divisione praepostera entstehen; allein zu geschweigen, dass man selbige nach Belieben ohne einige Division formiren kann, so lassen sich auch die summae auf unterschiedene Arten finden, wenn man diese series terminorum signis alternantium in series terminorum mere affirmativorum verwandelt. Ich erinnere mich nicht, ob etwa schon in den Comment. Petrop. einer Methode Erwähnung geschehen, die in Folgendem bestehet: Datae seriei $A \ldots \alpha - \beta + \gamma - \delta +$ etc. singuli termini fiant aequales singulis terminis seriei

$B \ldots a - \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1.3}{2.4}(c-2b+a) - \frac{1.3.5}{2.4.6}(d-3c+3b-a) +$ etc.,

hoc est $a = \alpha$, $b = \alpha + 2\beta$, $c = \frac{3\alpha + 12\beta + 8\gamma}{1.3}$, etc. erit series A aequalis termino, qui respondet exponenti $\frac{1}{2}$ in serie $C \ldots a + b + c + d +$ etc. Sumantur termini reciproci seriei C et fiat series $D \cdots \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} +$ etc. erit terminus respondens exponenti $\frac{1}{2}$ in serie D aequalis seriei

$$E \cdots \frac{1}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{c} - \frac{2}{b} + \frac{1}{a}\right)$$
$$- \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{1}{d} - \frac{3}{c} + \frac{3}{b} - \frac{1}{a}\right) + \text{etc.}$$

Quodsi jam summa seriei E ponatur $= p$, dico summam seriei A esse $= \frac{1}{p}$, unde sequitur summam seriei

$2 - 6 + 24 - 120 +$ etc. esse $= 1 : \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{14} + \frac{29}{210} + \text{etc.}\right)$.

Es ist aber auch die series $2 - 6 + 24 - 120 +$ etc. gleich dieser $1 - 2 + 9 - 48 + 300 - 2160 +$ etc., in welcher alle termini, affirmative considerati, diese legem pro-

gressionis haben: Sit exponens terminorum $n-2$, terminus illi exponenti respondens A, summa omnium terminorum usque ad terminum A exclusive $= S$, erit terminus sequens $B = nA + S$. Si v. gr. dato termino tertio $= 9$, quaeratur quartus, erit exponens termini dati $n-2=3$, $n=5$, et summa omnium terminorum praecedentium $1+2=3=S$, ergo terminus quartus $= nA + S = 5.9 + 3 = 48$. Die summa dieser seriei aber wird nach voriger Methode also exprimiret $1:(1+\frac{2}{3}+\frac{13}{55}+$ etc.), allwo die ersten drey termini des numeratoris viel weiter gehen, als in der vorher angegebenen summa, ohngeachtet beyde summae einander gleich seyn müssen.

Goldbach.

LETTRE LXXXV.

Euler à Goldbach

Sommaire. Tables astronomiques pour le soleil et la lune. Réponse a la lettre précédente.

Berlin d. 28. October 1745.

Ew. hatten vergessen in Dero letztem Schreiben das Datum beyzusetzen, daher ich eigentlich nicht weiss, wie lang ich dasselbe unbeantwortet gelassen, denn da ich anjetzo endlich neue tabulas astronomicas pro Sole et Luna zu Stande gebracht, so habe ich seit einiger Zeit so viel mit Rechnungen zu thun gehabt, dass ich an kein Briefschreiben gedenken konnte. Nunmehro bin ich zwar fertig, allein wenn ich der Herren Pariser Astronomen Gutachten und observationes darüber werde erhalten haben, so dürfte darin noch hin und wieder etwas zu ändern vorfallen.

Aus meinen formulis für die curvas, quae radios e foco emissos eodem reflectant, wird das spatium CR (Fig. 16)

sehr leicht und kurz ausgedrückt, ungeacht der calculus, um solches zu finden, wie Ew. angemerket haben, ziemlich weitläufig wird. Denn, wenn v eine solche Function von u andeutet, quae posito $-u$ loco $+u$ ipsa in sui negativam $-v$ abeat, so ist

$$CP = \frac{u(a+v)}{c} + \frac{2dv(cc-uu)}{cdu} - \frac{udv^2(cc-uu)}{cdu^2(a+v)};$$

$$PM = \left(\frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a+v)} + \frac{2udv}{du} - a - v\right)\frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c}$$

und fur das punctum N

$$CQ = -\frac{u(a-v)}{c} + \frac{2dv(cc-uu)}{cdu} + \frac{udv^2(cc-uu)}{cdu^2(a-v)};$$

$$QN = \left(\frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a-v)} - \frac{2udv}{du} - a + v\right)\frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c}.$$

Wenn man nun diese expressiones in aequatione

$$CR = \frac{CP.NQ + MP.CQ}{MP+NQ}$$

substituirt, so findet man $CR = \frac{2cdv}{du}$, woraus erhellet, dass dieses spatium in keinem andern Fall constans sey, als wenn $v = \alpha u$, woraus die ellipsis entspringt. Wo aber die applicata maxima sey, lässt sich generaliter nicht bestimmen, noch zwischen dem Ort derselben und dem spatio CR ein Verhältniss entdecken.

Ew. höchst sinnreiche Methode alle series divergentes in convergentes zu verwandeln, indem Dieselben demonstrirt, dass, wenn

$$s = a + n(b-a) + \frac{n(n-1)}{1.2}(c-2b+a)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(d-3c+3b-a) + \text{etc.},$$

so sey

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{a} + n\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{1}{c}-\frac{2}{b}+\frac{1}{a}\right)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{1}{d}-\frac{3}{c}+\frac{3}{b}-\frac{1}{a}\right) + \text{etc.}$$

ist mir sehr wohl bekannt gewesen, und dieselbe weiset freylich ganz klar, dass keine series so divergens seyn könnte, deren summa nicht immer durch eine seriem convergentem ausgedrückt werden könne. Diejenigen aber, welche die divisionem praeposteram nicht zulassen wollen, werden hier ebenfalls Einwendungen machen, dass man supponire, man komme zuletzt auf differentias constantes oder evanescentes; allein alle dergleichen Einwürfe werden durch meine obgemeldte definitionem summae cujusque seriei leicht gehoben. Fur die seriem $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 +$ etc. findet man auch auf diese Art bald den valorem prope verum. Ich glaube aber, dass es sehr schwer seyn würde, auf diese Art den valorem summae nur auf $\frac{1}{1000}$ genau zu bestimmen; denn, ungeacht anfänglich die termini seriei conversae affirmativi werden, so kommen doch auch bald negativi zum Vorschein, und alsdann nehmen auch die termini nicht mehr merklich ab. Auf die von mir letzt überschriebene Art aber hat man die Approximation in seiner Gewalt und kann die Summ in Decimal-Fractionen so weit genau finden als man will.

Euler.

LETTRE LXXXVI.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Courbe catoptrique. Spéculation sur les nombres π et $\sqrt{2}$ Nouvelle série.

St. Petersburg d. 9 Nov. 1745

Aus dem spatio CR (Fig. 16), so Sie $=\frac{2cdv}{du}$ gefunden, lässt sich die applicata maxima ohne Schwierigkeit bestimmen, wenn man setzet $CP=\frac{CR}{2}$ und den valorem u, per a et c expressum, in der formula PM substituiret, wobey denn merkwürdig ist, dass die quantitas u, wenn das differentiale ipsius $PM=0$ gesetzet wird, denselben valorem haben muss, den es ex aequatione $CP=\frac{CR}{2}$ bekömmt. Ingleichen, wenn man den radium MR suchen wollte, welcher perpendiculariter ad axem reflectiret wird, so musste (weil alsdann die puncta P, Q et R in eines zusammenfallen) die quantitas u in diesen dreyen aequationibus $CP=CR$, $PM=QN$ und $CP=$

CQ einerley valorem haben. In dem casu, wo $v = u^3$, finde ich aus der aequatione $PM = \frac{CR}{2}$, $2u^3 - 3ccu - a = 0$, und in demselben casu, wenn $v = u^3$, finde ich, pro radio perpendiculariter ad axem reflexo, aus der aequatione $CP = CR$, $u = \left(\frac{a+3c}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, welcher valor von u dann auch aus den andern beyden aequationibus $PM = QN$ und $CP = CQ$ herauskommen muss; so ich aber lieber glauben, als mich durch die Erfahrung davon convinciren will. Ich werde auch von diesem genere curvarum einen bessern Begriff bekommen, wenn Ew. mir melden wollen, durch was für Linien die quantitates constantes a et c item die variabilis u, seorsim consideratae, in der curva exprimiret werden; indessen kann ich beweisen, dass die curva in allen Fällen contradictoria wird, wo v eine solche functionem ipsius u andeutet, dass $\frac{dv}{a+v}$ grösser wird, als $\frac{du}{c+u}$.

Weil kein Zweifel ist, dass in dem numero $\frac{31415\ldots}{10000\ldots}$, so die circumferentiam circuli data diametro 1 exprimiret, eine jede von den Ziffern des numeratoris ihre Plätze nach einer gewissen, obwohl sehr schweren und undeutlichen Ordnung einnimmt, und ein grosser Theil dieser Schwierigkeit aus der Abwechselung von zehnerley Ziffern entstehet, so könnte man wenigstens diese letztere sehr erleichtern, wenn man setzte circumferentia =

$$m + \frac{a}{10} + \frac{b}{100} + \frac{c}{1000} + \frac{d}{10000} + \text{etc.},$$

allwo m pro lubitu so angenommen werden kann, dass circumf. $- m < \frac{1}{9}$, hernach aber ein jeder von den numeratoribus a, b, c, etc. entweder 0 oder 1 würde, welches

allezeit möglich ist. Wenn nun solchergestalt die series, deren numeratores alle entweder 0 oder 1 sind, auf eine gewisse Anzahl von terminis continuiret werden, so stunde zu versuchen, ob sich nicht unter diesen 0 und 1 eine gewisse Ordnung zeigen möchte? Dass ein ordo numerorum circulantium herauskommen sollte, ist zwar nicht zu vermuthen, weil sonst der ganze numerus rationalis seyn müsste; es kann aber nichts desto weniger progressiones non circulantes geben, die eine offenbare Ordnung halten, als

$$0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + \text{etc.}$$

und unzählige andere. Wenn nun, in praesenti casu ein ordo certa lege variabilis entdecket würde, so glaubte ich, dass die quadratura circuli in numeris decimalibus noch viel näher gefunden wäre, als es nach der gewöhnlichen extractione radicis möglich ist $\sqrt{2}$ zu finden. Man könnte auch $\sqrt{2}$ so exprimiren $\frac{a}{1} + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} + \frac{d}{8} + \text{etc.}$, dass a, b, c, etc. allezeit 0 oder 1 würden, und hier sollte ich fast glauben, dass sich bald eine Ordnung zeigen möchte.

Nachfolgende series scheinet einige Attention zu meritiren

$$\frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{1.2.3.4.5.2^2} \cdot \frac{1}{6} \pi^4 + \frac{1}{1.2\ldots6.7.2^4} \cdot \frac{1}{6} \pi^6 + \frac{1}{1.2\ldots8.9.2^6} \cdot \frac{5}{6} \pi^8 + \frac{1}{1.2\ldots10.11.2^8} \cdot \frac{691}{210} \pi^{10} + \text{etc.} = 4 - \pi.$$

Goldbach.

LETTRE LXXXVII.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Réponse à la précédente.

Berlin d. 30 November 1745.

— — Ueber das problema catoptricum nehme die Freyheit Ew. meine Solution hiemit zu übersenden, deren analysis alle Umstände hinlänglich erläutern wird*). — Ew. Vorschlag, die Expression 3,1415926535 etc. auf eine bequeme Art vorzustellen, dass daraus zugleich die lex progressionis erhelle, läuft darauf hinaus, dass man eine bekannte Zahl m ausfindig machen soll, deren Cyphern in infinitum mit den obigen entweder einerley oder nur um 1 kleiner wären, denn solchergestalt würde der Rest $\pi - m$ durch eine solche Decimal-Fraction ausgedrückt werden, deren alle Figuren entweder 0 oder 1 seyn würden. Ich sehe aber noch keine Methode ein, wie man nur zur Erfindung der ge-

*) Voir ci-dessous.

meldten Zahl m gelangen könnte. Ich wollte also vielmehr die Differenz $\pi - m$ als bekannt annehmen, als z. Exempel $\pi - m = 0{,}01001000100001$ etc. so würde

$$m = 3{,}13158265258978,$$

und nun müsste man sehen, ob diese Zahl durch eine expressionem irrationalem finitam ausgedrückt werden könnte.

Ich erinnere mich auch schon einmal einer gewissen leichten Operation Meldung gethan zu haben, wodurch man Zahlen bekommt, deren Werth vielleicht nullo modo in finitis ausgedrückt werden kann. Ich verfahre nehmlich wie in der ordinären Division, nur dass ich bey jeder Operation den divisorem um 1 vermehre, wie aus folgendem Exempel zu ersehen:

1|10000000000000000000|0464782743907639
2|10
3|20
4|20
5|40
6|50
7|20
8|60
9|40
10|40
11|100
12|10
13|100
14|90
15|60
16|150
etc.

Wenn nun diese Zahl 0,464782743907639 etc. zur Peripherie des Zirkuls eine bekannte Verhältniss hätte, so hielte ich die Peripherie so gut als gefunden, indem dieselbe mit leichter Mühe auf so viel Figuren, als man immer verlangt, gefunden werden könnte. Man kann auch hierin auf unendlich vielerley Weise variiren und die divisores nach Belieben verändern.

Nach der arithmetica dyadica wird $\sqrt{2}$ folgendergestalt ausgedrückt gefunden $\sqrt{2} = 1{,}41421356236$, so operire man continuo duplando hinter der Verticallinie folgendergestalt:

1	41421356236
0	82842712472
1	65685424944
1	31370849888
0	62741699776
1	25483399552
0	50966799104
1	01933598208
0	03867196416
0	07734392832
0	15468785664

Die vor der Verticallinie herausgekommenen Zahlen 0 et 1 geben die gesuchte fractionem dyadicam, nehmlich

$$\sqrt{2} = 1{,}0110101000001001111001100110011111001,$$

worin sich aber keine lex wahrnehmen lässt.

Die von Ew. überschriebene series ist allerdings sehr merkwürdig. Dieselbe kann folgendergestalt generaler aus-

gedrückt werden: Es sey die tangens dieses Winkels $\frac{1}{n}\,90^\circ = t$, so wird

$$1 - \frac{\pi}{2nt} = \frac{1}{1.2.3n^2}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{1.2\ldots5n^4}\cdot\frac{1}{6}\pi^4 + \frac{1}{1.2\ldots7n^6}\cdot\frac{1}{6}\pi^6 + \frac{1}{1.2\ldots9n^8}\cdot\frac{3}{10}\pi^8 + \text{etc.}$$

Setzt man nun $n = 2$, so kommt Ew. series heraus.

Euler.

(Mémoire annexé à cette lettre.)

Solutio problematis in Actis Lipsiensibus

A. 1745 *propositi.*

Circa datum focum C (Fig. 17) describere curvam $AEBF$, ut omnes radii ex C emissi post binas reflexiones in M et N factas, in ipsum punctum C revertantur.

I. *Lemma* 1. Determinare legem reflexionis, quam radii ex puncto C (Fig. 18) emissi ad curvam quamcunque EMm patiuntur.

Solutio. Consideretur radius incidens quicunque CM, et ducatur ad curvae punctum M tangens MT, in quam ex C perpendiculum demittatur CT, cui parallela MR erit normalis ad curvam. Sumto igitur angulo $RMO = CMR$, erit recta MO radius reflexus. Ponatur $CM = z$ et angulus $CMT = \varphi$, erit (posito sinu toto $= 1$) $CT = z \sin\varphi$ et $MT = z\cos\varphi$. Ac demisso ex T in CM perpendiculo TS, ob ang. $CTS = CMT = \varphi$ erit $CS = z\sin^2\varphi$ et $TS = z\sin\varphi\cos\varphi$. Jam ducatur radius proximus $Cm = z + dz$,

eique conveniens reflexus mOo priorem radium reflexum MO secans in O, erit O punctum in caustica. Centro C describatur arculus MN, et cum in triangulo MNm ad N rectangulo sit $mN = dz$, et angulus $MmN = \varphi$, erit $mN = dz = Mm\cos\varphi$, ideoque $Mm = \frac{dz}{\cos\varphi}$ et $MN = \frac{dz\sin\varphi}{\cos\varphi}$, unde fit angulus $MCm = \frac{dz\sin\varphi}{z\cos\varphi}$. In puncto m ducatur pariter tangens mt ad eamque normalis mR, erit angulus $Cmt = \varphi + d\varphi$; at est $CmT = CMT - MCm = \varphi - \frac{dz\sin\varphi}{z\cos\varphi}$, unde fit $Tmt = MRm = d\varphi + \frac{dz\sin}{z\cos\varphi}$. Porro est $RMO = CMR = 90^\circ - \varphi$ et $RmO = 90^\circ - \varphi - d\varphi$. Quare ob $Mvm = RMO + MRm = RMO + MOm$, fiet $MOm =$
$RMO + MRm - RmO = 90^\circ - \varphi + d\varphi + \frac{dz\sin\varphi}{z\cos\varphi} - 90^\circ + \varphi + d\varphi$, seu $MOm = 2d\varphi + \frac{dz\sin\varphi}{z\cos\varphi}$. Centro O describatur arculus mn, et cum sint triangula MNm et mnM ob angulos ad N et n rectos, et $mMn = MmN$ aequalia et similia, erit $Mn = mN = dz$ et $mn = MN = \frac{dz\sin\varphi}{\cos\varphi}$. Unde habebitur quoque ang. $MOm = \frac{mn}{mO} = 2d\varphi + \frac{dz\sin\varphi}{z\cos\varphi}$, ex quo erit

$$mO = \frac{mn . z\cos\varphi}{2zd\varphi\cos\varphi + dz\sin\varphi} = \frac{zdz\sin\varphi}{2zd\varphi\cos\varphi + dz\sin\varphi}.$$

Sicque ob $mO = MO$ habemus radium reflexum

$$MO = \frac{zdz\sin\varphi}{2zd\varphi\cos\varphi + dz\sin\varphi}. \text{ Q. E. I.}$$

II. *Coroll.* 1. Cum sit angulus

$$MOm = 2d\varphi + \frac{dz\sin\varphi}{z\cos\varphi} = \frac{2zd\varphi\cos\varphi + dz\sin\varphi}{z\cos\varphi}$$

erit $MOm = \frac{2zd\varphi\sin\varphi\cos\varphi + dz\sin^2\varphi}{z\sin\varphi\cos\varphi}$. At hujus fractionis nu-

merator est differentiale ipsius $z \sin^2 \varphi = CS$, unde ob $z \sin \varphi \cos \varphi = TS$, erit angulus $MOm = \frac{d.CS}{TS}$.

III. *Coroll.* 2. Quodsi ergo vocemus $CS = r$ et $TS = s$, erit angulus $MOm = \frac{dr}{s}$. Tum vero erit $CT = \sqrt{(rr + ss)}$, $MT = \frac{s}{r}\sqrt{(rr + ss)}$ et $CM = z = \frac{rr + ss}{r}$, unde $dz = dr + \frac{2sds}{r} - \frac{ssdr}{rr}$. Hinc ob $\sin \varphi = \frac{r}{\sqrt{(rr+ss)}}$ et $\cos \varphi = \frac{s}{\sqrt{(rr+ss)}}$, erit $mn = \frac{dz \sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{rdr}{s} + 2ds - \frac{sdr}{r}$, atque $MO = \frac{mn}{MOm} = r + \frac{2sds}{dr} - \frac{ss}{r} = \frac{2sds}{dr} + \frac{rr - ss}{r}$.

IV. *Coroll.* 3. Ponatur radius reflexus $MO = w$, erit proximus $mo = w + dw$, et particula Oo erit elementum curvae causticae. Est vero $Oo = mo - nO = mo - MO + Mn = mo - MO + mN = dw + dz$, ideoque longitudo curvae causticae erit $= w + z \pm C = CM + MO \pm C$, uti constat.

V. *Coroll.* 4. Retentis autem denominatoribus $CS = r$ et $TS = s$, quarum relatione natura curvae EM definitur, erit $\sin MCT = \frac{s}{\sqrt{(rr + ss)}}$ et $\cos MCT = \frac{r}{\sqrt{(rr + ss)}}$. Quoniam vero est $CMO = 2\,CMR = 2\,MCT$, erit $\sin CMO = \frac{2rs}{rr + ss}$ et $\cos CMO = \frac{rr - ss}{rr + ss}$. Unde cum in triangulo CMO dentur latera CM et MO cum angulo intercepto CMO; tertium latus CO ejusque positio determinabitur.

VI. *Lemma* 2. Invenire relationem inter bina curvae quaesitae puncta M et m (Fig. 19) ad quae radius ex C reflexus eodem revertitur.

Solutio. Emittatur ex C radius CM, qui post primam reflexionem in m, hincque secunda reflexione iterum in C reflectatur. Manifestum est ejusmodi proprietatem reciprocam inter puncta M et m intercedere, ut radius quoque secundum directionem Cm emissus post binas reflexiones in m et M factas in C revertatur. Ducantur ergo ad M et m tangentes MT et mt, in quas ex C demittantur perpendicula CT et Ct, atque ex T et t porro perpendiculares TS et ts in radios CM et Cm. Jam ponatur ut ante $CS = r$, $TS = s$, atque $Cs = R$ et $ts = -S$, quia haec linea in partem oppositam cadit. Sitque O punctum in caustica. Erit ex ante inventis

$CT = \sqrt{(rr + ss)}$, $MT = \frac{s}{r}\sqrt{(rr + ss)}$ et $CM = \frac{rr+ss}{r}$

$\sin CMO = \frac{2rs}{rr+ss}$, $\cos CMO = \frac{rr-ss}{rr+ss}$

$MO = \frac{2sds}{dr} + \frac{rr-ss}{r}$

$Ct = \sqrt{(RR + SS)}$, $mt = -\frac{S}{R}\sqrt{(RR+SS)}$ et $Cm = \frac{RR+SS}{R}$

$\sin CmO = \frac{2RS}{RR+SS}$, $\cos CmO = \frac{RR-SS}{RR+SS}$

$mO = \frac{2SdS}{dR} + \frac{RR-SS}{R}$.

Ex C in Mm demittatur perpendiculum CV, eritque

$CV = 2s$, $MV = \frac{rr-ss}{r}$

$OV = MV - MO = -\frac{2sds}{dr}$

$CO = \frac{2s\sqrt{(dr^2+ds^2)}}{dr}$

$\operatorname{tang} COM = \frac{dr}{ds}$

$CV = -2S$, $mV = \frac{RR-SS}{R}$

$OV = mO - mV = \frac{2SdS}{dR}$

$CO = -\frac{2S\sqrt{(dR^2+dS^2)}}{dR}$,

$\operatorname{tang} COm = -\frac{dR}{dS}$.

Ex quibus colligitur fore $CV = 2s = -2S$, ideoque $S = -s$,

seu $ts = TS$ Deinde $OV = \frac{-2sds}{dr} = \frac{2SdS}{dR}$, ergo, ob $S = -s$ et $dS = -ds$, fit $-\frac{1}{dr} = \frac{1}{dR}$ atque $dR + dr = 0$, unde integrando oritur $R + r = 2a$; ita ut si ponatur $r = a + v$, fiat $R = a - v$. Cum igitur ex puncto M reperiatur punctum ipsi ex reflexione respondens m, si valor ipsius $TS = s$ statuatur negativus, hocque facto valor lineae $CS = r = a + v$ abeat in $Cs = R = a - v$, manifestum est quantitatem v ejusmodi fore functionem ipsius s, quae facto s negativo ipsa in sui negativam abeat, cujusmodi functiones equidem impares appellare soleo, quia potestates imparium exponentium ipsius s hac proprietate gaudent. Si igitur sumatur v hujusmodi functio impar ipsius s quaecunque, statuaturque $TS = s$ et $CS = a + v$, habebitur curva conditioni problematis satisfaciens. Q. E. I.

VII. *Coroll.* 1. Omnes igitur curvae problemati satisfacientes ita erunt comparatae, ut sumta pro v functione quacunque impari ipsius s, sit $TS = s$, $CS = a + v$, $CT = \sqrt{(ss + (a + v)^2)}$, $MT = \frac{s\sqrt{(ss + (a+v)^2)}}{a + v}$, $CM = a + v + \frac{ss}{a + v}$.

VIII. *Coroll.* 2. Positio autem radii reflexi Mm ita definietur ut sit $\sin CMO = \frac{2(a+v)s}{ss + (a+v)^2}$, $\cos CMO = \frac{(a+v)^2 - ss}{(a+v)^2 + ss}$, $MO = \frac{2sds}{dv} + a + v - \frac{ss}{a+v}$, ubi O est punctum in caustica, unde longitudo curvae causticae erit $= CM + MO \pm C$ $= 2(a + v) + \frac{2sds}{dv} \pm C$.

IX. *Coroll.* 3. Si porro ex C in radium reflexum Mm demittatur perpendiculum CV, erit $CV = 2s$, $MV = a + v - \frac{ss}{a+v}$, $OV = \frac{-2sds}{dv}$, $CO = \frac{2s\sqrt{(dv^2 + ds^2)}}{dv}$ et $\tang COM = \frac{dv}{ds}$.

X. *Coroll.* 4. Pro altero autem reflexionis puncto m erit $ts = -s$, $Cs = a - v$, $Ct = \sqrt{(ss + (a-v)^2)}$, $mt = \frac{-s\sqrt{(ss+(a-v)^2)}}{a-v}$ et $Cm = a - v + \frac{ss}{a-v}$, atque

$$mO = \frac{-2sds}{dv} + a - v - \frac{ss}{a-v},$$

unde fit radius reflexus totus $Mm = 2a - \frac{2ass}{aa-vv}$.

XI. *Problema.* Dato puncto C invenire omnes curvas AMB ita comparatas, ut radii ex C emissi post duplicem reflexionem in idem punctum C reflectantur.

Solutio. Consideretur radius quicunque CM (Fig. 20) ductaque tangente MT et ut ante rectis CT et TS, vocetur $TS = s$ et $CS = a + v$, habebiturque curva satisfaciens dummodo pro v capiatur functio impar ipsius s. In radio ergo reflexo $M(M)$, qui causticam in O tangat, erit

$$\sin CMO = \frac{2(a+v)s}{(a+v)^2+ss}, \quad \cos CMO = \frac{(a+v)^2 - ss}{(a+v)^2+ss},$$

$$CM = a + v + \frac{ss}{a+v}, \quad MO = \frac{2sds}{dv} + a + v - \frac{ss}{a+v},$$

$$CO = \frac{2s\sqrt{(dv^2+ds^2)}}{dv} \text{ atque tang } COM = \frac{dv}{ds}.$$

His praemissis sumatur recta quaecunque per C ducta, AB, pro axe, quae radium reflexum $M(M)$ in R secet, sitque angulus $CRM = \omega$. Cum igitur pro altero reflexionis puncto (M) iste angulus fiat $CR(M) = \omega - 180^\circ$, tam sinus quam cosinus anguli ω fieri debet negativus, si punctum M in (M) transferatur, hoc est si s fiat negativum. Ponatur igitur $\cos\omega = \frac{u}{c}$, erit $\sin\omega = \frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c}$ et $d\omega = \frac{-du}{\sqrt{(cc-uu)}}$ debebitque u esse functio impar ipsius s, ut posito s negativo, abeat in $-u$: hocque casu quoque $\sqrt{(cc-uu)}$ ob signum radicale ambiguum induet valorem negativum. Ducatur radius reflexus proximus mOr, erit $Crm = \omega + d\omega$, ideoque

$d\omega = MOm$. At supra (§ III) invenimus angulum $MOm = \frac{dr}{s} = \frac{dv}{s}$ ob $r = a + v$, unde fiet $d\omega = \frac{dv}{s} = \frac{-du}{\sqrt{(cc-uu)}}$: erit ergo $s = \frac{-dv\sqrt{(cc-uu)}}{du}$. Quia igitur pro altero puncto reflexionis (M), v abit in $-v$, u in $-u$, et $\sqrt{(cc-uu)}$ in $-\sqrt{(cc-uu)}$, uti u erat functio impar ipsius s, ita nunc vicissim tam s quam v erunt functiones impares ipsius u. Jam in triangulo CRM, ob omnes angulos cum latere $CM = a + v + \frac{ss}{a+v} = a + v + \frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a+v)}$ datos, erit $\sin CRM : CM = \sin CMO : CR$ seu $CR = \frac{CM \sin CMO}{\sin CRM} = \frac{CV}{\sin CRM} = \frac{2cs}{\sqrt{(cc-uu)}} = \frac{-2cdv}{du}$, ob $s = \frac{-dv\sqrt{(cc-uu)}}{du}$. Sicque erit $CR = \frac{-2cdv}{du}$, quae pro puncto (M) eundem retinet valorem uti requiritur. Deinde erit $RV = \frac{-2udv}{du}$, hincque $MR = a + v - \frac{ss}{a+v} - \frac{2udv}{du} = a + v - \frac{2udv}{du} - \frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a+v)}$. Demittatur nunc ad axem ACB applicata MP, erit $MP = MR \sin\omega =$

$$\left(a + v - \frac{2udv}{du} - \frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a+v)}\right)\frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c},$$

ubi ex signo radicali $\sqrt{(cc-uu)}$ patet axem ACB simul fore curvae diametrum orthogonalem. Tum vero erit

$$RP = MR\cos\omega = \frac{u(a+v)}{c} - \frac{2uudv}{cdu} - \frac{udv^2(cc-uu)}{cdu^2(a+v)}$$

et

$$CP = \frac{udv^2(cc-uu)}{cdu^2(a+v)} - \frac{2dv(cc-uu)}{cdu} - \frac{u(a+v)}{c}.$$

Positis ergo coordinatis orthogonalibus $CP = x$, $PM = y$, si pro v capiatur functio quaecunque impar ipsius u, omnes curvae problemati satisfacientes in sequentibus formulis continebuntur:

$$x = \frac{-u(a+v)}{c} - \frac{2dv(cc-uu)}{cdu} + \frac{udv^2(cc-uu)}{cdu^2(a+v)};$$

$$y = \left(a + v - \frac{2udv}{du} - \frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a+v)}\right)\frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c}.$$

Unde fit $CM = a + v + \frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a+v)}$. Si ergo pro v capiatur functio algebraica ipsius u, curva quoque erit algebraica. Sicque tot, quot libuerit, curvas algebraicas exhibere licet. Q. E. I.

XII. *Coroll.* 1. Ad statum figurae expedit quantitatem v sumi negativam, quo facto erit per formulas hactenus inventas:

$$CP = x = \frac{-u(a-v)}{c} + \frac{2dv(cc-uu)}{cdu} + \frac{udv^2(cc-uu)}{cdu^2(a-v)}$$

$$= \frac{-u(a-v)}{c}\left(1 - \frac{dv(cc-uu+c\sqrt{(cc-uu)})}{udu(a-v)}\right)\left(1 - \frac{dv(cc-uu-c\sqrt{(cc-uu)})}{udu(a-v)}\right)$$

$$PM = y = \left(a - v + \frac{2udv}{du} - \frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a-v)}\right)\frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c}$$

$$= \left(a - v - \frac{(c-u)dv}{du}\right)\left(a - v + \frac{(c+u)dv}{du}\right)\frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c(a-v)}$$

$$CM = z = a - v + \frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a-v)}$$

factisque u et v itemque $\sqrt{(cc-uu)}$ negativis, hae formulae praebebunt alterum reflexionis punctum (M).

XIII. *Coroll.* 2. Reliquae autem lineae et anguli in figura expressi erunt $TS = s = \frac{dv\sqrt{(cc-uu)}}{du}$, $CS = r = a - v$, $CT = \sqrt{(rr + ss)}$ et $MT = \frac{s}{r}\sqrt{(rr + ss)}$, $CR = \frac{2cdv}{du}$, $MR = a - v + \frac{2udv}{du} - \frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a-v)}$ et $\cos CRM = \frac{u}{c}$, $\sin CRM = \frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c}$. Porro $CV = \frac{2dv\sqrt{(cc-uu)}}{du}$, $RV = \frac{2udv}{du}$.

XIV. *Coroll.* 3. Caustica autem, in qua punctum O existit, ita definietur: Cum sit $MO = a - v - \frac{ss}{a-v} - \frac{2sds}{dv}$ et $MR = a - v + \frac{2udv}{du} - \frac{ss}{a-v}$, erit

$$RO = \frac{2sds}{dv} + \frac{2udv}{du} = \frac{2ds\sqrt{(cc-uu)} + 2udv}{du}$$

ob $s = \frac{dv\sqrt{(cc-uu)}}{du}$: hincque $OQ = \frac{2ds(cc-uu) + 2udv\sqrt{(cc-uu)}}{cdu}$.
et $RQ = \frac{2uds\sqrt{(cc-uu)} + 2uudv}{cdu}$, ideoque

$$CQ = \frac{2(cc-uu)dv - 2uds\sqrt{(cc-uu)}}{cdu}.$$

Tum vero longitudo curvae causticae

$$= 2(a-v) - \frac{2ds\sqrt{(cc-uu)}}{du} \pm C.$$

XV. *Coroll.* 4. Totus vero radius reflexus erit $M(M) = 2a - \frac{2ass}{aa-vv}$. Quare ob $s = \frac{dv\sqrt{(cc-uu)}}{du}$, erit

$$M(M) = 2a - \frac{2adv^2(cc-uu)}{du^2(aa-vv)}.$$

Proprietates ergo harum curvarum sunt sequentes.

XVI. Cum recta ACB simul sit curvae diameter, ita ut pars AMB aequalis sit et similis parti $A(M)B$, bini vertices A et B reperientur, faciendo $y = 0$, quod fit si vel $u = c$ vel $u = -c$. Quibus casibus, ob angulum CRM vel $= 0$ vel $= 180°$, axis AB ad curvam erit normalis. Fiat ergo primo $u = c$ sitque $v = e$, erit $x = -a + e$, ideoque $AC = a - e$. Deinde sit $u = -c$, erit $v = -e$, atque $x = a + e$; ita ut pro altero vertice B sit $BC = a + e$ unde totus axis transversus erit $AB = 2a$.

XVII. Fieri interdum potest, ut applicata y aliis quoque casibus evanescat, scilicet si $a - v + \frac{2udv}{du} - \frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a-v)} = 0$.

quod evenit si $a - v = -\frac{udv}{du} \pm \frac{cdv}{du}$. Hoc est si $\frac{dv}{du} = \frac{a-v}{\pm c - u}$. Hoc autem casu erit $x =$
$-\frac{u(a-v)}{c} + \frac{2(\pm c + u)(a-v)}{c} + \frac{u(\pm c + u)(a-v)}{c(\pm c - u)} = \frac{2c(a-v)}{\pm c - u} = \frac{2cdv}{du}$. Quodsi ergo hujusmodi casus locum habet, erit simul $CP = CR$, quod quidem facile patet.

XVIII. Quantitas applicatae CE in ipso foco C innotescet ponendo $x = 0$. Fit autem $x = 0$ si

$$a - v = \frac{dv(cc - uu \pm c\sqrt{(cc-uu)})}{udu}.$$

Hoc autem valore substituto fiet $CE = y = \frac{2cdv\sqrt{(cc-uu)}}{udu}$, qui valor prodit, si $a - v = \frac{dv(\sqrt{(cc-uu)} \pm c)\sqrt{(cc-uu)}}{udu}$ seu si $\frac{dv\sqrt{(cc-uu)}}{udu} = \frac{a-v}{\sqrt{(cc-uu)} \pm c} = \frac{-(a-v)(\sqrt{(cc-uu)} \mp c)}{uu}$. Erit ergo quoque $CE = \frac{-2c(a-v)(\sqrt{(cc-uu)} \mp c)}{uu}$.

XIX. Si quaeretur locus, ubi axis reflexus $M(M)$ ad axem AB fit normalis, is reperietur ponendo angulum CRM rectum, seu $u = 0$. Hoc autem facto erit $x = \frac{2cdv}{du}$ et $y = a - v - \frac{ccdv^2}{du^2(a-v)}$. Quia vero v est functio impar ipsius u, posito $u = 0$, erit v vel $= 0$, vel $= \infty$.

XX. Denique ex formulis inventis maxima curvae applicata PM facile definiri poterit. Cum enim tangens in M tum sit axi AB parallela, triangulum CMR erit isosceles, ideoque $CM = MR$, hinc autem nascitur haec aequatio:

$$a - v + \frac{dv^2(cc - uu)}{du^2(a-v)} = a - v + \frac{2udv}{du} - \frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a-v)}$$

seu haec $\frac{udv}{du} = \frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a-v)}$. Hoc ergo evenit si vel $\frac{dv}{du} = 0$, vel $\frac{dv}{du} = \frac{u(a-v)}{cc-uu}$. Priori casu quo $\frac{dv}{du} = 0$, erit $x = \frac{-u(a-v)}{c}$ et $y = \frac{(a-v)\sqrt{(cc-uu)}}{c}$. Posteriori casu quo $\frac{dv}{du} = \frac{u(a-v)}{cc-uu}$, erit

$x = \frac{cu(a-v)}{cc-uu}$ et $y = \frac{c(a-v)}{\sqrt{(cc-uu)}}$ atque $CM = MR = \frac{cc(a-v)}{cc-uu}$

seu $x = \frac{cdv}{du}$, $y = \frac{cdv\sqrt{(cc-uu)}}{udu}$ et $CM = MR = \frac{ccdv}{udu}$.

XXI. *Exempl.* 1. Sit $v = u$; haec enim positio ob rationem $a:c$ indeterminatam aeque late patet ac $v = nu$; eritque $CR = \frac{2cdv}{du} = 2c$. Punctum ergo R, in quo radius reflexus $M(M)$ axem trajicit, est fixum, et caustica in punctum abit. Unde manifestum est curvam fore sectionem conicam circa focos C et R descriptam, cujus axis transversus sit $AB = 2a$ et distantia focorum $CR = 2c$. Lineae autem in figura expressae ita se habebunt: $TS = s = \sqrt{(cc-uu)}$, $CS = a-u$, $CT = \sqrt{(aa+cc-2au)}$, $MT = \frac{\sqrt{(cc-uu)(aa+cc-2au)}}{a-u}$, $CM = a - u + \frac{cc-uu}{a-u} = \frac{aa-cc-2au}{a-u}$, $MR = a + u - \frac{cc+uu}{a-u}$ $= \frac{aa-cc}{a-u}$, ideoque $CM + MR = 2a = AB$. Porro est $CV = 2\sqrt{(cc-uu)}$, $RV = 2u$ atque ob $\sin CRM = \frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c}$ et $\cos CRM = \frac{u}{c}$, erit $PM = \frac{(aa-cc)\sqrt{(cc-uu)}}{c(a-u)}$, $PR = \frac{(aa-cc)u}{c(a-u)}$ et $CP = \frac{2acc-(aa+cc)u}{c(a-u)}$. Vertices sunt in A et B ut sit $AC = a - c$ et $BC = a + c$, an vero alibi quoque applicata y evanescat, indicat aequatio $a - u = \pm c - u$, unde nisi sit $a = \pm c$, quo casu fieret $CR = AB$, hoc evenire nequit. Si $CP = 0$, fit $u = \frac{2acc}{aa+cc}$, ideoque $CE = \frac{aa+cc}{ac}\sqrt{(cc-uu)}$ $= \frac{aa-cc}{a}$. In puncto R fit radius reflexus $M(M)$ axi normalis. Applicata denique maxima habebitur si vel $\frac{dv}{du} = 1 = 0$, quod fieri nequit, vel si $1 = \frac{au-uu}{cc-uu}$, hoc est si $u = \frac{cc}{a}$, unde fit $x = c$, $y = \sqrt{(aa-cc)}$ et $CM = MR = a$.

XXII. *Exempl.* 2. Ponatur $v = \frac{u^3}{cc}$, erit $\frac{dv}{du} = \frac{3uu}{cc}$. Si igitur cos $CRM = \frac{u}{c}$ et sin $CRM = \frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c}$, erit $CR = \frac{6uu}{c}$. Porro erit $TS = s = \frac{3uu}{cc}\sqrt{(cc-uu)}$, $CS = a - \frac{u^3}{cc}$ et $CM = a - \frac{u^3}{cc} + \frac{9u^4(cc-uu)}{ac^4 - ccu^3} = \frac{aac^4 - 2accu^3 + 9ccu^4 - 8u^6}{cc(acc-u^3)}$ atque

$MR = a + \frac{5u^3}{cc} - \frac{9u^4(cc-uu)}{ac^4 - ccu^3} = \frac{aac^4 + 4accu^3 - 9ccu^4 + 4u^6}{cc(acc-u^3)}$

ideoque $CM + MR = \frac{2aac^4 + 2accu^3 - 4u^6}{cc(acc-u^3)} = \frac{2acc + 4u^3}{cc}$. Axis hujus curvae ut semper est $AB = 2a$: ad vertices autem inveniendos ponatur $u = c$, erit $v = e = c$, ideoque $AC = a - c$ et $BC = a + c$. Utrum autem alibi quoque applicata y evanescat, patebit si sit $\frac{3uu}{cc} = \frac{acc - u^3}{cc(\pm c - u)}$ seu $\pm 3cuu - 2u^3 = acc$. Quoties ergo haec aequatio radices habet reales ejusmodi ut sit $u < \pm c$, abscissae $x = \frac{6uu}{c}$ applicata respondebit evanescens. Applicata in foco C est $CE = \frac{6u}{c}\sqrt{(cc-uu)}$ existente $\frac{acc - u^3}{cc} = \frac{3u}{cc}\left(cc - uu \pm c\sqrt{(cc-uu)}\right)$ seu $acc - 3ccu + 2u^3 = \pm 3cu\sqrt{(cc-uu)}$ vel $4u^6 - 3ccu^4 + 4accu^3 - 6ac^4u + aac^4 = 0$. Radius vero reflexus $M(M)$ axem normaliter secabit si sit $u = 0$, quo casu fit $x = 0$ et $y = a$. Deinde cum applicata maxima sit ubi $\frac{dv}{du} = 0$, hoc est ubi $u = 0$; erit hoc casu $x = 0$ et $y = a$. Deinde vero quoque est maxima si $\frac{3uu}{cc} = \frac{u(acc-u^3)}{cc(cc-uu)}$, hoc est si $3ccuu - 2u^4 = accu$, unde fit vel $u = 0$, vel $2u^3 - 3ccu + acc = 0$. Caustica autem hujus curvae ita definietur: Cum sit $s = \frac{3uu}{cc}\sqrt{(cc-uu)}$, erit $\frac{ds}{du} = \frac{6u}{cc}\sqrt{(cc-uu)} - \frac{3u^3}{cc\sqrt{(cc-uu)}}$

$= \frac{6ccu - 9u^3}{cc\sqrt{(cc-uu)}}$; erit $RO = \frac{12ccu - 18u^3}{cc} + \frac{6u^3}{cc} = \frac{12u(cc-uu)}{cc}$,
$OQ = \frac{12u(cc-uu)\sqrt{(cc-uu)}}{c^3}$, $RQ = \frac{12uu(cc-uu)}{c^3}$, unde
$CQ = \frac{-6ccuu + 12u^4}{c^3}$. Sit $CQ = p$, $QO = q$, erit

$$p = \frac{6uu(2uu-cc)}{c^3} \text{ et } q = \frac{12u(cc-uu)^{3/2}}{c^3}.$$

Sit angulus $CRM = \omega$, erit $\frac{u}{c} = \cos\omega$, $\frac{2uu-cc}{cc} = \cos 2\omega$, $\frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c} = \sin\omega$, ideoque $p = 6c\cos^2\omega \,.\, \cos 2\omega$ et

$$q = 12c\cos\omega\sin^3\omega = 6c\sin^2\omega\sin 2\omega,$$

unde $\frac{q}{p} = \operatorname{tang}^2\omega \operatorname{tang} 2\omega = \frac{2\operatorname{tang}^3\omega}{1-\operatorname{tang}^2\omega}$. Vel cum sit

$$\cos^2\omega = \frac{1+\cos 2\omega}{2} \text{ et } \sin^2\omega = \frac{1-\cos 2\omega}{2},$$

erit $p = 3c(1+\cos 2\omega)\cos 2\omega$ et $q = 3c(1-\cos 2\omega)\sin 2\omega$.
Erit ergo $\cos^2 2\omega + \cos 2\omega = \frac{p}{3c}$, ideoque

$$\cos 2\omega = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{p}{3c}\right)} \text{ et}$$

$$\cos^2 2\omega = \frac{1}{2} + \frac{p}{3c} \mp \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{p}{3c}\right)}$$

unde

$$\sin 2\omega = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{3c} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{p}{3c}\right)}\right)}.$$

Ergo prodibit

$$q = 3c\left(\frac{3}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{p}{3c}\right)}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{3c} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{p}{3c}\right)}\right)}.$$

Sit $\sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{p}{3c}\right)} = t$ erit $\frac{p}{3c} = -\frac{1}{4} + tt$ et

$$q = 3c\left(\frac{3}{2} - t\right)\sqrt{\left(\frac{3}{4} + t - tt\right)},$$

unde

$$\frac{qq}{9cc} = \frac{27}{16} - \frac{9}{2}tt + 4t^3 - t^4 = \frac{1}{2} - \frac{5p}{3c} - \frac{pp}{9cc} + 4\left(\frac{1}{4} + \frac{p}{3c}\right)^{\frac{3}{2}},$$

quae aequatio ad rationalitatem perducta fit:

$$p^4 + 2ppqq + q^4 + 30cpqq - 18cp^3 - 9ccqq$$
$$+ 108ccpp - 216c^3p = 0.$$

Est ergo haec caustica linea quarti ordinis, quae ex aequatione

$$q = \frac{(9c \mp \sqrt{(9cc + 12cp)})\sqrt{(3c - 2p \pm \sqrt{(9cc + 12cp)})}}{2\sqrt{6c}}$$

non difficulter construetur.

Curva haec est tricuspidata triangulo aequilatero inscripta uti haec figura adjecta (Fig. 21) repraesentat, et curva problemati satisfaciens oritur, si filum huic curvae complicetur, alterque terminus in C figatur, sicque per evolutionem fili describetur.

LETTRE LXXXVIII.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Problème de la courbe catoptrique. Sur les nombres π et $\sqrt{2}$ Sommation d'une série.

St. Petersburg d. 28. December 1745.

Ew. sage ich für die mir übersandte ausführliche Solution des problematis in Act. Lips. propositi schuldigsten Dank. Ehe selbige noch ankam, hatte ich schon vor mich observiret, dass (Fig. 17) $CM + NR = 2(a+v) - \frac{2udv}{du}$ und $CN + NR = 2(a-v) + \frac{2udv}{du}$ (woraus denn folget, dass die drey latera trianguli $CM + MN + NC = 4a$) und dass $MR = \frac{cPM}{\sqrt{(cc-uu)}}$, folglich MR nur in dem einigen casu $= PM$, wenn $u = 0$; obzwar generaliter wahr ist, dass MR normalis ad axem wird, wenn nur $y = \frac{4aa - xx}{4a}$ (abstrahendo a valore ipsius x). Ich habe auch nicht gefunden, dass Ew. den casum deter-

miniret, wenn das spatium interceptum *CR* ein maximum wird. Die Solution selbst soll, sobald es Ew. verlangen, zurückgesandt werden.

Was ich von dem numero 31415. ., so durch 0 und 1 zu exprimiren wäre, geschrieben, ist allerdings unrichtig, und müsste nur von der arithmetica dyadica verstanden werden, welches aber auch allem Ansehen nach eine vergebliche Mühe seyn würde.

Aus der Zahl, so $\sqrt{2}$ in arithmetica dyadica vorstellet, erhellet zwar noch keine Ordnung, es ist aber doch zu consideriren, dass ein numerus ex lege non circulante constans per additionem alterius numeri circulantis so verstellet werden kann, dass man nicht leicht eine legem darin entdecken wird.

Den modum, durch divisores continue auctos einen quotum non circulantem herauszubringen, haben mir Ew. schon längst communiciret; wenn aber der Endzweck nur blos seyn soll, numeros certa lege non circulantes zu finden, so halte ich diese Methode für etwas weitläufig.

Um zu sagen, dass Jemand die quadraturam circuli in numeris gefunden habe, müsste man, meines Erachtens, zuvörderst den gradum facilitatis, qua ille numerus ab inventore exprimendus sit, determiniren; denn ohne dergleichen Determination, dürfte man nur die seriem Leibnitii, oder eine andere actu addiren, und ich glaube, dass man in dieser Supposition nach der Billigkeit die inventionem quadraturae circuli Demjenigen nicht absprechen könnte, welcher den numerum 31415. . eben so leicht als man $\sqrt{2}$ durch eine würkliche extractionem radicis quadratae findet, hervorzubringen vermögend wäre

Die in meinem vorigen Schreiben enthaltene series scheinet Ew. schon vorher bekannt gewesen zu seyn.

Wenn x den exponentem terminorum andeutet, so ist, posito termino generali $xa^{\pm x}$ die summa generalis

$$\frac{a}{(a \mp 1)^2}\left(xa^{\pm(x+1)} - (x+1)\,a^{\pm x} + 1\right),$$

wiewohl hierin ausser dem arrangement der formulae summatricis nichts neues ist.

Zu dem dortigen établissement des Hn. de Maupertuis, welches ich aus den Zeitungen mit besonderer Freude vernommen, bitte ich demselben meine schuldigste Gratulation abzustatten und wünsche herzlich, dass die Consideration, welche der König für dessen Meriten hat, noch viel Gutes zum Aufnehmen der Wissenschaften nach sich ziehen möge.

Goldbach.

LETTRE LXXXIX.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Recherches ultérieures sur le problème de la courbe catoptrique.

Berlin d. 25. Januar 1746.

— — Die Solution meines problematis catoptrici, welches Ew. zu übersenden die Ehre gehabt, ist vorher hier copirt worden. Ich habe aber seit der Zeit eine weit kürzere Solution gefunden, wobei alle in der vorigen befindlichen Weitläufigkeiten nicht nöthig sind. In beygefügter Figur (Fig. 22), da C das punctum radians und EMB eine curva reflectens quaecunque ist, welche die radios CM und Cm nach MO und mO reflectirt: Wenn die curva EMB gegeben ist, so kann für ein jegliches punctum M das intervallum respondens OR in axe CB nebst dem Winkel CRM gefunden werden. Nun kehre ich die Frage um, und suche die curvam EMB zu bestimmen, wenn eine aequatio quaecunque inter spatium CR et angulum CRM gegeben wird. Denn wenn dieses problema resolvirt worden; so ist es hernach sehr leicht das Hauptproblema zu solviren.

Es sey demnach das Spatium $CR = r$, der Winkel $CRM = \varphi$, sein sinus $= s$ und cosinus $= u$, posito sinu toto $= c$, so dass $ss + uu = cc$ und $d\varphi = \frac{cds}{u} =$ ang. O Wenn nun O der concursus duorum radiorum reflexorum proximorum ist, so ist klar, dass die particula curvae Mm zu einer ellipsi gehören müsse, deren beide foci in C und O befindlich, und folglich wird seyn: $CM + MO = Cm + mO$. Man verlängere also OM und Om in V und v, so dass $MV = CM$ und $mv = Cm$, so wird seyn $OV = Ov$ und die tangentes in M und m werden die rectas CV und Cv bifariam perpendiculariter schneiden. Man lasse ferner aus C perpendicula CS und Cs auf OV und Ov, so wird der angulus $SCs = O = d\varphi = \frac{cds}{u}$. Es ist aber in dem Dreyeck CSR, sin. tot. $(c) : CR\ (r) ::$ sin $CRS\ (s) : CS = \frac{rs}{c}$ und $RS = \frac{ru}{c}$. Also ist $S\sigma : CS = d\varphi \left(\frac{cds}{u}\right)$: sin. tot. (c) oder $S\sigma = \frac{rsdr}{cc} = \frac{rsds}{cu}$. Da aber $sds + udu = 0$, so wird $S\sigma = \frac{-rdu}{c}$. Nun setze man $SV = t$, so ist $sv = t + dt$ und $vs - VS = dt$: Da nun $vs = V\sigma$, so wird $dt = S\sigma = \frac{-rdu}{c}$ und also $t = a - \int \frac{rdu}{c}$. Aus der zwischen r und u gegebenen Verhältniss wird also die Linie $VS = t$ bestimmt, zu welcher wenn man addirt $RS = \frac{ru}{c}$, so bekommt man die Linie $RV = a + \frac{ru}{c} - \int \frac{rdu}{c} = a + \int \frac{udr}{c}$, welches noch viel kürzer hätte gezeigt werden können, da

$$rv - RV = dRV = R\varrho = \frac{udr}{c},$$

weil $Rr = dr$. Hat man also $RV = a + \int \frac{udr}{c}$ gefunden, so

ziehe man CV, schneide dieselbe in zwey gleiche Theile in T und richte darauf die Perpendicularlinie TM auf, welche in M nicht nur ein punctum in curva quaesita, sondern auch die positionem tangentis geben wird. Dahero aus einer jeden gegebenen Aequation inter $CR = r$ et $\cos CRM = u$ die curva quaesita EMB determinirt und leicht construirt werden kann, indem man nur immer zu nehmen hat $RV = a + \int \frac{udr}{c}$.

Hieraus ist nun leicht das proponirte problema catoptricum zu solviren, denn da muss aus dem angulo CRM das spatium $CR = r$ dergestalt bestimmt werden, dass wenn man den Winkel CRO anstatt des Winkels CRM setzt, für CR einerley Werth herauskomme. Da nun des Winkels CRO sinus ist $= -s$ und der cosinus $= -u$, so muss r eine solche functio seyn von s und u, welche einerley Werth behalte, wenn gleich für s und u ihre negativa $-s$ und $-u$ gesetzt werden. Folglich muss r eine functio parium dimensionum seyn von s und u, als z. Ex. $r = b + \frac{\alpha s^2 + \beta su + \gamma u^2}{c}$. Hat man nun r solchergestalt angenommen, so kann daraus die curva problemati satisfaciens folgendergestalt bestimmt werden. Man setze $MR = z$, so wird

$$CM = \sqrt{\left(rr + zz - \frac{2urz}{c}\right)} = RV - z = a + \int \frac{udr}{c} - z.$$

Folglich wird $rr - \frac{2urz}{c} = \left(a + \int \frac{udr}{c}\right)^2 - 2\left(a + \int \frac{udr}{c}\right) z$ und also

$$z = \frac{\left(a + \int \frac{udr}{c}\right)^2 - rr}{2\left(a + \int \frac{udr}{c} - \frac{ur}{c}\right)}.$$

Aus z findet man ferner $PM = y = \frac{sz}{c}$ und $PR = \frac{uz}{c}$, da-

hero wird $CP = x = r - \frac{u^2}{c}$ und, wie schon gefunden ist, $CM = a + \int \frac{udr}{c} - z$.

Will man nun curvas algebraicas haben, so muss für r eine solche functio von s und u, jedoch nach der obigen Vorschrift angenommen werden, dass sich die formula $\int \frac{udr}{c}$ integriren lasse.

Um aber formulas generales für alle mögliche curvas algebraicas zu finden, so setze ich

$$\int \frac{udr}{c} = \frac{ur}{c} - \int \frac{rdu}{c} = \frac{ur}{c} - v, \text{ oder } \int \frac{rdu}{c} = v.$$

Weil nun r eine functio parium dimensionum ipsarum s et u seyn muss, so wird $v = \int \frac{rdu}{c}$ eine functio imparium dimensionum. Man nehme also für v eine solche functionem quamcunque an, so wird $r = \frac{cdv}{du}$ und $\int \frac{udr}{c} \quad \frac{udv}{du} - v$. Hieraus wird ferner

$$RM = z = \frac{\left(a - v + \frac{udv}{du}\right)^2 - \frac{cc\,dv^2}{du^2}}{2(a - v)}.$$

das ist

$$MR = z = \frac{a-v}{2} + \frac{udv}{du} - \frac{(cc - uu)dv^2}{2(a-v)du^2} = \frac{a-v}{2} + \frac{udv}{du} - \frac{ssdv^2}{2(a-v)du^2},$$

wegen $ss = cc - uu$

$$PM = y = \frac{(a-v)s}{2c} + \frac{sudv}{cdu} - \frac{s^3 dv}{2(a-v)cdu^2}$$

$$CP = x = \frac{ssdv}{cdu} - \frac{u(a-v)}{2c} + \frac{ussdv^2}{2(a-v)cdu^2}$$

$$CM = \frac{a-v}{2} + \frac{ssdv^2}{2(a-v)du^2}.$$

Hieraus ist $CM + MR = a - v + \frac{udv}{du}$, und positis u, s negativis, in welchem Fall auch v negativum wird, so be-

kommt man die summam radiorum infra axem $= a + v - \frac{udv}{du}$, dahero klar ist, dass die summa omnium radiorum, d. i. der Weg, welchen ein jeglicher radius ex C egressus, donec eodem post geminam reflexionem revertatur, seyn wird $= 2a$; welche Eigenschaft, ungeacht sie unmittelbar aus der Betrachtung, dass $CM + MO = Cm + mO$, folget, so haben doch Ew. mir dieselbe zuerst entdeckt. Im übrigen kommen diese Formuln mit meinen vorhergehenden völlig überein, nur dass diese zweymal kleiner sind, als jene. Wann das spatium CR maximum wird, ist aus der Formul $CR = \frac{cdv}{du}$ leicht zu sehen, nehmlich wenn $ddv = 0$. Es ist aber hiebey zu merken, dass s und u immer kleiner seyn müssen als c, indem sonst die formulae imaginariae werden. Es sey z. Ex. $v = \frac{u^3}{cc}$, so wird $CR = \frac{3uu}{c}$, dessen Werth am grössten wird, wenn $u = \pm c$; also ist in diesem Fall der grösste valor $CR = 3c$, und der kleinste $CR = 0$. Man bekommt also die völlige curvam, wenn man successive dem u alle mögliche valores gibt von -1 bis zum $+1$.

Es ist ganz richtig, dass der auf die quadraturam circuli gesetzte Preis Demjenigen mit Recht gebührte, welcher eine der extractioni radicis quadratae ähnliche Operation erfände, um die Zahl 3,14159 etc. nach Belieben immer weiter fortzusetzen. In dieser Absicht bin ich auf den Gedanken gekommen, ob es nicht möglich, divisores certa lege progredientes zu finden, aus welchen nach der letztbeschriebenen Divisionsregel eben diese Zahl 3,14159 herausgebracht würde; denn diese Art schien mir eben den gradum facilitatis, welchen Ew. verlangen, noch vor der extractioni radicis zu haben,

Euler.

LETTRE XCI.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Projets d'inscriptions pour des médailles en l'honneur du Roi.

Berlin d. 5 Febr. 1746.

Ew. bitte nicht ungütig zu deuten, dass ich die Freyheit nehme Denselben nachfolgende problemata betreffend einige médailles, welche I. K. M. prägen zu lassen Allergnädigst befohlen haben, vorzulegen. Als nach dem ersten schlesischen Krieg Ew. die Güte gehabt mir einige Inventionen zu den damals projectirten médailles zu überschicken, so haben dieselben bey dem Staats-Ministerio allhier eine völlige Approbation erhalten, obgleich wegen anderer Umstände keine médailles zum Vorschein gekommen. Anjetzo ist mir nun wiederum eine ordre aus dem Ministerio zugeschickt worden, in welcher 5 Inventionen zu médailles verlangt werden:

I. Auf die Bataille bey Sorr.

II. Auf die Expedition nach Sachsen, da I. K. M. sich so schnell gegen Görlitz gewendet und allda den Feind bis in Böhmen zurückgetrieben.

III. IV. Auf die Bataille bey Kesselsdorf und auf die Einnahme von Dresden. Diese beyden könnten wohl in eine gebracht werden.

V. Auf den doppelten Frieden mit Oestreich und Sachsen.

Ew. werden sich wundern, dass über solche Sachen von mir Vorschläge gefordert werden; allein, ausser dem, dass ich das vorige Mal die besten geliefert, so befinden sich hier in der That sehr wenige, welche es besser machen könnten als ich, wenn ich auch mich unterstehen sollte selbst etwas darauf zu ersinnen.

Sinnbilder weiss ich gar nicht zu finden, aber folgende Inscriptionen sind mir darüber eingefallen, welche ich aber nicht im Stande bin auszupoliren.

I. Gravissimus hostium impetus summa fortitudine a Rege reprimitur.

II. Hostes ferrum flammamque minitantes repentino Regis adventu perculsi aufugiunt.

III. IV. Hostibus ad Kesselsdorff ingenti proelio profligatis, Metropolis Dresda occupatur.

V. Rex Pace non minus quam Bello invictus hostibus ad incitas redactis pacem largitur.

Bey dem letzten wollte ich nehmlich diesen Gedanken anbringen: Rex pace non minus quam bello hostes devicit, aber ich gestehe, dass derselbe mit dem übrigen nicht recht zusammenpasst.

Sollte der gute Freund, von welchem Ew. mir das vorige Mal Inventionen zuzusenden die Gute gehabt, auch auf diese Puncte einige Aufmerksamkeit wenden, so ersuche Ew. gehorsamst mir desselben Gedanken darüber zu communiciren.

Euler.

LETTRE XC.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. G. refuse de se mêler de la composition des médailles.

St. Petersburg d. 26. Februar 1746.

Da ich mich nach reifer Ueberlegung nicht getraue, solche inscriptiones, die der Hoheit des sujet's einigermaassen conform wären, zu erfinden, und vielmehr davor halte, dass der berühmte Hr. Baron von Stosch, als welcher in re numaria eine ungemeine connoissance hat, zu diesem Endzwecke für vielen andern geschickt wäre, so habe solches zur schuldigen Antwort zu melden nicht unterlassen wollen.

Goldbach.

LETTRE XCII.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Questions relatives a la nature des comètes. Courbe catoptrique. Observation sur une série.

St. Petersburg d. 12 März 1746.

Die Fragen nebst den Antworten von den Cometen*) habe ich alsofort durchgelesen, und zweifle nicht es werden dieselben wegen ihrer Deutlichkeit und Richtigkeit eine generale Approbation erhalten haben. Wenn man annimmt, dass der Comet ein entzündeter Cörper ist, so lässet es sich vielleicht am besten darthun 1. dass er keine solche phases, als der Mond oder die Venus zeigen kann, 2. dass er sein eignes Licht quaqua versus von sich wirft, ohngeachtet selbiges von den Sonnenstrahlen nicht anders als in parte a sole aversa unter dem Namen der comae oder caudae kenntbar wird, 3. dass diese cauda cometae desto grösser werden muss, je länger sich der Comet in der Nähe

*) Ces questions ne se sont par trouvées.

der Sonne aufhält und je mehr er von derselben entzündet wird.

Ich glaube, dass man das problema catoptricum auch ohne Consideration einiges anguli folgendermaassen solviren kann. Sit (Fig. 23) axis curvae $AB = a$, radius incidens $CM = \frac{a \pm p}{2}$, radius reflexus $MO = \frac{a \mp p}{2}$, ita ut

$$CM + MO = CN + NO = a.$$

Sit CO (functio quaecunque ipsius p, sed major quam p) $= q$, erit elementum curvae quaesitae $\frac{dp\sqrt{(aa-pp)}}{2\sqrt{(qq-pp)}} = Mm$.

Goldbach.

P. S. Ich habe schon längst observiret, dass die series, deren lex progressionis ist $A^2 + 4A = B$, designante A terminum quemcunque, et B terminum proxime sequentem, diesen terminum generalem hat $a^{-2^x} - 2 + a^{2^x}$, und hieraus lässt sich auch der terminus generalis hujus seriei

$$1 + 1.3 + 1.3.5 + 1.3.5.17 + 1.3.5.17.257 + \text{etc.}$$

finden, davon die factores terminorum lauter Zahlen sind, welche Fermatius pro numeris primis gehalten.



LETTRE XCIII.

Euler à Goldbach

Sommaire. Réponse a la précédente. Plusieurs théorèmes de la doctrine des séries Concours de l'académie de Berlin sur la théorie des vents.

Berlin d. 5. April 1746.

— — Dass Ew. meine ziemlich in Eil aufgefassten Fragen uber die Cometen einiger Aufmerksamkeit gewürdiget, erkenne ich als ein Zeichen Dero ganz besondern Gewogenheit. Ich habe aber noch starke Zweifel, ob sich die phaenomena cometarum eorumque caudarum bloss allein dadurch erklären lassen, dass man annimmt, ihre Cörper seyen würklich entzündet. Denn ausserdem, dass eine blosse Erleuchtung nicht hinlänglich ist in dem aethere eine Helle hervorzubringen, sondern dazu noch in derselben Gegend solche Cörperlein erfordert werden, welche die Erleuchtung empfangen, und daher einen Schein zu uns zurückwerfen: so ist auch die Abweichung der caudae eines Cometen ab

oppositione solis ein solches phaenomenon, welches eine besondere Erklärung zu erfordern scheinet. Die Idee, welche ich in diesen Fragen kürzlich entworfen, und darin bestehet, dass die durch die grosse Atmosphaer eines Cometen durchstreichenden Sonnenstrahlen einige subtile particulas daraus mit sich fortreissen, habe ich letztens weitläufiger ausgeführt und ziemlich deutlich dargethan, dass auf solche Art nicht nur die Cometenschweife, sondern auf unserer Erde die lumina borealia und um die Sonne selbst das lumen Cassinianum entstehen. Diese Ausführung hat auch dem Herrn de Maupertius so wohl gefallen, dass er derselben völlig beypflichtet.

Ew. Idée das problema catoptricum zu solviren, gibt zwar leichte Formuln, allein da die positio lineae CO nicht bestimmt wird und das elementum curvae Mm wenig zu Bestimmung der krummen Linien, insonderheit wenn algebraische verlangt werden, beyträgt, so sehe ich noch nicht ab, wie die natura functionis q determinirt werden müsste, dass die beyden Reflexionspuncta M et N in eandem lineam curvam continuam zu liegen kämen.

Ueber die seriem $1 + 1.3 + 1.3.5 + 1.3.5.17 +$ etc. erstaunte ich anfänglich; als ich aber dieselbe genauer betrachtete, sahe ich bald, dass ich den terminum generalem davon schon vor einiger Zeit unter andern Umständen ausgedrückt hatte. Denn ich fand, dass wenn

$$(1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)(1 + a^8)(1 + a^{16}) \ldots (1 + a^{2^n}) = s$$

so ist $(1 - a)s = 1 - a^{2^{n+1}}$, und also $s = \frac{a^{2^{n+1}} - 1}{a - 1}$.

Dahero wenn $a = 2$, so ist $1.3.5.17 \ldots (2^{2^n} + 1) = 2^{2^{n+1}} - 1$.
Dieses hatte ich schon angemerket, als ich suchte, was fur

eine series herauskomme, wenn man dieses productum infinitum $(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$ etc. wirklich evolvirte, da ich dann gefunden, dass diese series geometrica $1+a+a^2+a^3+a^4+$ etc. $=\frac{1}{1-a}$ herauskomme. Evolvirt man aber dieses Product $(1-a)(1-a^2)(1-a^4)(1-a^8)$ etc., so bekommt man $1-a-a^2+a^3-a^4+a^5+a^6-a^7-a^8+a^9+a^{10}-a^{11}+a^{12}-a^{13}-a^{14}+a^{15}-a^{16}+a^{17}$ etc., wo die ordo signorum merkwürdig ist. Von dieser Art habe ich noch nachfolgende theoremata gefunden:

Theorema. Si sit

$s=(1-na)(1-n^2a)(1-n^3a)(1-n^4a)(1-n^5a)$ etc. in infin.

erit

$$s=1-\frac{na}{1-n}+\frac{n^3a^2}{(1-n)(1-n^2)}-\frac{n^6a^3}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)}$$
$$+\frac{n^{10}a^4}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)}-\text{etc.}$$

et

$$\frac{1}{s}=1+\frac{na}{1-n}+\frac{n^2a^2}{(1-n)(1-n^2)}+\frac{n^3a^3}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)}$$
$$+\frac{n^4a^4}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)}+\text{etc.}$$

Ew. glaube ich auch schon geschrieben zu haben, dass wenn man dieses productum infinitum

$$(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)(1-a^5)\text{ etc.}$$

evolvirt, diese series herauskomme

$1-a-a^2+a^5+a^7-a^{12}-a^{15}+a^{22}+a^{26}-a^{35}-a^{40}+$ etc.,

wo der ordo exponentium sehr merkwürdig ist, und sich per inductionem also bestimmen lässt, dass alle in hac formula $\frac{3xx\pm x}{2}$ enthalten sind, ungeacht ich diese legem observatam noch nicht ex rei natura habe herausbringen können.

Theor. Si fuerit in serie $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, \ldots \overset{x}{P}, \overset{x+1}{Q}$, $Q = mP^2 + nP + \frac{nn-2n-8}{4m}$, ubi m et n sunt numeri constantes, quaerantur numeri F et G ut sit

$$F + G = mA + \frac{1}{2}n \text{ et } FG = 1,$$

eritque

$$P = \frac{F^{2^{x-1}} + G^{2^{x-1}}}{m} - \frac{n}{2m}.$$

Theor. Si fuerit in serie $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, \ldots, \overset{x}{P}, \overset{x+1}{Q}$,

$$Q = mP^2 + nP + \frac{nn-2n}{4m} \text{ erit } P = \frac{(mA+\frac{1}{2}n)^{2^{x-1}}}{m} - \frac{n}{2m},$$

welches Ew. theoremata sind.

Folgende theoremata scheinen auch einiger Aufmerksamkeit werth zu seyn:

Theor. Si n sit numerus integer affirmativus quicunque, erit

$$\frac{1-a^n}{1-a} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{1-a^3} + \text{etc.} = n.$$

Theor. Si n sit numerus integer affirmativus quicunque, erit

$$1 - a^{n-1} + a^{2n-3} - a^{3n-6} + a^{4n-10} - a^{5n-15} + a^{6n-21} - \text{etc.} = 0$$

exclusis scilicet terminis, qui exponentes habent negativos.

Theor. Sit in circulo arcus $90^\circ = q$, sumaturque arcus quicunque s, cujus sinus sit $= a$, $\sin 2s = b$, $\sin 3s = c$, $\sin 4s = d$ etc. erit semper

$$q = \frac{1}{2}s + a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{4}d + \frac{1}{5}e + \text{etc.}$$

Theor. In circulo radii $= 1$ capiatur arcus quicunque s, cujus tangens sit $= a$, $\text{tang}\,\frac{1}{2}s = b$, $\text{tang}\,\frac{1}{4}s = c$, $\text{tang}\,\frac{1}{8}s = d$, $\text{tang}\,\frac{1}{16}s = e$ etc., erit

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c + \frac{1}{8}d + \frac{1}{16}e + \text{etc.}$$

Ich bin jetzund mit Durchlesung derjenigen Pièçen, welche über die von der Akademie aufgegebene Frage von der Ursach und der Ordnung der Winde sind eingesandt worden, beschäftiget. Es sind darüber 10 eingelaufen, unter welchen sich eine, so vor allen andern in Betrachtung gezogen zu werden verdient, befindet. Die Devise, so sich zu Ende derselben befindet, ist auch schön; sie lautet also:

Haec ego de ventis: dum ventorum ocyor alis
Palantes pellit populos Fridericus, et orbi,
Insignis lauro, ramum praetendit olivae. *)

*) C'est la pièce de concours de d'Alembert. Comp. dans le 2 volume, les lettres de Daniel Bernoulli sur ce concours.

Euler.



LETTRE XCIV.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Suite des recherches sur les séries. Remarques ultérieures sur le problème de la courbe catoptrique.

St. Petersburg d. 8. Mai 1746.

Den terminum generalem seriei

$$1 + 1.3 + 1.3.5 + 1.3.5.17 + \text{etc.}$$

hatte ich, als mein letztes Schreiben abging, nur in potestate, und dachte nicht, dass selbiger so leicht seyn sollte, indem ich dessen sonst gar keine Erwähnung gethan haben würde.

Ich weiss nicht, ob man methodum hat von dergleichen seriebus als diese ist

$$\frac{1.3.5}{2.4.8} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.10} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.12} - \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.14} + \text{etc.}$$
$$= 2^{-\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} - 2,$$

cujus lex progressionis est $\frac{-A(2x+5)(x+3)}{2(x+2)(x+4)} = B$, die summas zu finden.

Die in meinem vorigen angeführte Idée einer Solution gehet noch weiter, wenn man vor q eine functionem quamcunque ipsius p annimmt, nur mit der Limitation dass $q > p$ und $q < a$ (denn ich sehe zum wenigsten nicht, dass ex natura problematis mehrere limitationes erfordert werden), und ferner $x^2 + y^2 = \frac{(a \pm p)^2}{4}$, $dx^2 + dy^2 = \frac{(aa-pp)dp}{4(qq-pp)}$, so wird die abscissa ad applicatam in curva quaesita seyn wie x zu y.

Goldbach.

P. S. d. 21. Mai 1746. Es ist mir gestern eingefallen, dass sich das problema catoptricum auch folgendermaassen solviren lässet: Sit (Fig. 24) AB axis curvae $= a$, punctum radians C. Sint CM et CN radii in curvam incidentes; MR et NR radii ad idem punctum axis R reflexi; capiatur in MN punctum O, ita ut sint $CM + MO = CN + NO = a$, et ponatur recta $CO = q$, $CM = \frac{a-p}{2}$, $MO = \frac{a+p}{2}$, $CN = \frac{a+v}{2}$, $NO = \frac{a-v}{2}$ (ubi v jam datur per p et q; est enim $v = \frac{(2a+p)qq+aap}{aa+2ap+qq}$). Ponatur porro $RO = z$, $RS = uz$, invenietur spatium, quod inter radium incidentem et reflexum in axe intercipitur

$$CR = CS - RS = \sqrt{(qq - zz(1-uu))} - uz = CQ - RQ$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{((a+v)^2 - (a-v+2z)^2(1-uu))} - \frac{(a-v+2z)u}{2}$$
$$= CP + PR = \frac{1}{2}\sqrt{((a-p)^2 - (a+p-2z)^2(1-uu))} + \frac{(a+p-2z)u}{2}.$$

Sed cum v jam supra data sit in p et q, per has aequa-

tiones pro CR inventas dari etiam poterunt u et z in p et q, qui valores deinde substituendi sunt in applicata

$$MP = \frac{(a+p-2z)}{2} \sqrt{(1-uu)}$$

et in abscissa

$$CP = \sqrt{\left(\left(\frac{a-p}{2}\right)^2 - MP^2\right)}.$$

Ob nun zwar die würkliche Determination der quantitatum u und z durch p und q etwas weitläufig seyn möchte, so ist doch hingegen zu consideriren, dass in dieser Solution keine differentialia vorkommen.

LETTRE XCV.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Sommation de la série de la lettre précédente.

Berlin d. 28 Mai 1746.

— — Die von Ew. gemeldte series

$$\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{5}{8}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{7}{10}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{9}{12}-\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{11}{14}+\text{etc.}$$

kann durch meine Methode leicht gefunden werden. Denn wenn ich nach der lege progressionis noch die zwey vorhergehenden terminos dazu setze, so kommt

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{5}{8}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{7}{10}+\text{etc.}$$

Diese ist in der folgenden enthalten, wenn man setzt $x=1$.

$$s=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}x^6+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{5}{8}x^8-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{7}{10}x^{10}+\text{etc.}$$

Man differentiire diese seriem und theile allenthalben durch dx, so bekommt man

$$\frac{ds}{dx} = 1 . x^3 - \frac{1}{2} \cdot 3 x^5 + \frac{1.3}{2.4} \cdot 5 x^7 - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot 7 x^9 + \text{etc.}$$

Man multiplicire durch $\frac{dx}{x^3}$, so wird

$$\frac{ds}{x^3} = 1\, dx - \frac{1}{2} \cdot 3 xx dx + \frac{1.3}{2.4} \cdot 5 x^4 dx - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot 7 x^6 dx + \text{etc.}$$

Wenn man nun integrirt, so bekommt man

$$\int \frac{ds}{x^3} = x - \frac{1}{2} x^3 + \frac{1.3}{2.4} x^5 - \frac{1.3.5}{2.4.6} x^7 + \text{etc.}$$

Hier siehet man leicht, dass diese series ist $=$

$$x(1+xx)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{(1+xx)}},$$

folglich ist $\int \frac{ds}{x^3} = \frac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$ und $\frac{ds}{x^3} = \frac{dx}{(1+xx)^{\frac{3}{2}}}$ also

$$s = \int \frac{x^3 dx}{(1+xx)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{x dx}{\sqrt{(1+xx)}} - \int \frac{x dx}{(1+xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= (1+xx)^{\frac{1}{2}} + (1+xx)^{-\frac{1}{2}} - 2,$$

denn hier muss die quantitas constans 2 subtrahirt werden, weil posito $x = 0$, werden muss $s = 0$. Setzt man nun $x = 1$, so bekommt man

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{5}{8} - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \frac{9}{12} - \text{etc.}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}} - 2.$$

Letztens bin ich auf nachfolgende seriem gekommen, deren Summ, ob sie gleich so leicht ausgedrückt wird, dennoch durch diese Methode nicht wohl gefunden werden kann, denn ich komme auf eine Differentio-differential-Aequation, welche sich generaliter nicht integriren lässt: Die series ist diese:

$$1 + \frac{n}{4} + \frac{n(n+3)}{4.8} + \frac{n(n+4)(n+5)}{4.8.12} + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4.8.12.16} + \text{etc.}$$

$$= 2^n,$$

wenn also $n = 1$, so ist

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1.4}{4.8}+\frac{1.5.6}{4.8.12}+\frac{1.6.7.8}{4.8.12.16}+\frac{1.7.8.9.10}{4.8.12.16.20}+\text{etc.}=2.$$

Diese wird leicht in diese Form verwandelt:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.6}+\frac{1.3.5}{4.6.8}+\frac{1.3.5.7}{4.6.8.10}+\text{etc.}=2\left(1-(1-1)^{\frac{1}{2}}\right)=2,$$

in welchem Fall die Richtigkeit leicht zu ersehen.

Ich glaube kaum, dass die ratio diametri ad peripheriam $1:\pi$ leichter per approximationem gefunden werden könne, als durch Hülfe beyder folgenden serierum:

$$p=\frac{1}{5}-\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}-\frac{1}{7.5^7}+\frac{1}{9.5^9}-\frac{1}{11.5^{11}}+\text{etc.}$$

$$q=\frac{1}{239}-\frac{1}{3.239^3}+\frac{1}{5.239^5}-\frac{1}{7.239^7}+\frac{1}{9.239^9}-\frac{1}{11.239^{11}}+\text{etc.}$$

Denn wenn hieraus die Werthe von p und q gefunden werden, so ist $\pi=16p-4q$.

Nach dem letzt ergangenen Urtheil der Akademie zu Paris über den Magneten ist meiner pièce der dritte Theil des dreyfachen Preises zuerkannt worden, wie Ew. schon aus unsern Zeitungen werden ersehen haben. Hr. Bernoulli hat auch ein Drittel bekommen. Hingegen haben wir den Preis der hiesigen Akademie von 50 Ducaten, über die Winde, der pièce: *Haec ego de ventis* etc. zuerkannt, davon der auctor Hr. D'Alembert aus Paris ist.

Euler.

LETTRE XCVI.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Problème catoptrique. Suite.

Berlin d. 14. Juni 1746.

Ew. letzt überschriebene Solution des problematis catoptrici hat mich anfänglich nicht wenig frappirt, da dieselbe keine differentialia in sich enthält und ich doch versichert bin, dass die Betrachtung der Reflexion nothwendig differentialia erfordere. Als ich aber die Sach genauer erwogen, habe ich bald gesehen, dass die drey gefundenen Formuln für die Linie CR unmöglich zwey quantitates incognitas determiniren können, sondern nachdem man eine bestimmet, eine aequatio identica herauskommen müsse.

Denn in einem jeglichen triangulo CMN (Fig. 24) kann eine Seite MN allzeit in O dergestalt geschnitten werden, dass $CM + MO = CN + NO$, wodurch also keine besondere

Beschaffenheit bestimmet wird. Wenn man nun setzt $CM + MO = CN + NO = a$, $CM = \frac{a-p}{2}$, $MO = \frac{a+p}{2}$, $CN = \frac{a+v}{2}$ und $NO = \frac{a-v}{2}$, so kann daraus die Linie $CO = q$ bestimmt werden, denn es wird $qq = \frac{aa(v-p)+2apv}{2a-v+p}$ oder $qq + aq = \frac{2a(aa+pv)}{2a-v+p}$. Setzt man nun ferner $RO = z$ und den cosinum des Winkels $BRO = u$, so kann per p, v, z und a der Werth von u gefunden werden. Das intervallum z aber bleibet willkührlich, weil noch kein Umstand in Betrachtung gezogen worden, wodurch z bestimmt werden könnte. Sollen aber die Linien CM und MO, item CN und NO lege reflexionis aequaliter ad curvam inclinirt seyn, so müsste in situ proximo das punctum O unverändert bleiben, und folglich sowohl diff. $CS = 0$ als diff. $SO = 0$, wodurch das problema plus quam determinatum würde, oder vielmehr nur eine einzige lineam satisfacientem, nehmlich die ellipsin geben würde. Die Ursach davon ist diese: dass man ohne Nothwendigkeit angenommen $CM + MO = CN + NO$; da diese beiden valores auch ungleich seyn können, wenn nur ihre Summ $CM + MN + NO$ constans bleibt. Endlich ist auch hier nicht der Hauptumstand in Betrachtung gezogen worden, dass die beyden puncta M und N in eadem linea curva continua seyn müssen. Uebrigens glaube ich kaum, dass von diesem problemate eine kürzere und leichtere Solution gefunden werden könne, als diese: Sit $CMNC$ radius post geminam reflexionem ad C reversus, sumtaque pro lubitu recta CB pro axe, ad quem curvae quaesitae aequatio referatur. Vocetur $CR = r$, angulus $CRM = \varphi$, ejus sinus $= s$ et cosinus $= u$, posito radio $= 1$, ita ut sit: $ss + uu = 1$ et $d\varphi = \frac{ds}{u} = \frac{-du}{s}$. Hic angulum φ consideravi qua-

tenus ad punctum M spectat, pro puncto N autem is abibit in $\mathit{ÇRO}$, et quia in partem contrariam cadit, erit is $= -180^\circ + \varphi$, ejusque ergo sinus $= -s$ et cosinus $= -u$. Quia jam punctum R ad utrumque punctum M et N aequaliter pertinere debet, quantitatem $CR = r$ ita per s et u exprimi oportet, ut eundem valorem retineat, etiamsi pro s et u ponantur $-s$ et $-u$. Unde hujusmodi erit relatio inter r et s, u: $r =$

$$\alpha + \beta ss + \gamma su + \delta uu + \varepsilon s^4 + \zeta s^3 u + \text{etc.},$$

vel in fractionibus

$$r = \frac{\alpha + \beta ss + \gamma su + \delta uu + \varepsilon s^4 + \zeta s^3 u + \eta s^2 u^2 + \theta s u^3 + \text{etc.}}{A + Bss + Csu + Duu + Es^4 + Fs^3 u + Gs^2 u^2 + Hsu^3 + \text{etc.}}$$

vel etiam

$$r = \frac{\alpha s + \beta u + \gamma s^3 + \delta s^2 u + \varepsilon s u^2 + \zeta u^3 + \eta s^5 + \theta s^4 u + \text{etc.}}{As + Bu + Cs^3 + Ds^2 u + Esu^2 + Fu^3 + Gs^5 + Hs^4 u + \text{etc.}}$$

Quaecunque ergo hujus generis aequatio pro r definiendo assumitur, punctum R aeque respiciet utrumque punctum M et N, ac propterea puncta M et N in una eademque linea curva continua erunt sita. Superest ergo ut ex hujusmodi aequatione, inter r, s et u assumta, ipsa curva definietur, et aequatio inter coordinatas $CP = x$ et $PM = y$ eliciatur. In hunc finem consideretur reflexio proxima $CmnC$, sitque O intersectio rectarum MN et mn: atque ex natura reflexionis manifestum est fore particulam curvae Mm elementum ellipseos focis C et O, atque Nn elementum ellipseos iisdem focis C et O descriptae. Hinc ergo habebimus $CM + MO = Cm + mO$, et $CN + NO = Cn + nO$. Sed sufficit alteram tantum conditionem $CM + MO = Cm + mO$ spectasse, quia per determinationem ipsius r alterius ratio jam simul involvitur. Cum igitur sit $CR = r$, erit $Rr = dr$, et ex r in OM demisso perpendiculo rs fiet $rs = sdr$ et

$Rs = udr$. Appelletur $CM + MR = q$, erit $Cm + mr = q + dq$, ideoque ob $CM + MO = Cm + mO$, fiet $q + OR = = q + dq + Or$, seu $OR - Or = Rs = dq = udr$, ita ut hinc prodeat $q = a + \int udr = CM + MR$. Sit jam $MR = z$, erit $PM = y = sz$, $PR = uz$ et $CP = x = r - uz$, unde fit $CM = \sqrt{(rr - 2urz + zz)}$ ob $ss + uu = 1$. At est $CM = q - z$, ergo $\sqrt{(rr - 2urz + zz)} = q - z$, sumtisque quadratis: $rr - 2urz = qq - 2qz$, qua fit $z = \frac{qq - rr}{2q - 2ur}$. Assumto ergo valore quocunque idoneo pro r, in s et u expresso, hinc quaeratur $q = a + \int udr$, porroque $z = \frac{qq - rr}{2q - 2ur}$, quibus inventis erit $x = r - uz$ et $y = sz$, sicque habebitur curva problemati satisfaciens, quae quidem erit transcendens, si formula $\int udr$ algebraice exprimi nequeat. Ad curvas ergo algebraicas inveniendas ejusmodi functionem pro r eligi oportet ut formula $\int udr$ fiat integrabilis, quod quidem hoc modo generaliter praestari potest: Cum sit $\int udr = ur - \int rdu$, ponatur $\int rdu = v$, fietque $r = \frac{dv}{du}$. Quo igitur r fiat functio parium dimensionum ipsarum s et u, ut supra requirebatur, necesse est ut v sit functio imparium dimensionum ipsarum s et u seu talis, quae abeat in $-v$, si pro s et u ponantur $-s$ et $-u$. Hujusmodi ergo functione pro v assumta, erit $r = \frac{dv}{du}$, ubi ob $ds = -\frac{udu}{s}$, differentialia destruentur, ita ut r fiat quantitas finita algebraica. Inventa autem r erit $\int udr = ur - v$ et $q = a + ur - v$ atque $z = \frac{qq - rr}{2q - 2ur}$, ex quibus denique elicientur coordinatae $CP = x = r - uz$ et $PM = y = sz$, ambae per s et u expressae, unde curva construi et aequatio inter x et y eliminandis s et u ope $ss + uu = 1$, erui poterit.

Ex. gr. Cum v debeat esse functio imparium dimensionum ipsarum s et u, assumatur $v = bs + cu$, erit

$$dv = bds + cdu = \frac{-budu}{s} + cdu$$

atque $r = \frac{-bu}{s} + c$. Tum $q = a - \frac{buu}{s} - bs = a - \frac{b}{s}$; porro ob $qq = aa - \frac{2ab}{s} + \frac{bb}{ss}$ et $rr = \frac{bbuu}{ss} - \frac{2bcu}{s} + cc$, erit

$$z = \frac{aa - \frac{2ab}{s} + bb + \frac{2bcu}{s} - cc}{2a - 2bs - 2cu},$$

seu

$$z = \frac{(aa + bb - cc)s - 2ab + 2bcu}{2s(a - bs - cu)}.$$

Unde fiunt coordinatae

$$CP = x = \frac{2ac - 2bcs - (aa - bb + cc)u}{2(a - bs - cu)},$$

$$PM = y = \frac{-2ab + 2bcu + (aa + bb - cc)s}{2(a - bs - cu)},$$

unde eliminandis s et u, aequatio resultat inter x et y duarum tantum dimensionum, qua natura ellipsis ad rectam quamcunque per focum C tanquam axem relata exprimitur. Si sit $b = 0$, recta CB per alterum quoque focum transibit.

Letztens habe gefunden, dass diese expressio $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ einen valorem realem habe, welcher in fractionibus decimalibus $= 0,2078795763$, welches mir merkwürdig zu seyn scheinet.

Euler.

LETTRE XCVII.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Mêmes sujets. Réponse aux lettres précédentes.

St. Petersburg d 5. Juli 1746.

Dass Ew. einen Theil des neulich distribuirten Preises von Paris bekommen würden, hatte ich zwar fest vermuthet, habe aber die eigentliche Nachricht davon nicht eher als aus Dero letztem Schreiben bekommen, wie mir denn auch die dritte Person, so an diesem Preise Theil gehabt, bis dato unbekannt ist. Die zum künftigen praemio bey der Parisischen académie des sciences ausgesetzte Frage gibt mir auch vor Ew. sehr gute Hoffnung. Ich bitte mir bey Gelegenheit zu melden, wie viel mal Dero pièces schon bey selbiger académie victorieuses gewesen sind?

Es gehöret meines Erachtens schon eine ziemliche Fertigkeit dazu, dass man aus der serie $x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1\,3}{2.4}x^5 -$ etc.

die summam $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{5}{8} -$ etc. nach Ew. Methode finde, und von der serie

$$1 + \frac{n}{4} + \frac{n(n+3)}{4.8} + \frac{n(n+4)(n+5)}{4.8.12} + \text{etc.}$$

habe ich folgendes angemerket: Wenn man setzet

$$2^n = 1 + \beta n + \gamma nn + \delta n^3 + \text{etc.},$$

so ist kein Zweifel, dass die quantitates β, γ, δ, etc. ihre determinatos valores haben, wie denn ex. gr. $\beta =$ ist $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} +$ etc.; machet man aber series, in deren terminis immer mehr potestates ipsius n vorkommen, so werden zwar die series, aus welchen die quantitates β, γ, δ, etc. bestehen, (wie solches in der serie $1 + \frac{n}{4} + \frac{n(n+3)}{4.8} +$ etc. $= 2^n$ geschiehet) gleichsam mit einander verwickelt, aber diese quantitates an sich selbst bleiben nichts desto weniger invariabiles. So oft also dergleichen series, wo die quantitas indeterminata n in jedem termino ad diversas potestates evecta ist, vorkommen, so meine ich der sicherste Weg die summam zu finden wäre, dass man zuvorderst die coëfficientes β, γ, δ, etc. suche.

Bey Gelegenheit des von Ew. gefundenen valoris vor $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ ist mir etwas eingefallen, an dessen Möglichkeit ich noch den Tag zuvor sehr würde gezweifelt haben, nemlich dass auch diese series $A \ldots \alpha a - \beta a^4 + \gamma a^9 - \delta a^{16} +$ etc. und generatim alle, wo die exponentes numeri a ad formulam generalem reduciret werden können, summabiles sind, nachdem die coëfficientes α, β, γ, etc. determiniret werden, denn wenn gesetzt wird

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \text{etc.}$$

$$\beta = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1.3}{2.4} + 3 \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} + 4 \cdot \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} + \text{etc.}$$

$$\gamma = 1 \cdot \frac{1.3}{2.4} + 3 \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} + 6 \cdot \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} + 10 \cdot \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10} + \text{etc.}$$

$$\delta = 1 \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} + 4 \cdot \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} + 10 \cdot \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10} + 20 \cdot \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12} + \text{etc.}$$

etc.

so ist die series $A = a^{\frac{1}{4}}$, und nach eben denselben valoribus pro α, β, γ, δ, etc. wird

$$B \ldots \alpha a^{a} - \beta a^{2a^2} + \gamma a^{3a^3} + \delta a^{4a^4} + \text{etc.} = \sqrt{a^{\sqrt{a}}} = a^{\frac{a^{\frac{1}{2}}}{2}}.$$

Meine continuirliche distractions sind zum Theil daran Schuld, dass sich in meine Briefe manche Fehler einschleichen, die ich wohl verhüten könnte; und so ist es auch mit meinem letzten *P. S.* ergangen, indem ich bey genauerer Betrachtung desselben noch vor Ankunft Ew. Schreibens bemerket, dass beyde quantitates u und z auf solche Art nicht eliminirt werden können, sondern eine davon übrig bleibet, wie denn die drey valores von u, so durch selbige drey aequationes gefunden werden, nichts anders sind, als (posito $m = 2a + p - v$), $\frac{(av + ap - mz)^2}{mmqq - 2a(p+v)mz + mmzz} = uu$.

Die Solution, welche Ew. in Dero letztem Schreiben anführen, hat wegen ihrer Kürze und Deutlichkeit fur den vorigen, in meinen Augen einen grossen Vorzug; nur dieses scheinet mir noch bedenklich: dass, weil das differentiale von $RO = -dq$ und folglich $CM + MO =$ constanti, wenn dieses constans a gesetzt wird, nicht nur Mm ein elementum ellipseos, sondern die ganze curva quaesita eine ellipsis seyn wird, deren axis durch die focos C und O gehet und $= a$ ist, nur mit dem Unterschiede, dass die abscissae CP und die applicatae MP (wie sie von Ew. durch r und u

bestimmet sind) nicht ad ipsum axem curvae, sondern ad rectam positione datam et per focum C productam genommen werden müssen, es mag im übrigen r eine functionem quamcunque ipsius u andeuten.

Wenn man von nachfolgender serie

$$1 + \frac{5}{3} + \frac{43}{3.5} + \frac{531}{3.5.7} + \frac{8601}{3.5.7.9} + \text{etc.},$$

deren lex progressionis diese ist, dass dato termino quocunque A et exponente ejus x, der terminus sequens sey $B = \frac{4xA+1}{2x+1}$, die formulam generalem geben könnte, dürfte man nur in dem termino generali setzen $x = \frac{1}{2}$, so würde die area circuli, cujus diameter $= 1$, herauskommen.

Goldbach.

LETTRE XCVIII.

EULER à GOLDBACH

SOMMAIRE. Mêmes sujets.

Berlin d. 26. Juli 1746

— — Für Dero hochgeneigte Gratulation zu dem erhaltenen Theil des Pariser Preises statte allen gehorsamsten Dank ab. Dieses war das vierte Mal, dass ich etwas von diesem Preis bekommen. Auf das künftige Jahr, da die Frage von Findung der Zeit durch himmlische Beobachtungen zur See vorgelegt ist, habe ich auch schon eine pièce hingeschickt. Die Frage aber für 1748 ist meines Erachtens so schwer, dass ich noch nicht weiss, ob ich im Stande seyn werde etwas darüber zu verfertigen; indessen wollte ich mir von Ew. dazu eine schöne Devise gehorsamst ausgebeten haben.

Dass die Summ dieser seriei

$$1 + \frac{n}{4} + \frac{n(n+3)}{4.8} + \frac{n(n+4)(n+5)}{4.8.12} + \text{etc.}$$

gleich ist 2^n, hatte ich auf eine sehr weitläufige Art herausgebracht, und kam mir um so viel merkwürdiger vor, weil ich solches durch keine mir bekannte Methode füglich beweisen konnte. Auf eine ähnliche Weise habe ich seit der Zeit gefunden, dass diese series:

$$1 + \frac{n}{4}x^2 + \frac{n(n+3)}{4.8}x^4 + \frac{n(n+4)(n+5)}{4.8.12}x^6 + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4.8.12.16}x^8$$
$$+ \text{etc.} = 2^n\left(\frac{1-\sqrt{(1-xx)}}{xx}\right)^n,$$

welche series, wenn $x=1$, in die vorige verwandelt wird. Setzt man $xx = \frac{1}{2}$, so wird

$$1 + \frac{n}{8} + \frac{n(n+3)}{8.16} + \frac{n(n+4)(n+5)}{8.16.24} + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{8.16.24.32} + \text{etc.}$$
$$= (4 - 2\sqrt{2})^n.$$

Wollte man aber, um die Summ dieser seriei zu finden, alle coëfficientes evolviren und die seriem nach den Potestäten des n rangiren, so würde man auf so sehr verwirrte series kommen, dass schwerlich daraus etwas zu finden seyn würde. Denn wenn man z. Ex. setzt

$$A \ldots\ldots 1 + \frac{n}{4} + \frac{n(n+3)}{4.8} + \frac{n(n+4)(n+5)}{4.8.12} + \text{etc.} =$$
$$1 + \beta n + \gamma n^2 + \delta n^3 + \varepsilon n^4 + \text{etc.}$$

so wird

$$\beta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4.8} + \frac{4.5}{4.8.12} + \frac{5.6.7}{4.8.12.16} + \frac{6.7.8.9}{4.8.12.16.20} + \text{etc.}$$

welche series negative sumta $(-\beta)$ den terminum exponentis $\frac{1}{2}$ in dieser serie ausdrückt

$$\overset{\frac{1}{2}}{-\beta};\ \overset{1}{0};\ \overset{2}{\frac{1}{2}};\ \overset{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}};\ \overset{4}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}};\ \overset{5}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}};$$

$$\overset{6}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}};\ \text{etc.}$$

folglich ist der terminus indicis $\frac{3}{2} = -\beta + 1$, der terminus indicis $\frac{5}{2} = -\beta + 1 + \frac{1}{3}$, und der terminus indicis

$$(\infty + \tfrac{1}{2}) = -\beta + 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \text{etc.};$$

der terminus indicis ∞ aber ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \text{etc.}$ Da nun lege seriei die termini infinitesimi einander gleich seyn müssen, so wird

$$\beta = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \text{etc.},$$

wie Ew. angemerket. Dieses gibt sich aber aus der Summ der seriei A, welche ist $= 2^n$; denn, wenn $l2$, oder

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \text{etc.}$$

gesetzt wird $= \beta$, so ist

$$2^n = 1 + \beta n + \frac{\beta^2 n^2}{1.2} + \frac{\beta^3 n^3}{1.2.3} + \frac{\beta^4 n^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

folglich ist in der angenommenen Form

$1 + \beta n + \gamma n^2 + \delta n^3 + \varepsilon n^4 + \text{etc.}$, $\gamma = \frac{1}{2}\beta^2$, $\delta = \frac{1}{6}\beta^3$, etc.,

welches aus der serie A selbst schwerlich würde herausgebracht werden können.

Gleiche Schwierigkeit würde man finden, wenn man auf diese Art die Summ dieser seriei suchen wollte

$$B \ldots\ldots 1 + \frac{n^2}{1.2} + \frac{n^2(n^2+4)}{1.2.3.4} + \frac{n^2(n^2+4)(n^2+16)}{1.2\ldots6}$$
$$+ \frac{n^2(n^2+4)(n^2+16)(n^2+36)}{1.2\ldots8} + \text{etc.}$$

Wenn $\pi = 3{,}14159$ etc. und

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2\ldots6} + \text{etc.}$$

so ist die Summ dieser seriei

$$B = \tfrac{1}{2}\, e^{\frac{1}{2}n\pi} + \tfrac{1}{2}\, e^{-\frac{1}{2}n\pi}.$$

Hingegen ist diese series

$$C \cdots\cdots 1 + \frac{n^2}{1.2} + \frac{n^2(n^2+1)}{1.2.3.4} + \frac{n^2(n^2+1)(n^2+4)}{1.2\ldots 6}$$

$$+ \frac{n^2(n^2+1)(n^2+4)(n^2+9)}{1.2\ldots 8} + \text{etc.} = \frac{1}{2}\, e^{\frac{1}{2}n\pi} + \frac{1}{2}\, e^{-\frac{1}{2}n\pi},$$

oder es ist

$$C = 1 + \frac{n^2\pi^2}{3.6} + \frac{n^4\pi^4}{3.6.9.12} + \frac{n^6\pi^6}{3.6.9.12.15.18} + \text{etc.}$$

folglich hat man

$$\frac{\pi^2}{18} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1.2}{3.4.5.6} + \frac{1.2.3}{4.5.6.7.8} + \frac{1.2.3.4}{5.6.7.8.9.10} + \text{etc.}$$

und

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{8} + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}\cdot\frac{1}{10} + \text{etc.}$$

Ew. Erfindung von der Summ solcher serierum

$$\alpha a - \beta a^4 + \gamma a^9 - \delta a^{16} + \text{etc.}$$

wenn α, β, γ, δ, etc. gewisse Werthe haben, ist ungemein sinnreich. Ich habe zwar bald gesehen, dass solche series herauskommen, wenn man den terminum exponentis $\frac{1}{2}$ in dieser serie a^1, a^4, a^9, a^{16} etc., welcher ist $\sqrt[4]{a}$, auf gewöhnliche Art suchet; allein es ist zu bedauern, dass alle diese coëfficientes α, β, γ, δ, etc. unendlich werden, indem $\alpha = (1-1)^{-\frac{1}{2}}$, $\beta = \frac{1}{2}(1-1)^{-\frac{3}{2}}$, $\gamma = \frac{1.3}{2.4}(1-1)^{-\frac{5}{2}}$, $\delta = \frac{1.3.5}{2.4.6}(1-1)^{-\frac{7}{2}}$ etc. werden.

Der Zweifel, welchen Ew. gegen meine Solution des bekannten problematis catoptrici zu machen belieben, als wenn dieselbe nur allein die ellipsin gäbe, wird dadurch leicht gehoben, wenn man betrachtet, dass (Fig. 25) das punctum O nicht constans, sondern variabile angenommen wird, indem es ein punctum in caustica EOo ist. Denn, ungeacht ex natura

reflexionis ist $CM + MO = Cm + mO$, so ist doch nicht diff. $(CM + MO) = o$, sondern $= Oo$, und also $CM + MO = \text{Const.} + \text{arcu causticae } EO$, welche Eigenschaft allen causticis gemein ist. Uebrigens geben meine Formuln solche curvas, welche offenbar keine ellipses sind. Es ereignet sich hier nehmlich eben der Fall, als bey Untersuchung des radii osculi MO einer krummen Linie AM (Fig. 26). Denn ungeacht $MO = mO$, so folgt doch nicht, dass diff. $MO = 0$, noch dass $MO = \text{Const.}$, sondern weil das punctum O variabile, nehmlich in evoluta ist, so ist diff. $MO = mo - MO = Oo$ und also $MO = \text{Const.} + \text{arcu evolutae } EO$.

Wenn von der serie $1 + \frac{5}{3} + \frac{43}{3.5} + \frac{531}{3.5.7} + \frac{8601}{3.5.7.9} + \text{etc.}$ der terminus ordine $\frac{1}{2}$ gesucht wird, so wird derselbe $= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}$, aus welcher Betrachtung Ew. ohne Zweifel jene seriem gefunden. Es ist aber merkwürdig, dass die lex progressionis sich so bequem ausdrücken lässt.

Stirling hat angemerkt, dass die Summ von dieser serie

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+1)} + \frac{u(u+1)}{t(t+1)(t+2)} + \frac{u(u+1)(u+2)}{t(t+1)(t+2)(t+3)} + \text{etc.}$$

$$\text{sey} = \frac{1}{t-u},$$

ich habe aber gefunden, dass diese series noch weit generaler gemacht werden kann

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)} + \frac{u(u+a)(u+b)}{t(t+a)(t+b)(t+c)} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{t-u},$$

wenn nur a, b, c, d, etc. dergestalt fortgehen, dass

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \text{etc.}$$

eine summam infinitam ausmachen. Da nun solches geschieht, wenn a, b, c, d, etc. numeri primi sind, so kann man sagen, dass z. Ex.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2.4}+\frac{1.3}{2.4.5}+\frac{1.3.4}{2.4.5.7}+\frac{1.3.4\ 6}{2.4.5.7.9}+\text{etc.}=1,$$

oder dass

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{4.5}+\frac{3.4}{4.5.7}+\frac{3.4.6}{4.5.7.9}+\frac{3.4.6.8}{4.5.7.9.13}+\text{etc.}=1.$$

wo die factores der Zähler sind numeri primi $+1$, die factores der Nenner aber numeri primi $+2$.

Euler.

LETTRE XCIX.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Mêmes sujets.

St. Petersburg d. 27. August 1746.

So oft in den summis serierum selbst quantitates per series infinitas exprimendae vorkommen, mögen die coëfficientes ipsius n wohl aus sehr schweren seriebus bestehen; dass aber die series

$$\beta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4\,8} + \frac{4.5}{4.8.12} + \text{etc.} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.}$$

hatte ich auf eine von Ew. Methode sehr unterschiedene Art, und sogar ohne die terminos $\frac{1}{4} + \frac{3}{4.8} + \text{etc.}$ zu evolviren, aus diesem einigen raisonnement gefunden: Weil

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} + \text{etc.}$$

und in dieser serie der coëfficiens ipsius n ist

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \div \frac{1}{4} + \text{etc.},$$

so muss er auch in allen seriebus welche $= 2^n$ sind, eben denselben valorem haben. Nun zweifelte ich im geringsten nicht, dass die von Ew. angeführte series nicht recht sollte summiret sèyn, und konnte dahero den valorem β mit grosser Gewissheit angeben.

Dass die in meinem vorigen angenommenen quantitates α, β, γ, etc. unendliche valores andeuten, habe ich wohl gewusst, und zweifle sehr ob es möglich ist, an deren Stelle valores finitos zu substituiren; warum aber $\alpha = (1 - 1)^{-\frac{1}{2}}$, $\beta = \frac{1}{2}(1 - 1)^{-\frac{3}{2}}$ etc. sehe ich noch nicht ein.

Dass das punctum O (Fig. 27) nicht anders als in der ellipsi fixum seyn könnte, hatte ich zwar gesehen, aber ohne genugsame Betrachtung vermeinet, dass weil OR in situ proximo in Or verwandelt würde, auch $RS = dq$ das differentiale von OR wäre, folglich $CM + MO$ eine constans und die ganze curva eine ellipsis seyn müsste; nach dem von Ew. gegebenen éclaircissement aber ist es deutlich, dass Oo das diff. von $CM + MO$ sey, und dahero RO in situ proximo ro werde, so dass, wenn $RO = w$, $ro = w - dq + Oo$ seyn muss. Es ergibt sich auch aus dieser Figur, dass wenn CR ein maximum ist, die puncta O und R in axe zusammenkommen, und so oft dieses geschiehet $CM = CN$ seyn müsse.

Die summa seriei

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)} + \frac{u(u+a)(u+b)}{t(t+a)(t+b)(t+c)} + \text{etc.} = A$$

lässt sich folgendergestalt finden: Sit $b = c = d = \text{etc.} = 0$ erit ipsa series A

$$= \frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)}\left(\frac{1}{t} + \frac{u}{tt} + \frac{uu}{t^3} + \frac{u^3}{t^4} + \text{etc.}\right)$$

hoc est, ob $\frac{1}{t}+\frac{u}{tt}+\frac{uu}{t^3}+\frac{u^3}{t^4}+$ etc. $=\frac{1}{t-u}$, erit

$$A=\frac{1}{t}+\frac{u}{t(t+a)}+\frac{u(u+a)}{t(t+a)(t-u)}=\frac{1}{t-u}.$$

Sit $c=d=e=$ etc. $=0$, erit ipsa series

$$A=\frac{1}{t}+\frac{u}{t(t+a)}+\frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)}$$

$$+\frac{u(u+a)(u+b)}{t(t+a)(t+b)}\left(\frac{1}{t}+\frac{u}{tt}+\frac{uu}{t^3}+\frac{u^3}{t^4}+\text{etc.}\right),$$

seu

$$A=\frac{1}{t}+\frac{u}{t(t+a)}+\frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)}+\frac{u(u+a)(u+b)}{t(t+a)(t+b)(t-u)}=\frac{1}{t-u}.$$

Eben diese Eigenschaft haben c, d, e et alii *lusus naturae*, wenn sie so weit als man will reales, alle übrige aber $=0$ gesetzt werden.

Goldbach.

LETTRE C.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Mémoire sur les perturbations de Saturne et de Jupiter Théorie de la Lune. Réponse à la lettre précédente.

Berlin d. 20 September 1746.

——— Für die mir gütigst überschickten Devisen zu meiner künftigen pièce über die Verwirrungen der Bewegungen des ♄ und ♃ statte allen gehorsamsten Dank ab. Solche schicken sich vollkommen auf die Art meiner Abhandlung. Ich habe davon die mittlere erwählet, als welche mir mit meinem Vortrag auf das Genaueste übereinzukommen schien. Ich habe dabey jetzt alle Schwierigkeiten fast gänzlich überwunden, welche von einer ganz andern Art sind, als die, so ich bey dem Mond angetroffen; denn der Saturnus behält beinahe eben die Bewegung, als wenn er von der Sonne allein angezogen würde, und wird nur von dem Jupiter etwas wenig verwirrt, dahingegen die Bewegung des Monds

sich grossentheils nach der Kraft der Erde richtet und von der Kraft der Sonne etwas geändert wird. Beide Fälle haben dieses gemein, dass die Verwirrungeu sehr klein sind, und eben dieses ist das einzige Mittel die Schwierigkeiten der Rechnung zu überwinden, indem die ganze Sach auf Approximationen ankommt. Es wären aber casus möglich, wo man auf keine Art die Bewegung eines Planeten würde bestimmen können. Es ist klar, wenn der Mond sehr viel weiter von der Erde entfernt wäre, derselbe alsdann kein satelles der Erde mehr seyn, sondern als ein planeta primarius seinen Lauf um die Sonne verrichten, dabey aber von der Erde einige Verwirrung, wie der Saturnus vom Jupiter, leiden würde; welche Bewegung noch könnte bestimmt werden. Wenn aber der Mond von der Erde nur so weit entfernet wäre, dass die beiden Kräfte der Sonne und der Erde einander beinahe gleich würden, und der Mond also weder ein planeta primarius noch ein satelles der Erde seyn könnte, so würde seine Bewegung so irregulär seyn, dass dieselbe auf keinerley Art und Weise bestimmt werden könnte. Es ist demnach ein grosses Glück für die Astronomie, dass sich kein solcher Fall in unserm systemate planetario befindet. Wenn der Mond, anstatt dass er jetzt ungefähr 60 radios telluris von uns entfernt ist, etwa 300 radios weit weg wäre, so würde sich der erwähnte Fall ereignen. — Hernach habe ich auch angemerkt, dass wenn der Mond bey seiner gegenwärtigen Entfernung nur entweder eine grössere Excentricität hätte, oder seine orbita nach einem weit grösseren Winkel auf die Ecliptic inclinirt wäre, auch alle bisherige Kunstgriffe nicht hinreichend seyn würden, seinen Ort nur ungefähr voraus zu bestimmen. Da sich nun auch dieser Fall nicht in unserm

systemate befindet, so scheinet es allerdings, dass die Einrichtung dieses systematis nach den Gränzen unserer Erkenntniss gemacht worden, und dass sich vielleicht solche Fälle nur in andern systematibus, wo die Einwohner einen höhern Verstand und tiefere Einsicht in die analysin besitzen, befinden. Denn nach der lege mutuae gravitationis, wornach sich alle Bewegungen in der Welt zu richten scheinen, beruhet die Bestimmung der Bewegung solcher Cörper auf der Integration einiger Differentio-differential-Aequationen, und kommt also die ganze Sach auf unsere Fähigkeit in der analysi an.

Dass die coëfficientes α, β, γ, δ, etc. bey Ew. neulich überschriebenen Formul nicht nur alle infiniti werden, sondern auch per potestates negativas des binomii $1-1$ ausgedrückt werden können, habe ich also gefunden: Es sey vorgelegt diese series:

$$a^A,\ a^B,\ a^C,\ a^D,\ a^E,\ a^F,\ \text{etc.}$$

wovon der terminus indici x respondens seyn soll a^X, so wird

$$a^X = a^A + \frac{x-1}{1}(a^B - a^A) + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2}(a^C - 2a^B + a^A)$$
$$+ \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3}(a^D - 3a^C + 3a^B - a^A) + \text{etc.}$$

Es sey $\frac{x-1}{1} = \mathfrak{A}$, $\frac{(x-1)(x-2)}{1.2} = \frac{x-2}{2}\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, $\frac{x-3}{3}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, $\frac{x-4}{4}\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$ etc., so wird

$$\begin{aligned} a^X = a^A & (1 - \mathfrak{A} + \mathfrak{B} - \mathfrak{C} + \mathfrak{D} - \text{etc.}) \\ & + a^B (\mathfrak{A} - 2\mathfrak{B} + 3\mathfrak{C} - 4\mathfrak{D} + 5\mathfrak{E} - \text{etc.}) \\ & + a^C (\mathfrak{B} - 3\mathfrak{C} + 6\mathfrak{D} - 10\mathfrak{E} + 15\mathfrak{F} - \text{etc.}) \\ & + a^D (\mathfrak{C} - 4\mathfrak{D} + 10\mathfrak{E} + 20\mathfrak{F} - 35\mathfrak{G} - \text{etc.}) \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

Wenn also gesetzt wird

$$a^X = \alpha a^A + \beta a^B + \gamma a^C + \delta a^D + \text{etc.}$$

so wird

$$\alpha = 1 - \frac{(x-1)}{1} + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2} - \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$= (1-1)^{x-1},$$

wie aus der Evolution erhellt

$$\beta = \frac{(x-1)}{1} - \frac{2(x-1)(x-2)}{1.2} + \frac{3(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3} - \text{etc.}$$

$$= (x-1)\left(1 - \frac{(x-2)}{1} + \frac{(x-2)(x-3)}{1.2} - \text{etc.}\right)$$

$$= (x-1)(1-1)^{x-2},$$

$$\gamma = \frac{(x-1)(x-2)}{1.2}\left(1 - \frac{3(x-3)}{3} + \frac{6(x-3)(x-4)}{3.4} - \frac{10(x-3)(x-4)(x-5)}{3.4.5} + \text{etc.}\right)$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)}{1.2}(1-1)^{x-3},$$

$$\delta = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3}(1-1)^{x-4} \text{ etc.}$$

Man darf also nur jetzt setzen $x = \frac{1}{2}$.

Ew. Demonstration, dass

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)} + \text{etc.} = \frac{1}{t-u}$$

ist meines Erachtens die einzige, wodurch dieser lusus naturae bewiesen werden kann. Inzwischen, wenn für a, b, c, etc. t und u determinirte Zahlen angenommen werden, so bekommt man öfters series, deren Summation man nicht vermuthen sollte.

Euler.

LETTRE CI.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Sur la série des lettres précédentes.

St Petersburg d. 25. October 1746.

Die Nachricht, so Ew. aus Petersburg bekommen, dass Ihre Kais. Majestät mich mit ansehnlichen Gütern in Liefland begnadiget, ist in so weit gegründet, dass Höchst Dieselben mir das Gut Wolmarshof, welches jährlich 1400 R° Arende trägt, ad dies vitae Allergnädigst geschenkt haben. Was aber die akademischen Angelegenheiten betrifft, so habe ich mich derselben schon seit A. 1742 gänzlich entschlagen.

In der serie $\frac{1}{t}+\frac{u}{t(t+a)}+\frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)}+$ etc. finden sich zwey Eigenschaften: 1. dass man dadurch, data summa et datis quibuscunque terminis ab initio, die seriem, cujus summa data est, finden kann; 2. dass man von unzähligen seriebus demonstriren kann, dass ihre summae unendlich

gross sind, welches ohne dieses adminiculum sehr schwer seyn würde, z. Ex. wenn ich singulos terminos seriei

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)} + \text{etc.}$$

aequales setze singulis terminis hujus:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.} = \pi,$$

und alsdann alle quantitates a, b, c, etc. durch u et constantes determinire, so muss folgen, dass die series

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \text{etc.}$$

nur in dem einen casu unendlich gross werde, wenn

$$u = \frac{t\pi - 1}{\pi}.$$

Goldbach.

LETTRE CII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Théorie du mouvement de la Lune. Tables du mouvement de Saturne. Suite sur la série précédente.

Berlin d. 29. November 1746.

— — — Ich hoffe nächstens allhier meine neue theoriam motus Lunae unter die Presse geben zu können, und glaube dieselbe so weit gebracht zu haben, dass man durch Hülfe meiner daraus verfertigten tabularum, den locum Lunae jederzeit so genau bestimmen kann, dass der Fehler niemals über 100 Secunden austrägt, da nach den Cassinianischen Tabellen der Fehler sich bisweilen auf 15′, nach den besten englischen aber auf 6′ belaufen kann.

Ich werde jetzt auch anfangen neue tabulas motus Saturni zu verfertigen, nachdem ich die perturbationem a Jove oriundam bestimmt. Dieses ist um so viel nöthiger, da M. le Monnier in seinem Werk: *Introduction dans l'Astronomie*

bemerket, dass der locus ♄ computatus nach den besten Tabellen bisweilen um einen halben Grad a loco observato differire.

Dass man vermittelst der series

$$\frac{1}{t-u} = \frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)} + \text{etc.}$$

eine seriem angeben kann, deren summa data und termini quotvis ab initio gleichfalls dati sind, scheinet freylich dem ersten Anblick nach sehr merkwürdig zu seyn. Wenn man aber bedenket, dass die daher entstehende series nicht regulär seyn werde, so lässt sich eben dieses auf unendlich viel andere Manieren gleichfalls bewerkstelligen. Als, ich wollte eine seriem geben, deren Summ $= S$ und deren 6 erste termini seyn sollen $a + b + c + d + e + f$, so suche ich eine seriem quamcunque, deren Summ $= S$; solche sey $S = A + B + C + D + E +$ etc. Hernach wird seyn

$$S = \overset{1}{a} + \overset{2}{b} + \overset{3}{c} + \overset{4}{d} + \overset{5}{e} + \overset{6}{f} + (A \overset{7}{-} a) + (B \overset{8}{-} b) + (C \overset{9}{-} c)$$
$$+ (D \overset{10}{-} d + (E \overset{11}{-} e) + (F \overset{12}{-} f) + \overset{13}{G} + \overset{14}{H} + \text{etc.}$$

Was die andere Eigenschaft der angeführten seriei betrifft, dass man aus derselben von unzählig viel seriebus beweisen kann, dass ihre Summ unendlich gross sey, scheint ebenfalls sehr merkwürdig zu seyn, allein bey der würklichen Application kommt man immer auf solche series, wo die Sach vor sich selbst klar vor Augen liegt. Denn wenn die series $\frac{1}{t-u} = \frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)} +$ etc. wahr ist, so muss der terminus infinitesimus $\frac{u(u+a)(u+b)(u+c)\text{ etc.}}{t(t+a)(t+b)(t+c)\text{ etc.}} = 0$ seyn, welches geschiehet, wenn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \text{etc.} = \infty$. Vergleicht man nun diese seriem mit einer vorgelegten serie $S = A + B + C + D + E + F +$ etc., so wird $t = \frac{1}{A}$,

$u = \frac{S-A}{AS}$ und ferner $a = \frac{1}{B} - \frac{1}{A} - \frac{A}{BS}$, $b = \frac{1}{C} - \frac{1}{A} - \frac{(A+B)}{CS}$, $c = \frac{1}{D} - \frac{1}{A} - \frac{(A+B+C)}{DS}$ etc., folglich wird $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} +$ etc. $=$

$$\frac{ABS}{A(S-A)-BS} + \frac{ACS}{A(S-A-B)-CS} + \frac{ADS}{A(S-A-B-C)-DS} + \frac{AES}{A(S-A-B-C-D)-ES} + \text{etc.}$$

Wenn nun die summa seriei vera ist, so ist

$$S - A - B - C - D - \text{etc.} = 0$$

und werden folglich hier alle termini infinitesimi $=$

$$\frac{AZS}{A.o - ZS} = - A,$$

folglich alle finitae magnitudinis. Dieses erhellet noch deutlicher aus der Form $\frac{u(u+a)(u+b)(u+c)\text{ etc.}}{t(t+a)\ t+b)(t+c)\text{ etc.}}$, welche bey dieser Application wird

$$\frac{S-A}{S} \cdot \frac{S-A-B}{S-A} \cdot \frac{S-A-B-C}{S-A-B} \cdot \frac{S-A-B-C-D}{S-A-B-C} \text{ etc.}$$

und folglich wird der Werth, continuatione in infinitum instituta $= \frac{S-A-B-C-D-E-\text{etc.}}{S}$, welcher augenscheinlich, im Fall die Summ wahr ist, gleich 0 wird.

Es ist ein Mathematicus in Ostfriesland Namens Jacobus Adami, welcher mich neulich um die interpolationem hujus seriei gefraget

$$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \text{etc.} = s,$$

welche series die tangentem arcui x respondentem exprimirt und entstehet ex conversione hujus seriei

$$x = s - \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{5}s^5 - \frac{1}{7}s^7 + \frac{1}{9}s^9 - \text{etc.}$$

Ich habe ihm darauf geantwortet, dass der terminus medius inter primum x et secundum $\frac{1}{3}x^3$ sey

$$\frac{16}{\pi^3}x^2\left(1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}+\text{etc.}\right)$$

Hernach ist der terminus medius inter secundum $\frac{1}{3}x^3$ et tertium $\frac{2}{15}x^5 =$

$$\frac{64}{\pi^5}x^4\left(1+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}+\text{etc.}\right)$$

Ferner ist der terminus medius inter tertium $\frac{2}{15}x^5$ et quartum $\frac{17}{315}x^7 = \frac{256}{\pi^7}x^6\left(1+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{5^7}+\frac{1}{7^7}+\frac{1}{9^7}+\text{etc.}\right)$.

Euler.

LETTRE CIII.

═

Euler à Goldbach.

Sommaire. Loi d'après laquelle procèdent les sommes des diviseurs des nombres naturels.

Berlin d. 1. April 1747.

— — Letztens habe ich eine sehr wunderbare Ordnung in den Zahlen, welche die summas divisorum der numerorum naturalium darstellen, entdecket, welche mir um so viel merkwürdiger vorkam, da hierin eine grosse Verknüpfung mit der Ordnung der numerorum primorum zu stecken scheint. Daher bitte Ew. diesen Einfall einiger Aufmerksamkeit zu würdigen.

Wenn n einen numerum quemcunque integrum affirmativum bedeutet, so soll $\int n$ die summam omnium divisorum hujus numeri n anzeigen. Also wird seyn

$\int 1 = 1$	$\int 9 = 1 + 3 + 9 = 13$
$\int 2 = 1 + 2 = 3$	$\int 10 = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$
$\int 3 = 1 + 3 = 4$	$\int 11 = 1 + 11 = 12$
$\int 4 = 1 + 2 + 4 = 7$	$\int 12 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$
$\int 5 = 1 + 5 = 6$	$\int 13 = 1 + 13 = 14$
$\int 6 = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$	$\int 14 = 1 + 2 + 7 + 14 = 24$
$\int 7 = 1 + 7 = 8$	$\int 15 = 1 + 3 + 5 + 15 = 24$
$\int 8 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$	$\int 16 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$

etc.

Diese Bedeutung des Zeichens $\int$ vorausgesetzt, so habe ich gefunden dass

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12)$$
$$+ \int(n-15) - \int(n-22) - \int(n-26) + \text{etc.}$$

wo immer zwey Zeichen + und — auf einander folgen. Die Ordnung der abzuziehenden Zahlen 1, 2, 5, 7, 12, 15 etc. fällt aus ihren Differenzen, wenn dieselben alternatim betrachtet werden, sogleich in die Augen, als

	1,	2,	5,	7,	12,	15,	22,	26,	35,	40,
Diff	1,	3,	2,	5,	3,	7,	4,	9,	5,	11,

	51,	57,	70,	77,	92,	100,	117,	126,	145 etc.
Diff.	6,	13,	7,	15,	8,	17,	9,	19 etc.	

Ferner ist zu merken, dass man in einem jeglichen Fall, nicht mehr terminos nehmen musse, als bis man ad numeros negativos komme, und wenn ein solcher terminus $\int 0$ vorkommt, so muss dafür die vorgegebene Zahl n selbst geschrieben werden, also dass in quovis casu $\int 0 = n$. Folgende Exempel werden zur Erlauterung der Wahrheit dieses theorematis dienen:

Wenn so wird

1. $n=1;\ \int 1=\int 0=1$
2. $n=2;\ \int 2=\int 1+\int 0=1+2=3$
3. $n=3;\ \int 3=\int 2+\int 1=3+1=4$
4. $n=4;\ \int 4=\int 3+\int 2=4+3=7$
5. $n=5;\ \int 5=\int 4+\int 3-\int 0=7+4-5=6$
6. $n=6;\ \int 6=\int 5+\int 4-\int 1=6+7-1=12$
7. $n=7;\ \int 7=\int 6+\int 5-\int 2-\int 0=12+6-3-7=8$
8. $n=8;\ \int 8=\int 7+\int 6-\int 3-\int 1=8+12-4-1=15$
9. $n=9;\ \int 9=\int 8+\int 7-\int 4-\int 2=15+8-7-3=13$
10. $n=10;\ \int 10=\int 9+\int 8-\int 5-\int 3=13+15-6-4=18$
11. $n=11;\ \int 11=\int 10+\int 9-\int 6-\int 4=18+13-12\ \ 7=12$
12. $n=12;\ \int 12=\int 11+\int 10-\int 7-\int 5+\int 0=12+18-8-6+12=28$

etc.

Der Grund dieser Ordnung fällt um so viel weniger in die Augen, da man nicht sieht, was die Zahlen 1, 2, 5, 7, 12, 15 etc. für eine Verwandtschaft mit der natura divisorum haben. Ich kann mich auch nicht rühmen, dass ich davon eine demonstrationem rigorosam hätte. Wenn ich aber auch gar keine hätte, so würde man an der Wahrheit doch nicht zweifeln können, weil bis über 300 diese Regel immer eingetroffen. Inzwischen habe ich doch dieses theorema aus folgendem Satz richtig hergeleitet.

Wenn $s=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$ etc. in infinitum, so ist auch $s=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+$ etc., wo die exponentes des x eben diejenigen Zahlen sind, welche oben vorgekommen; und wenn dieser Satz seine Richtigkeit hat, wie ich nicht zweifle, ungeacht mir hier eine demonstratio rigorosa fehlt, so ist auch das angeführte theorema völlig gegründet.

Denn aus dem doppelten Werth von s bekomme ich erstlich

$$\frac{ds}{s} = \frac{-dx}{1-x} - \frac{2x\,dx}{1-x^2} - \frac{3x^2\,dx}{1-x^3} - \frac{4x^3\,dx}{1-x^4} - \frac{5x^4\,dx}{1-x^5} - \text{etc.}$$

und dann

$$\frac{ds}{s} = \frac{-dx - 2x\,dx + 5x^4\,dx + 7x^6\,dx - 12x^{11}\,dx - 15x^{14}\,dx + \text{etc.}}{1 - x - xx + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \text{etc.}}$$

folglich ist $\dfrac{1 - 2x - 5x^4 - 7x^6 + 12x^{11} + 15x^{14} - \text{etc.}}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \text{etc.}} =$

$$\frac{1}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} + \frac{3x^2}{1-x^3} + \frac{5x^4}{1-x^5} + \frac{4x^3}{1-x^4} + \frac{6x^5}{1-x^6} + \text{etc.}$$

wenn aber alle diese letzten Brüche in progressiones geometricas verwandelt werden, so bekommt man fur dieselben

$$\begin{array}{l}
1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + \text{etc.} \\
\quad + 2x \quad + 2x^3 \quad + 2x^5 \quad + 2x^7 \quad + 2x^9 \quad + 2x^{11} \\
\qquad + 3x^2 \qquad + 3x^5 \qquad + 3x^8 \qquad + 3x^{11} \\
\qquad\quad + 4x^3 \qquad\qquad + 4x^7 \qquad\qquad + 4x^{11} \\
\qquad\qquad + 5x^4 \qquad\qquad\qquad + 5x^9 \\
\qquad\qquad\quad + 6x^5 \qquad\qquad\qquad\qquad + 6x^{11} \\
\qquad\qquad\qquad + 7x^6 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + 8x^7 + 9x^8 + 10x^9 + 11x^{10} + 12x^{11} + 13x^{12} + \text{etc.}
\end{array}$$

---

das ist:

$$1 + \int 2x + \int 3x^2 + \int 4x^3 + \int 5x^4 + \int 6x^5 + \int 7x^6 + \int 8x^7 + \int 9x^8 + \int 10x^9 + \text{etc.} =$$

$$\frac{1 + 2x - 5x^4 - 7x^6 + 12x^{11} + 15x^{14} - 22x^{21} - 26x^{25} + 35x^{34} + \text{etc.}}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - \text{etc.}},$$

woraus das gegebene theorema leicht fliesst. Man sieht aber zugleich, dass dasselbe nicht so obvium ist, und dass zweifelsohne darin noch schöne Sachen verborgen liegen müssen.

Euler.

LETTRE CIV.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Théorème d'analyse. Chaque nombre est-il véritablement composé de trois nombres trigonaux?

St. Petersburg d. 15 April 1747.

Die Observation, welche Ew. mir communiciret haben, scheinet mir bereits durch die angeführte Induction dermaassen erwiesen, dass man auf deren Wahrheit hundert gegen eins halten könnte. Sonst haben Ew. schon längst angemerket, dass $A\ldots(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)$ etc. $=$ $B\ldots 1-x-xx+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+$ etc. und ich erinnere mich, dass ich daraus die an sich selbst sehr leichte conséquence gezogen, dass wenn die potestates ipsius x in B verdoppelt werden, und

$$C = 1-xx-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-x^{30}+\text{etc.}$$

gesetzt wird, alsdann

$$\frac{C}{B} = (1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\ \text{etc.}$$

seyn muss.

Von der Wahrheit eines andern theorematis bin ich bey weitem nicht so persuadiret, nehmlich dass eine jede Zahl aus dreyen trigonalibus bestehet, oder dass ein jeder numerus hujus formae $8m + 3$ eine summa trium quadratorum sey. Ew. haben mir schon vor einigen Jahren, wenn ich mich recht erinnere, gesaget, dass Fermatius selbiges seinem Berichte nach, demonstriren können; zu dergleichen Demonstration aber halte ich die inductiones für unzulänglich, weil man unzählige Exempel pro valoribus m angeben kann, die zwar zutreffen, allein zur Generalität des Satzes nichts contribuiren (als ex. gr. wenn m diese Form hat $bb + bc + cc$). Wenn man aber nur beweisen könnte, dass $(2p - 1)^2 + 42$ allezeit eine summa trium quadratorum sey (ich habe es nur bis auf den casum $p = 17$ probiret), so hielte ich davor, dass zur völligen Demonstration des theorematis ein guter Anfang gemacht seyn würde. Indessen sehe ich nicht, wie man es demonstriren will, ohne zugleich eine Methode zu finden, wodurch die tria quadrata selbst angegeben werden können. Aber zu beweisen, dass ein jeder numerus aus dreyen trigonalibus uno affirmativo et duobus negativis bestehet, ist bey weitem nicht so schwer.

Aus den Zeitungen von gelehrten Sachen ist zu ersehen, dass ein gewisser H. Mizler über Ew. Buch von der Musik Anmerkungen gemacht. Weil mir dieselben ganz unbekannt sind, so bitte mir nur mit ein paar Worten zu melden, was Sie davon halten. Die neue Logik des Hn. Knutzen, die ich auch noch nicht gesehen habe, wird in den gel. Z. sehr gerühmet

Goldbach.

LETTRE CV.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire Mêmes sujets Théorèmes de la théorie des nombres.

Berlin d. 6 Mai. 1747.

Der Anmerkung, welche Ew. über die Gleichheit

$A \ldots . (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) \text{ etc.} =$

$B \ldots . 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - \text{etc.}$

gemacht, dass, wenn

$C = 1 - x^2 - x^4 + x^{10} + x^{14} - x^{24} - x^{30} + \text{etc.},$

alsdann sey $\frac{C}{B} = (1-x)(1-x^3)(1-x^5) \text{ etc.}$, erinnere ich mich noch wohl. Ich habe aber weder daraus, noch aus andern Betrachtungen, die Gleichheit zwischen den Formuln A und B richtig darthun können; denn dass $A = B$ und dass in B die Exponenten von x just nach dieser serie 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22. 26, 35, 40, etc. fortgehen, habe ich auch nur per inductionem geschlossen, welche ich zwar so weit fortgesetzet, dass ich die Sach für völlig wahr halten kann; allein ich wäre sehr begierig davon eine demon-

strationem directam zu sehen, welche gewiss zu Entdeckung vieler anderer herrlichen Eigenschaften der Zahlen den Weg bahnen würde; bisher ist aber alle meine darauf gewandte Mühe umsonst gewesen. Gleichfalls habe ich bisher auch nicht das gemeldte theorema Fermatianum, dass eine jede Zahl eine summa trium trigonalium sey, demonstriren können, welches freylich darauf beruhet, dass eine jede Zahl von dieser Form $8m + 3$ in drey quadrata zertheilet werden könne. Ich habe aber dieses theorema auf folgendes gebracht: Proposito numero quocunque m, ab eo semper ejusmodi numerum trigonalem subtrahere licet, ut residui quadruplum unitate auctum sit numerus primus. Wenn dieses bewiesen werden könnte, so wäre auch jenes ausser Zweifel gesetzt. Von diesem aber will ich der Deutlichkeit halber etliche Exempel hersetzen:

m — trig.	resid.	4 res. + 1	m — trig	resid.	4 res. + 1	m — trig	resid.	4 res. + 1
1 — 0	1	5 pr.	4 — 0	4	17 pr.	7 — 0	7	29 pr.
1 — 1	0	1 pr.	4 — 1	3	13 pr.	7 — 1	6	25 *n. pr.*
2 — 0	2	9 *n. pr.*	4 — 3	1	5 pr.	7 — 3	4	17 pr.
2 — 1	1	5 pr.	5 — 0	5	21 *n. pr.*	7 — 6	1	5 pr.
3 — 0	3	13 pr.	5 — 1	4	17 pr.	8 — 0	8	33 *n. pr.*
3 — 1	2	9 *n. pr.*	5 — 3	2	9 *n. pr.*	8 — 1	7	29 pr.
3 — 3	0	1 pr.	6 — 0	6	25 *n. pr.*	8 — 3	5	21 *n. pr.*
			6 — 1	5	21 *n. pr.*	8 — 6	2	9 *n. pr.*
			6 — 3	3	13 pr.	9 — 0	9	37 pr.
			6 — 6	0	1 pr.	9 — 1	8	33 *n. pr.*
						9 — 3	6	25 *n pr.*
						9 — 6	3	13 pr.

Bisher triffts immer zu, dass zum wenigsten ein numerus primus herauskommt; und da in grösseren Zahlen immer mehr casus vorkommen, so ist sehr wahrscheinlich, dass sich unter denselben zum wenigsten immer ein primus befinde, oder ein solcher compositus, der ein Quadrat, oder in zwey quadrata resolubel ist. Es ist auch eben zur Demonstration des ersteren nicht nöthig, dass bey dem letztern sich unter den 4 resid. $+ 1$ ein numerus primus befinde. Wenn darunter nur entweder ein quadratum vorkommt, oder eine Zahl per nullum hujusmodi numerum $4p - 1$ divisibilis, so kann daraus die Demonstration des ersteren hergeleitet werden. Der Grund davon beruhet hierauf: ich kann nun beweisen, dass

I. Omnem numerum primum hujus formae $4n + 1$ esse summam duorum quadratorum.

II. Omnem quoque numerum non primum formae $4n + 1$, dummodo nullum habeat divisorem formae $4p - 1$, esse summam duorum quadratorum.

Es sey also $4n + 1$ vel primus vel saltem non habens divisorem formae $4p - 1$, so ist $4n + 1$ und folglich auch ejus duplum $8n + 2$ summa duorum quadratorum. Wenn also $8m + 3 = 8n + 2 + aa$, so ist $8m + 3$ in tria quadrata resolubel. Es wird also $8m + 1 = 8n + aa$; man setze $a = 2x + 1$, so wird $8m = 8n + 4xx + 4x$ und $n = m - \frac{1}{2}(xx + x)$. Denotante ergo m numerum quemcunque, wenn man nur immer von m einen solchen numerum trigonalem subtrahiren kann, dass der Rest 4 mal genommen $+ 1$ keinen divisorem formae $4p - 1$ hat, so kann $8m + 3$ in drey quadrata resolvirt werden. Dass aber eine jede Primzahl von dieser Form $4n + 1$ allzeit eine

summa duorum quadratorum sey, dafür habe ich nach langer Muhe endlich folgende Demonstration gefunden, welche sich auf verschiedene Präliminarsätze gründet, so zwar gemeiniglich für wahr angenommen werden, wovon ich doch gleichwohl noch keine gültige Demonstration gesehen, und also diese zu suchen nöthig gehabt habe.

Theor 1. Productum ex duobus numeris, quorum uterque est summa duorum quadratorum, est quoque summa duorum quadratorum.

Demonst. Sint $aa + bb$ et $cc + dd$ duo numeri propositi, erit productum $aacc + aadd + bbcc + bbdd = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$, ergo duplici modo summa duorum quadratorum. — Diese Demonstration ist zwar gemein, nicht aber die folgenden.

Theor. 2. Si summa duorum quadratorum $aa + bb$ (existentibus a et b numeris inter se primis) fuerit divisibilis per numerum primum formae $pp + qq$, tum etiam quotus, ex divisione resultans, erit summa duorum quadratorum. (Dieses theorema folget nicht aus dem vorigen nothwendig, denn man würde sich betrügen, wenn man hieraus: productum ex duobus numeris paribus est numerus par, schliessen wollte: ergo si numerus par fuerit divisibilis per numerum parem, quotus quoque erit numerus par. Wie kann man nun wissen, dass diese Art zu schliessen hier richtig ist? Dahero ist meines Erachtens folgende Demonstration nöthig.)

Demonstr. Quia $aa + bb$ est divisibilis per $pp + qq$, erit quoque $(aa + bb)pp = aapp + bbpp$ divisibile, at $aa(pp + qq)$ quoque est divisibile per $pp + qq$, ergo etiam differentia $bbpp - aaqq$ h. e. $(bp + aq)(bp - aq)$ erit per $pp + qq$ divisibile. Hinc ob $pp + qq$ numerum primum, erit vel

$bp + aq$ vel $bp - aq$ divisibile per $pp + qq$. Sit ergo $bp \mp aq = mpp + mqq$, fietque $b = mp + \frac{mqq \pm aq}{p}$. Cum igitur $mqq \pm aq$ per p divisibile esse debeat, at q et p sint necessario numeri inter se primi (alioquin $pp + qq$ non foret primus), necesse est ut $mq \pm a$ divisibile sit per p. Fiat ergo $mq \pm a = np$, erit $\pm a = np - mq$ et $b = mp + nq$. His autem valoribus substitutis prodit $aa + bb = (mm + nn)(pp + qq)$ et $\frac{aa+bb}{pp+qq} = mm + nn$. Q. E. D.

Theor. 3. Si summa duorum quadratorum $aa + bb$ (a et b existentibus perpetuo numeris inter se primis) divisibilis esset per numerum x, qui non sit summa duorum quadratorum, tum quotus vel non erit summa duorum quadratorum, vel certe factorem haberet qui non erit summa duorum quadratorum.

Demonstr. Sit quotus z et ob $\frac{aa+bb}{x} = z$, erit $\frac{aa+bb}{z} = x$. Jam si z esset primus formae $pp + qq$, tum quoque x foret ejusdem formae contra hyp. Si z esset productum ex pluribus hujusmodi primis $(pp + qq)(rr + ss)(tt + uu)$, tum ob $\frac{aa+bb}{pp+qq} = cc + dd$, $\frac{cc+dd}{rr+ss} = ee + ff$ et $\frac{ee+ff}{tt+uu} = gg + hh = \frac{aa+bb}{z}$, foret quoque $x = gg + hh$ contra hyp. Quare quotus z neque primus erit formae $pp + qq$, neque productum ex aliquot ejusmodi primis; ideoque necessario vel z non erit summa duor. quadr., vel factorem habebit qui non erit summa duor. quadr. Q. E. D.

Theor. 4. Summa duor. quadr. inter se primorum $aa + bb$ dividi nequit per ullum x, qui non ipse sit summa duor. quadratorum.

Demonstr. Ponamus x non esse summam duor. quadr., sitque $a = mx \pm c$, $b = nx \pm d$, semperque m et n ita capi poterunt ut fiat $c < \frac{1}{2}x$ et $d < \frac{1}{2}x$. Cum autem $aa + bb$ ponatur divisibile per x, erit quoque $cc + dd$ per x divisibile, et quia $cc + dd < \frac{1}{2}xx$, quotus erit $< \frac{1}{2}x$, ideoque dabitur numerus z non summa duor. quadr., per quem $cc + dd$ quoque erit divisibilis (Theor. 3). Sit iterum $c = mz \pm e$ et $d = nz \pm f$, erit $e < \frac{1}{2}z$ et $f < \frac{1}{2}z$, ideoque $ee + ff < \frac{1}{2}zz$ divisibile per z; unde quotus (per quem $ee + ff$ itidem divisibile existit) $< \frac{1}{2}z$, qui vel ipse erit *non summa* duor. quadr., vel ejusmodi habebit factorem. Dabitur ergo *non summa duor. quadr.* $< \frac{1}{2}z$ divisor ipsius $ee + ff < \frac{1}{2}zz$, sicque tandem deveniretur ad numerum *non summam duor. quadr.* minimum, puta 3, qui foret divisor summae duor. quadr $gg + hh < \frac{1}{2}g$, quod cum sit absurdum, sequitur summam duorum quadr. $aa + bb$ nullum admittere divisorem x, qui non sit ipse summa duor. quadr. Q. E. D.

Coroll. 1. Omnis ergo divisor summae duor. quadr. inter se primorum ipse est summa duor quadr., loquor autem de ejusmodi summis duor. quadr. $aa + bb$ quorum radices a et b sunt numeri inter se primi, nam si esset v. gr. $a = mx$ et $b = nx$, tum $aa + bb$ utique per quemvis numerum x divisibilis esse posset.

Coroll. 2. Qui ergo numerus x in integris non est summa duor. quadr. idem nec in fractis poterit esse summa duor. quadr. Sit enim $x = \frac{pp}{qq} + \frac{rr}{ss} = \frac{ppss + qqrr}{qqss}$, foret $qqss = \frac{ppss + qqrr}{x}$, ideoque x divisor summae duor. quadratorum

$ppss + qqrr$, ergo x quoque esse debet summa duor. quadr. in integris. Hievon hatte ich lange eine Demonstration umsonst gesucht, aber diese erst neulich gefunden, welche, wie ich glaube, zu vielen andern Sachen führen kann.

Theor. 5. Si $4n + 1$ fuerit numerus primus, tum certo erit summa duor. quadr.

Demonstr. Si enim $4n + 1$ sit numerus primus, demonstravi hanc formulam $a^{4n} - b^{4n}$ quicunque numeri pro a et b ponantur, semper fore divisibilem per $4n + 1$. Erit ergo vel $a^{2n} + b^{2n}$ vel $a^{2n} - b^{2n}$ per $4n + 1$ divisibile. At semper innumeri dantur casus, quibus formula $a^{2n} - b^{2n}$ non est divisibilis per $4n + 1$; iis ergo casibus haec formula $a^{2n} + b^{2n}$ erit per $4n + 1$ divisibilis. At $a^{2n} + b^{2n}$ est summa duor. quadr., ergo etiam quivis ejus divisor $4n + 1$. Q. E. D.

Theor. 6. Qui numerus a duplici modo est summa duor. quadr., ille non est primus.

Demonstr. Sit enim $a = pp + qq = rr + ss$, ponatur $p = r + x$ et $q = s - y$ erit $pp + qq = rr + 2rx + xx + ss - 2sy + yy = rr + ss$, ergo $2sy = xx + yy + 2rx$ et $s = \frac{xx + yy + 2rx}{2y}$, hinc

$$a = rr + ss = \frac{(xx+yy)^2 + 4rx(xx+yy) + 4rrxx}{4yy} + rr$$

$$= \frac{(xx+yy)(xx+yy+4rx+4rr)}{4yy}.$$

Consequenter numerus a necessario duos ad minimum habet factores, quorum uterque est summa duor. quadr. Q. E. D.

Das theorema: Omnem numerum in quatuor quadrata esse resolubilem, dependiret hievon:

Omnem numerum hujus formae $4m + 2$ semper discerpi posse in duas hujusmodi partes: $4x + 1$ et

$4y+1$ quarum neutra divisorem habeat formae $4p-1$.

welches ich noch nicht demonstriren kann, aber doch nicht schwer scheinet. — Denn alsdann ist sowohl $4x+1$ als $4y+1$ summa duor. quadr. und folglich $4m+2$ summa 4 quadr. Dahero auch ejus duplum $8m+4$ und hujus quadrans $2m+1$ und also omnis numerus impar, woraus die Folge leicht auf alle numeros extendirt wird.

Des Hn. Mitzlers critique über meine Music habe ich nicht gesehen, ausser was davon in den gel. Zeitungen stehet, woraus ich geschlossen, dass dieselbe meistentheils übel gegrundet ist, indem der Auctor meine Gedanken nicht genugsam eingesehen. An des Hn. Prof. Knutzen Logic habe ich eben nicht viel Sonderbares finden können; zum wenigsten kommt sie derjenigen bei weitem nicht bey, welche der H. Prof. Segner in Göttingen herausgegeben. Dieses Jahr hat mir die Akademie zu Paris wiederum die Hälfte des Preises zuerkannt, welche 2000 livr. beträgt.

M. Buffon in Paris hat eine neue Art von Brennspiegeln erfunden, vermittelst welcher er in einer Distanz von 200 Schuh Holz in Brand gestecket, und diese Distanz kann nach Belieben noch vermehrt werden.

Euler.

LETTRE CVI.*)

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Reponse a la précédente Machine a mouvement perpétuel d'Orffyrei.

St Petersburg d. 2 Juni 1747.

Fur die mir communicirten theoremata bin ich Ew. sehr verbunden. Das merkwürdigste darunter halte ich, dass Sie meinen, es sey nicht schwer $4m+2$ in zwey solche Theile $4x+1$ und $4y+1$ zu resolviren, welche keinen divisorem hujus formae $4p-1$ haben. Ich kann das problema: numerum $8m+3$ in tria quadrata resolvere auch auf dieses reduciren: Datis duobus numeris n et p, invenire tertium x hujus naturae, ut $2+8n+8px-4xx-4x$ fiat summa duorum quadratorum, da dann vor x eine solche functio ex n et p composita gefunden werden soll, welche unter andern diese seltsame Eigenschaften habe, dass sie in allen

*) Le premier feuillet de la lettre originale étant égaré, le commencement a été suppléé du livre des minutes.

Fällen, da $2+8n$ eine summa duorum quadratorum ist, $=0$ werde, und in allen Fällen, da $2+8n-8p$ eine summa duorum quadratorum ist, $=-1$ werde, in welchen beyden conditionibus allein ich eine solche Schwierigkeit finde, dass ich an der Wahrheit des ganzen theorematis zu zweifeln anfange, ungeachtet es leicht ist unzählige formulas vor m anzugeben, in welchen $8m+3$ in tria quadrata zertheilet werden kann: als z. Ex. $m=bb\pm bc+cc$.

Seit der Zeit, da die Relation von dem perpetuo mobili des Hn. Orffyrei, in welcher der sechs Wochen lange Umlauf des Rades attestiret war, herausgekommen, hat man, meines Wissens, keine öffentliche Meldung gethan, dass diese machine weiter perfectionniret, oder zu einem Gebrauch angewendet worden wäre, welches desto bedenklicher scheinet, da der autor derselben noch viele Jahre hernach gelebet und vielleicht bis dato am Leben ist. Der Oberbaumeister in Wien, H. Fischer von Erlach (ni fallor), welcher dieselbe machine nebst dem Hn. Gravesande in Gegenwart des Hn. Landgrafen von Hessen besehen, hat davon ehemals gegen mich mit vielem Ruhm gesprochen und dabey erwähnt, dass er dem Rade, als es still gestanden, mit Fleiss einen ganz schwachen Stoss gegeben, worauf es sich von selbsten immer geschwinder usque ad certum celeritatis gradum beweget, in welchem es hernach aequabiliter fortgegangen.

Goldbach.

LETTRE CVII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Traité sur la faculté de la pensée. Concours au prix de l'académie de Paris, relatif à la théorie de Saturne, et de celle de Berlin sur le système des des monades. Miroirs ardents de Buffon. Suite des recherches arithmétiques.

Berlin d. 4. Juli 1747.

Ew. erkenne mich für die Bemühung, womit Dieselben meine geringe Schrift von dem Vermögen zu gedenken*) in Erwägung zu ziehen gewürdiget, gehorsamst verbunden. Es ist an dem, dass mein letzter Schluss nur auf diejenigen geht, welche die Seele für eine besondere Substanz, dabey aber doch für materiell halten, wobei ich insonderheit auf einige mir bekannte Wolfianer gesehen, welche glaubten, dass die Immaterialität der Seele von ihrem Meister nicht genugsam erwiesen worden. Nach den Lehrsätzen dieses Philosophi haben dieselben auch ganz recht zu zweifeln, denn wenn die Cörper und ihre Elemente mit so vielerley

*) Cet ouvrage m'est inconnu. Aussi ne se trouve-t-il pas dans la liste des oeuvres d'Euler placée en tête de ce volume.

thätigen und auf die Veränderung ihres Zustandes abzielenden Kräften begabet sind, so ist nicht abzusehen, wie die Kraft zu gedenken davon ausgeschlossen werden soll. Diese Leute geben also ohne Schwierigkeit zu, dass zum Gedenken eine thätige Kraft seinen Zustand zu verändern erfordert werde, und in Ansehung derselben glaube ich, dass mein Beweis Stich hält. Gegen diejenigen aber, welche glauben, dass das Vermögen zu gedenken ohne eine solche Kraft bestehen und blos allein durch die vim inertiae bewerkstelliget werden könne, muss ich gestehen, dass mein Beweis nicht gilt. Es deucht mich aber, sobald man zugibt, dass in der Materie, ausser der vi inertiae, keine andere Kraft befindlich, das Vermögen zu gedenken nothwendig ausgeschlossen werden müsse. Denn, ungeacht in dem menschlichen Körper und insonderheit in dem Gehirn die subtilsten Theilchen fast in einer unbegreiflichen Bewegung sind, worauf die Materialisten insonderheit ihre Meinung gründen, so geht doch dabey nichts anders vor, als dass ein jegliches Theilchen so lang in seinem Zustand verharret, als solcher mit dem Zustand der benachbarten bestehen kann; widrigenfalls aber nach den regulis mechanicis eine Veränderung in ihrer Bewegung vorgehen muss. Hieraus kann auch kein anderes Resultat entstehen, als eine Aenderung des Zustands blos allein in Absicht auf die Bewegung, und sobald man behaupten will, dass damit vielleicht noch ein anderes Resultat verknüpfet sey, indem uns das Wesen der Körper nicht genugsam bekannt, so ist man genöthiget zu behaupten, dass ausser der inertia noch andere Kräfte darin vorhanden seyn müssen; und alsdann findet mein Beweis wiederum Platz.

Bey der Akademie in Paris werde ich auf künftiges Jahr

wenig Competenten haben, denn der Herr Bernoulli, welcher angefangen darauf zu arbeiten, ist wegen der allzuweitläufigen und verdrüsslichen Rechnungen wiederum davon abgestanden Die Bewegung des Saturni war bisher noch weit weniger bekannt, als des Monds, denn noch bis jetzo haben die loca observata von den besten tabulis bis auf 20 Minuten differirt. Um diese Irregularitäten zu bestimmen werden erstaunliche calculi, sowohl theoretici als practici erfordert, welche ich auch für ein dreyfaches praemium nicht noch einmal unternehmen wollte. Denn ich habe über 100 loca Saturni mit dem Jupiter berechnet, und vermittelst der Theorie endlich solche tabulas herausgebracht, welche von allen sowohl alten als neuen Observationen nicht über 5 Minuten differiren. Eine grössere Accuratesse ist wegen der Unrichtigkeit der älteren Observationen nicht wohl zu hoffen, weil die neuen dazu nicht allein hinlänglich sind. Anjetzo stellt M. le Monnier zu Paris so accurate Observationen an, dass man auf etliche Secunden sicher seyn kann. Aus dergleichen Observationen habe ich meine tabulas solares rectificirt, und mit dem grössten Vergnügen befunden, dass dieselben anjetzo niemals über 5″ von den Observationen differiren.

Die Pièce de Monadibus, welche bey uns das praemium erhalten, hat meine völlige Approbation, als welcher ich auch mein votum gegeben. In derselben ist das ganze Lehrgebäude der Monaden völlig zerstört. Wir haben über diese Materie 30 Piècen bekommen, von welchen noch 6 der besten, sowohl pro als contra monades, gedruckt worden. In denselben ist beiderseits zum wenigsten die Sach so deutlich ausgeführt, dass die bisherigen Klagen, als wenn man einander nicht recht verstanden, ins künftige gänzlich auf-

hören werden. Die ganze Sach beruhet auf der Auswickelung dieses raisonnements: die Cörper sind divisibel; diese Divisibilität gehet entweder immer ohne Ende weiter fort, oder nur bis zu einem gewissen Ziel, da man auf solche Dinge kommt, welche nicht weiter theilbar sind. Im letztern Fall hat man die Monaden; im erstern, die divisibilitatem in infinitum, welche zwey Sätze einander so e diametro entgegengesetzt sind, dass davon nothwendig der eine wahr, der andere aber falsch seyn muss. Alle argumenta pro monadibus gründen sich hauptsächlich auf scheinbare Absurditäten, womit die divisibilitas in infinitum verknüpfet seyn soll. Da man sich aber meistentheils von diesem infinito verkehrte Ideen gemacht, so fallen auch dieselben Absurditäten weg. Die Meinung der Monaden zertheilet sich wieder in zwey Parteien, wovon die eine den Monaden alle Ausdehnung gänzlich abspricht, die andere aber dieselben für ausgedehnt hält, jedoch ohne dass sie partes hätten und folglich divisibel wären, welche letztere Meinung meines Erachtens am leichtesten zu refutiren ist. Diejenigen, welche monades magnitudinis expertes statuiren, mussen endlich zugeben, dass auch aus der Zusammensetzung derselben kein extensum entstehen könne, und sind dahero genöthiget sowohl die Extension als die Cörper selbst für blosse phaenomena und phantasmata zu halten, ungeacht sie bey dem Anfang ihres ratiocinii die Cörper als reell angesehen; dergestalt, dass, wenn der Schluss wahr wäre, die praemissae nothwendig falsch seyn müssten.

Die Brennspiegel des Hn. Buffon sind aus lauter kleinen speculis planis, bey 200 an der Zahl, zusammengesetzt; welche alle leicht dergestalt gestellt werden können, dass von allen der Schein auf einen Platz geworfen wird; wodurch

er diesen Vortheil erhält, dass er den focum so weit und wohin er will richten kann, die Sonne mag stehen wo sie will, welches bey den ordentlichen Brennspiegeln nicht möglich ist. Er hat damit Holz in einer Weite von 200 Schuh angezündet, und es ist kein Zweifel, dass wenn ein Vogel durch den focum fliegen sollte, derselbe gesenget werden müsste.

Wenn $2 + 8n + 8px - 4xx - 4x$ eine summa duor. quadr., als $= aa + bb$, so wird $3 + 8n + 8px$ seu $3 + 8(n + px) = aa + bb + (2x + 1)^2$, folglich eine summa trium quadr. Inzwischen kann ich nicht sehen, dass wenn $2 + 8n$ schon für sich eine summa duor. quadr. wäre, deswegen x nothwendig $= 0$ seyn müsse, indem ja zu einer summa duor. quadr. noch solche Zahlen gesetzt werden können, dass die Summe diese Eigenschaft behält. Hernach da $3 + 8(n + px)$ dieser Formul $8m + 3$ gleich seyn soll, so wird $n + px = m$, und folglich darf nur x gefunden werden, dass $2 + 8m - 4xx - 4x$ eine summa duor. quadr. werde, d. i., man müsste sehn, ob man nicht von $8m + 3$ ein solches Quadrat subtrahiren könnte, ut residuum esset summa duor. quadr., welches die Frage selbst ist. Nimmt man nun an $2 + 8m$ sey schon eine summa duor. quadr., so kann freylich x entweder 0 oder -1 seyn; ausser diesen sind aber öfters noch mehrere Fälle möglich. Als, die vorgelegte Zahl $8m + 3$ soll seyn $= 59$. Da ist $8m + 2 = 58 = 49 + 9$ eine summa duor. quadr. Soll nun $2 + 8m - 4xx - 4x$, d. i. $58 - 4xx - 4x$ eine summa duor. quadr. seyn, so geschieht dieses wenn x entweder 0 oder -1; ausser diesen Fällen aber kann x noch seyn $= 1$, oder 2, oder 3. Denn $58 - 4.2 = 50 = 49 + 1 = 25 + 25$; ferner ist $58 - 4.6 = 34 = 25 + 9$, und wenn $x = 3$, ist $58 -$

$4.12 = 10 = 9 + 1$. Die Ursach hievon ist, weil dergleichen Zahlen $8m + 3$ öfters auf mehr als eine Art können summae trium quadr. seyn, als in diesem Exempel ist $59 = 1 + 49 + 9 = 25 + 25 + 9$. In welchem Umstand ich nichts finde, welches mir die Gewissheit des Satzes $8m + 3 = 3\square$ verdächtig machen könnte.

Ich glaube, dass Orfyré noch am Leben ist, weil er vor einiger Zeit ein Schiff unter dem Wasser zu fahren erfunden haben wollte. Sein perpetuum mobile hatte er in Stücke zerschlagen, und nach der Zeit nicht wieder verfertigen wollen, welches die Erfindung nicht wenig verdächtig macht. Der von Ew. angeführte Umstand, dass diese Maschine, als sie ein wenig in Bewegung gesetzt worden, sich hierauf immer geschwinder bis auf einen gewissen Grad beweget, in welchem sie fortgelaufen, befindet sich in einer jeden Pendule. Denn wenn die Pendule aufgezogen und das pendulum still steht, so geht auch die Uhr nicht. Gibt man aber dem pendulo nur den geringsten Stoss, so kann das Gewicht wirken und die Bewegung kommt in ihren ordentlichen Gang. Statt des Gewichts möchte wohl in der Orfyreischen Maschine ein elastrum angebracht worden seyn; und dergleichen wäre wohl möglich, die ein ganzes Jahr lang fortgingen ohne von neuem aufgezogen zu werden. Auf diese Art sind alle erzählten Umstände dieser Maschine zu erklären, ausser demjenigen, welcher auch pflegt angeführt zu werden, dass Orfyré dem seel. Landgrafen das ganze Geheimniss entdecket, und dieser Herr die Maschine für ein wahres perpetuum mobile gehalten haben soll, welches nicht zu vermuthen wäre, wenn die Bewegung einen solchen Grund gehabt hätte. Ich weiss aber nicht, ob dieser letzte Umstand seine völlige Richtigkeit hat. Euler.

LETTRE CVIII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Suite des recherches arithmétiques.

St. Petersburg d. 12. August 1747.

Für die mir communicirten unterschiedenen éclaircissements danke ich dienstlich; in meinem vorigen Schreiben aber soll es billig heissen: *dass in allen Fällen, da* $2 + 8n$ *eine summa duorum quadratorum unico modo ist*.... und *in allen Fällen, da* $2 + 8n - 8p$ *eine summa duorum quadratorum unico modo ist etc.*

In nachfolgender serie 1, 3, 7, 17, 41, 99, etc., deren lex progressionis $A + 2B = C$ oder $B = A + \sqrt{(2AA \pm 2)}$ und die formula generalis $\frac{(1+\sqrt{2})^x + (1-\sqrt{2})^x}{2}$, siehet man

alsofort, dass die termini locis paribus nicht quadrati seyn können, indem sie alle □ ± 1 sind; ob aber alle termini locis imparibus, praeter primum, auch keine quadrata sind, muss ich dahingestellet seyn lassen, weil ich die Unmöglichkeit noch zur Zeit nicht einsehe, imgleichen, ob es unendlich viel casus gibt, darin $2A^4 - 1$ ein quadratum werden kann, wie in den casibus $A = 1$ und $A = 13$.

Goldbach.

LETTRE CIX.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Propriété des séries recurrentes.

Berlin d. 2. September 1747.

Dass in den seriebus recurrentibus, wo ein jeder terminus aus den zwey vorhergehenden bestimmt wird, zugleich ein jeder terminus aus dem vorhergehenden allein angegeben werden könne vermittelst einer quadratischen Aequation, ist eine sehr merkwürdige Eigenschaft. Denn wenn in dieser serie $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, \ldots \overset{x}{P}, \overset{x+1}{Q}, \overset{x+2}{R}$ ist $C = aB - bA$ und $R = aQ - bP$, so wird $QQ - aPQ + bPP$ ad b^x in ratione constante seyn, welche, wenn $x = 1$, ist wie $BB - aAB + bAA$ ad b; folglich ist $QQ - aPQ + bPP = (BB - aAB + bAA)b^{x-1}$. Und in der von Ew. angeführten serie $\overset{1}{1}, \overset{2}{3}, \overset{3}{7}, \overset{4}{17}, \overset{5}{41}, \overset{6}{99} \ldots \overset{x}{P}, \overset{x+1}{Q}$, wo $a = 2$ und

$b = -1$, $A = 1$, $B = 3$, wird seyn $QQ - 2PQ - PP = 2(-1)^{x-1}$ und also $Q = P + \sqrt{(2PP + 2(-1)^{x-1})}$ oder $Q = P + \sqrt{(2P^2 \pm 2)}$. Bey dieser Betrachtung bin ich auf den Gedanken gefallen, ob etwan in einer serie recurrente, deren jeder terminus aus den drey vorhergehenden bestimmt wird, nicht auch ein jeder aus den zwey vorhergehenden, vermittelst einer aequationis cubicae, angegeben werden könnte. Es sey in $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, \overset{4}{D}, \ldots \overset{x}{P}, \overset{x+1}{Q}, \overset{x+2}{R}, \overset{x+3}{S}$ etc., $D = aC - bB + cA$ und $S = aR - bQ + cP$, so habe ich gefunden, dass folgende ratio immer constans seyn müsse

$$\left.\begin{array}{l} R^3 - 2aQR^2 + (aa+b)\,Q^2R - (ab-c)\,Q^3 \\ \quad + \; bPR^2 - (ab+3c)PQR + (ac+bb)\,PQ^2 \\ \qquad\qquad + \; acP^2R - 2bcP^2Q \\ \qquad\qquad\qquad + \; ccP^3 \end{array}\right\} : c^x,$$

welche ratio constans aus den terminis initialibus A, B, C, posito $x = 1$ erkannt wird.

Um aber wieder auf die von Ew. gemeldte seriem 1, 3, 7, 17, 41 etc., wo $Q = P + \sqrt{(2P^2 \pm 2)}$ zu kommen, so ist allerdings gewiss, dass kein terminus derselben ausser dem ersten, 1, ein Quadrat seyn könne. Denn, es sey P als ein terminus derselben ein Quadrat, nehmlich $P = zz$, so müsste auch $2z^4 \pm 2$ ein Quadrat seyn, welches nicht seyn kann. Denn es sey pro signo $-$ erstlich $2z^4 - 2 = 4(zz-1)^2\frac{pp}{qq}$, so wird $zz + 1 = \frac{2ppzz}{qq} - \frac{2pp}{qq}$ und $zz = \frac{2pp+qq}{2pp-qq}$. Da nun p et q numeri primi inter se, so kann zz kein numerus integer seyn, wenn nicht $2pp - qq = 1$; daher aber wird $qq = 2pp - 1$, folglich $zz = 4pp - 1 = P$, also ist P um 1 immer kleiner als ein Quadrat, und kann also in integris kein Quadrat seyn. Wenn aber das Zeichen

+ gilt, so ist $2z^4+2=(zz+1)^2+(zz-1)^2$. Damit nun solches ein Quadrat werde, so setze man: $zz+1=aa-bb$ und $zz-1=2ab$, wobey zu merken, dass z ein numerus impar seyn müsse, denn sonsten würde $2z^4+2$ ein numerus impariter par, folglich kein Quadrat. Es kann aber generaliter diese Formul $2z^4+2y^4$ kein quadratum seyn, ausser $y=z$, welches ich also beweise: Da $2z^4+2y^4=(zz+yy)^2+(zz-yy)^2$, so sey $zz-yy=ab$, so wird $zz+yy=\frac{aa-bb}{2}$, und $2z^4+2y^4=\left(\frac{aa+bb}{2}\right)^2$. Nun sey $a=pq$ und $b=rs$, dass $zz-yy=pqrs$ und $zz+yy=\frac{ppqq-rrss}{2}$, und man setze $z+y=pr$, $z-y=qs$, so wird $2zz+2yy=pprr+qqss$, folglich $zz+yy=\frac{pprr+qqss}{2}=\frac{ppqq-rrss}{2}$, oder $ss=\frac{pp(qq-rr)}{qq+rr}$. Dahero müsste $\frac{qq-rr}{qq+rr}$, d. i. q^4-r^4 ein quadratum seyn, welches unmöglich.

Die Formul $2A^4-1$, welche in den Fällen $A=1$ und $A=13$ ein quadratum wird, kann noch in unendlich viel andern ebenfalls ein Quadrat werden, allein nicht in numeris integris. Denn wenn $A=\frac{1525}{1343}$, oder $A=\frac{2165017}{2372159}$, so wird auch $2A^4-1$ ein Quadrat. Ob aber in numeris integris keine andern Fälle als die beyden gemeldten möglich sind, bin ich nicht im Stande zu decidiren.

Euler.

LETTRE CX.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Même sujet.

St. Petersburg d. 30. Sept. 1747.

Die Aequation, welche Sie bey den seriebus recurrentibus observiret haben, wird vielleicht mit nachfolgender Anmerkung übereinkommen: Wenn man in dem casu, da die lex progressionis ist $C = aB - bA$, den terminum generalem setzet $m\alpha^{x-1} + n\beta^{x-1}$, so wird der terminus primus $m + n$, der secundus $m\alpha + n\beta$, der tertius $m\alpha\alpha + n\beta\beta = am\alpha + an\beta - bm - bn$, oder $\alpha\alpha = a\alpha - b$, und $\beta\beta = a\beta - b$, woraus folget, dass α und β zwey radices ejusdem aequationis sind, und wenn $\alpha = \frac{a + \sqrt{(aa - 4b)}}{2}$, alsdann $\beta = \frac{a - \sqrt{(aa - 4b)}}{2}$. Auf gleiche Weise, wenn $D = aC - bB + cA$, wird posito termino generali $m\alpha^{x-1} + n\beta^{x-1} + p\gamma^{x-1}$,

$a^3 = aaa - ba + c$, und wenn von den dreyen radicibus dieser Aequation die eine α, die andere β, die dritte γ genannt wird, so hat man den völligen terminum generalem, wobey doch als etwas seltsames anzusehen ist, dass, obgleich in den aequationibus quintae, septimae, etc. potestatum, diese radices sehr complicatae seyn müssen, die aus denenselben zusammengesetzten termini generales dennoch, wenn nur a, b, c, etc., item m, n, p, etc. integri sind, auch allezeit integri werden und die in den radicibus aequationis enthaltenen quantitates surdae sich einander destruiren.

Um zu demonstriren, dass $2z^4 - 2$ kein Quadrat seyn kann, setzen Ew. $2z^4 - 2 = 4(zz - 1)^2 \frac{pp}{qq}$, und supponiren, dass p et q numeri inter se primi sind. Wie ich nun den zureichenden Grund dieser Supposition nicht einsehe, so finde an demselben desto mehr Ursach zu zweifeln, weil Sie endlich auf diesen Schluss kommen, dass P immer um 1 kleiner seyn muss, als ein □, da doch die Zahl 17 und unzählige andere zeigen, dass P auch um 1 grösser als ein □ seyn kann, denn es sind

pro □ — 1, die termini $3 = 1^2 . 2^2 - 1$
$99 = 5^2\ 2^2 - 1$
$3363 = 29^2 . 2^2 - 1$
etc.

pro □ + 1, die termini $17 = 1^2 . 4^2 + 1$
$577 = 6^2 . 4^2 + 1$
$19601 = 35^2 . 4^2 + 1$
etc.

und alle die numeri 1, 5, 29, sind termini seriei, cujus lex progressionis est $6B - A = C$; 1, 6, 35, etc. aber sind die summae derselben seriei.

Die grossen numeri in fractis, welche Ew. für $\sqrt{(2A^4-1)}$ gefunden haben, machen sehr wahrscheinlich, dass ausser 1 und 13 keine pro A substituiret werden können, damit $2A^4-1$ ein quadratum in integris werde; indessen sind doch solche propositiones, eben wegen der Schwierigkeit sie zu demonstriren, merkwürdig.

Nachfolgendes problema kann ich solviren: weil ich aber ohngefähr darauf gefallen, so weiss ich nicht, ob die Solution schwer oder leicht zu finden seyn mag: Datis duobus quadratis 1 et bb, invenire infinitis modis tertium cc hac lege, ut summa $1+bb+cc$ sit aequalis tribus aliis quadratis.

Von dem Hn. Doppelmayer habe ich seit der Zeit des fatalen Experiments, so in den Zeitungen erzählet worden, nichts vernommen. Im Fall Ew. wissen, wie er sich befindet, und ob er völlig wieder restituiret worden, bitte ich mich davon zu benachrichtigen.

Goldbach.

LETTRE CXI.

Euler à Goldbach

Sommaire. Même sujet. Suite des recherches arithmétiques

Berlin d. 24. October 1747.

Die letztens überschriebene Aequation pro seriebus recurrentibus beruhet allerdings auf der von Ew. gemeldten Eigenschaft dieser serierum. Denn wenn in der serie

$$\overset{1}{A},\ \overset{2}{B},\ \overset{3}{C},\ \overset{4}{D} \ldots \overset{x}{P},\ \overset{x+1}{Q},\ \overset{x+2}{R},\ \overset{x+3}{S},\ \overset{x+4}{T}, \text{ etc.}$$

ist $C = mB - nA$ und generaliter $R = mQ - nP$, und man formirt diese Aequation $zz - mz + n = 0$, wovon die radices seyn sollen a, b, so dass $a + b = m$ und $ab = n$, so wird der terminus generalis diese Form haben $P = \alpha a^x + \beta b^x$, folglich ist $Q = \alpha a . a^x + \beta b . b^x$. Aus diesen zwey Aequationen suche ich die valores a^x und b^x, und finde $\alpha a^x = \frac{bP - Q}{b - a}$, $\beta b^x = \frac{aP - Q}{a - b}$; diese multiplicire ich in

einander, $\alpha\beta\, a^x b^x = \frac{abPP - aPQ - bPQ + QQ}{-aa + 2ab - bb}$. Da nun $ab = n$, $a + b = m$, $-aa + 2ab - bb = -(a+b)^2 + 4ab$ $= -m^2 + 4n$, so wird $\alpha\beta n^x = \frac{nPP - mPQ + QQ}{4n - mm}$, folglich $\frac{nPP - mPQ + QQ}{n^x} = \alpha\beta(4n - mm) =$ quantitati constanti, welche (posito $x = 1$) seyn muss $= \frac{nAA - mAB + BB}{n}$.

Wenn aber pro serie recurrente ist $D = mC - nB + pA$ und $S = mR - nQ + pP$, so formire ich diese Aequation $z^3 - mzz + nz - p = 0$, wovon die radices seyn sollen a, b, c, so wird $P = \alpha a^x + \beta b^x + \gamma c^x$, $Q = \alpha a . a^x + \beta b . b^x + \gamma c . c^x$, $R = \alpha a^2 a^x + \beta b^2 b^x + \gamma c^2 c^x$. Aus diesen drey Aequationen suche ich die valores αa^x, βb^x, γc^x, welche in einander multiplicirt geben $\alpha\beta\gamma a^x b^x c^x = \alpha\beta\gamma p^x$, weil $a + b + c = m$, $ab + ac + bc = n$ und $abc = p$; und durch Hülfe dieser Formuln lassen sich in der aequatione resultante die Buchstaben a, b, c durch m, n et p bestimmen und kommt die letzt überschriebene Aequation inter P, Q, R heraus.

Den Zweifel, welchen Ew. gegen meine Demonstration, dass $2z^4 - 2$ kein Quadrat seyn kann, machen, kann ich nicht recht einsehen, und glaube, dass ich mich entweder nicht deutlich genug ausgedrückt habe, oder dass Dieselben meine Demonstration auf einen andern casum gezogen.

Wenn $2z^4 - 2$ ein Quadrat wäre (in integris), so würde es grad, und folglich per 4 divisibel seyn. Ferner, da $z^4 - 1 = (zz - 1)(zz + 1)$, muss das Quadrat auch per $zz - 1$ divisibel seyn, und auch per $(zz - 1)^2$, wenn $zz - 1$ keine factores quadratos hat. Dahero, wenn $2z^4 - 2$ ein Quadrat wäre, so müsste dasselbe eine solche Form haben

$2z^4 - 2 = \frac{4(zz-1)^2 pp}{qq}$, wo qq die etwan in $zz-1$ enthaltenen factores quadratos aufheben soll. Nun nehme ich billig an, dass pp und qq numeri inter se primi sind, oder dass die fractio $\frac{pp}{qq}$ schon ad minimos terminos reducirt sey. Denn wenn pp et qq einen divisorem communem hätten, so würde solches in der Fraction $\frac{pp}{qq}$ per divisionem weggebracht werden können. Wenn demnach $2z^4 - 2 = \frac{4(zz-1)^2 pp}{qq}$, so ist $2(zz+1)(zz-1)qq = 4(zz-1)^2 pp$, und folglich $(zz+1)qq = 2(zz-1)pp$, woraus entstehet $zz = \frac{2pp+qq}{2pp-qq}$. Da nun zz ein numerus integer ist, so muss $2pp - qq$ ein divisor seyn von $2pp + qq$, folglich auch von $4pp$ oder von $2qq$. Da aber pp et qq numeri inter se primi sind, so kann solches nicht geschehen, als entweder wenn $2pp - qq = 1$, oder wenn $2pp - qq = 2$, denn da $\frac{2pp+qq}{2pp-qq} = 1 + \frac{2qq}{2pp-qq} = \frac{4pp}{2pp-qq} - 1$ und p et q numeri primi inter se, so ist auf keine andere Art möglich, dass $\frac{2pp+qq}{2pp-qq}$ ein numerus integer werde.

Es sey also I. (si fieri possit) $2pp - qq = 1$, so wird $zz = 2pp + qq = 4pp - 1$, welches in numeris integris unmöglich ist.

Wenn II. $2pp - qq = 2$, so wird $zz = \frac{2pp+qq}{2} = qq + 1$, welches gleichfalls nicht möglich ist. Also kann auf keinerley Art $2z^4 - 2$ in integris ein Quadrat werden.

Setzt man z für zz um zu suchen in welchen Fällen $2zz - 2$ ein Quadrat werden könne, so gibt es zweyerley Fälle I. $z = 4pp - 1$, und II. $z = qq + 1$, welches dieje-

nigen sind, so Ew. anführen, die aber meine vorige Demonstration nicht entkräften, welche, so viel ich mich erinnere, generaler war; denn ich hatte bewiesen, dass nicht nur $2z^4 - 2$ sondern auch $2z^4 - 2u^4$ kein Quadrat seyn könne. Wie ich sehe, so ist diese meine Demonstration nun im X. tomo Commentariorum gedruckt.

Das problema: Datis duobus quadratis aa et bb, invenire tertium xx, ut summa $aa + bb + xx$ alio quoque modo fiat resolubilis in tria quadrata, habe ich also solvirt: Sit

$$aa + bb + xx = (a + 2pr)^2 + (b + 2qr)^2 + (x - 2r)^2,$$

erit $0 = 4apr + 4pprr + 4bqr + 4qqrr - 4rx + 4rr$, unde per $4r$ dividendo fit $x = ap + ppr + bq + qqr + r$, wo pro p, q et r numeri quicunque integri tam affirmativi quam negativi accipi possunt. Woraus unendlich viel solutiones particulares fliessen. Als, es sey $p = 1$, $q = -1$, erit $x = a - b + r$ und

$$aa + bb + xx = (a + 2r)^2 + (b - 2r)^2 + (x - 2r)^2.$$

Meine Pièce über den Saturnum ist in Paris nicht nur wohl angekommen, sondern ich höre auch, dass man mit derselben sehr wohl zufrieden ist und sie allen andern, so eingelaufen, weit vorziehet.

Euler.

LETTRE CXII.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Suite des recherches précédentes.

St. Petersburg d 27. Januar 1748.

Aus der Inlage, welche mir wieder zurückzusenden bitte, werden Ew. am besten sehen, worauf mein voriges dubium gegründet gewesen.

Dero Solution des problematis: datis duobus quadratis aa et bb, invenire tertium xx hac lege, ut $aa + bb + xx$ plus quam uno modo sit summa trium quadratorum, ist offenbar und general; denn obzwar die aequatio

$0 = 4apr + 4pprr + 4bqr + 4qqrr - 4rx + 4rr$,

per $4r$ divisa nicht $x = ap + prr + bq + qrr + r$, sondern $x = ap + ppr + bq + qqr + r$ gibt, so hat doch dieser kleine error calculi keine influence in die Methode selbst. Indessen bleibet die Demonstration, dass eine summa trium

quadratorum imparium vor $8m+3$ in quocunque casu ipsius m angegeben werden könne, noch sehr dunkel. Es ist mir eingefallen, dass wenn man die drey radices quaesitas setzen möchte A, B, C, und

$$A = 1 + am + bmm + cm^3 + dm^4 + \text{etc.}$$
$$B = 1 + am - bmm - cm^3 - dm^4 - \text{etc.}$$

folglich

$$\begin{array}{llllll} AA = 1 & + 2am & + 2bmm & + 2cm^3 & + 2dm^4 & + 2em^5 + \text{etc.} \\ & + aa & + 2ab & + 2ac & + 2ad & \\ & & & + bb & + 2bc & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} BB = 1 & + 2am & - 2bmm & - 2cm^3 & - 2dm^4 & - 2em^5 + \text{etc.} \\ & + aa & - 2ab & - 2ac & - 2ad & \\ & & & + bb & + 2bc & \end{array}$$

und

$$\begin{array}{lllll} CC = 1 & + 8m & - 2aamm & * & - 2bbm^4 - 4bcm^5 \\ & - 4a & & & \end{array}$$

alsdann $AA + BB + CC = 8m + 3$ und alle coëfficientes b, c, d, etc. per solam a determinirt werden könnten, so dass a eine quantitas indeterminata bliebe, denn es wird posita

$$C = 1 + \alpha m + \beta mm + \gamma m^3 + \delta m^4 + \text{etc.}$$
$$\alpha = 4 - 2a, \quad \beta = -2aa - \alpha\alpha, \quad \gamma = -2\alpha\beta, \text{etc.}$$

hieraus würde ferner folgen, dass wenn das theorema an sich selbst wahr ist, die series A, B, C allezeit numeris integris gleich seyn würden, man möchte auch vor a annehmen, was man wollte.

Goldbach.

LETTRE CXIII.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE Suite des recherches précédentes. Théorème de géométrie.

Berlin d. 28. Februar 1748.

Das über meinen vorigen Brief gehabte dubium wird sogleich wegfallen, wenn Ew. sich zu erinnern belieben werden, dass daselbst von numeris integris die Rede sey, denn da $P = 4pp - 1$, so kann in ganzen Zahlen P unmöglich ein Quadrat seyn; in Brüchen aber wäre solches auf unendliche Arten möglich.

Dass alle in dieser Formul $8m + 3$ enthaltenen Zahlen in drey quadrata imparia resolvirt werden können, bin ich noch keineswegs im Stand zu beweisen, ungeacht ich mir darüber den Kopf schon ziemlich verbrochen habe. So oft $8m + 3$ ein numerus primus ist, so ist dieselbe allzeit in dieser Form $2aa + bb$ enthalten, als $3 = 2.1 + 1$;

$11 = 2.1 + 9$; $19 = 2.9 + 1$; $43 = 2.9 + 25$, etc. und hievon getrauete ich mir noch die Demonstration zu finden. Ich glaube auch nicht, dass man für diese Proposition, dass $8m + 3 = aa + bb + cc$ eine solche Demonstration finden könne, wodurch die drey radices a, b, c selbst bestimmt werden, sondern man wird nur die possibilitatem resolutionis anzuzeigen im Stande seyn. Aus diesem Grunde habe ich zu dem von Ew. eingeschlagenen Weg kein grosses Vertrauen, weilen dadurch nicht nur die Möglichkeit gezeigt, sondern auch die tria quadrata selbst in genere angegeben werden könnten, welches letztere ich gleichwohl für unmöglich halte. Die Demonstration müsste ungefähr meines Erachtens derjenigen ähnlich seyn, wodurch ich bewiesen, dass omnis numerus primus $4n + 1$ eine summa duorum quadratorum sey. Ich beweise erstlich, dass eine jede summa duorum quadratorum $aa + bb$ (wo a et b numeri inter se primi gesetzt werden) keine andere divisores haben könne, als welche gleichfalls summae duorum quadratorum sind. Hernach so oft $4n + 1$ ein numerus primus ist, kann ich unendlich viel Zahlen hujus formae $p^{2n} + q^{2n}$ angeben, welche durch $4n + 1$ divisibel sind. Da nun $p^{2n} + q^{2n}$ eine summa duorum quadratorum ist, so muss auch $4n + 1$ als ein divisor derselben Formul gleichfalls eine summa duor. quadr. seyn. Die resolutio autem ipsa in duo quadrata wird hierdurch nicht offenbar, sondern nur die Möglichkeit derselben bewiesen.

Man kann aber diese Proposition, dass $8m + 3$ allzeit eine summa trium quadratorum sey, in vielerley andere Formen einkleiden, welche vielleicht leichter zu demonstriren seyn dürften. Als, wenn man beweisen könnte, dass proposito numero quocunque integro m, für p und q allzeit

solche Werthe anzugeben möglich wären, so dass nachfolgende aequatio cubica

$$x^3 - (2p - 1)xx + (2pp - 2p - 1 - 4m)x - q = 0$$

alle drey radices rationales überkäme, so wäre die Sach auch bewiesen. Denn wenn a, b, c die radices dieser Aequation wären, so würde $2p - 1 = a + b + c$, et

$$2pp - 2p - 1 - 4m = ab + ac + bc.$$

Weil nun

$$4pp - 4p + 1 = aa + bb + cc + 2ab + 2ac + 2bc,$$

so subtrahire man davon

$$4pp - 4p - 2 - 8m = 2ab + 2ac + 2bc$$

so bleibt übrig $8m + 3 = aa + bb + cc$. Ich habe aber hiezu schlechte Hoffnung, weil die Demonstration nur auf valores integros ipsius m gehen müsste: denn in fractis wäre die Sach oft unmöglich.

Ich habe diese Sach auch folgendergestalt betrachtet: Es muss allzeit möglich seyn von $8m + 3$ ein solches Quadrat $4xx - 4x + 1$ zu subtrahiren, dass der Rest

$$8m + 2 - 4xx + 4x$$

in zwey quadrata resolubel werde. Folglich muss auch die Hälfte davon $4m + 1 - 2xx + 2x$ eine summa duor. quadr. seyn, nehmlich $4yy - 4y + 1 + 4zz$, also würde

$$m = \frac{xx - x}{2} + yy - y + zz.$$

Wenn man dahero beweisen könnte, dass diese Formul $\frac{xx - x}{2} + yy - y + zz$ alle numeros integros in sich begreife, so wäre das theorema auch bewiesen.

Fermat sagt in seinen Observationibus ad Diophantum, dass diese Aequation $x^n = y^n + z^n$ in numeris rationalibus allzeit unmöglich sey, exceptis casibus $n = 1$ et $n = 2$, nehmlich weder eine summa duorum cuborum könne ein

cubus, noch eine summa duorum biquadratorum ein biquadratum, noch in genere eine summa duarum potestatum altiorum eine gleiche potestas seyn. Er sagt, dass er dafür eine sehr ingenieuse Demonstration habe, welche er aber wegen Mangel des Raums nicht beysetzen könne. Es ist also sehr schad, dass auch diese nebst vielen andern verloren gegangen.

Ich bin neulich auf nachfolgendes theorema geometricum gefallen, welches mir merkwürdig zu seyn scheinet. Nehmlich, gleich wie in einem jeden parallelogrammo die summa quadratorum laterum der summae quadratorum diagonalium gleich ist, so ist in einem jeden quadrilatero non parallelogrammo die summa quadratorum laterum grösser als die summa quadratorum diagonalium, und der excessus kann also concinne angegeben werden: Man bisecire (Fig. 28) in dem trapezio $ABCD$ die diagonales AC und BD in N et M und jungire die Linie MN, so wird seyn:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2.$$

Euler.

LETTRE CXIV.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Suite des recherches arithmétiques.

St Petersburg d. 6. April 1748.

In Ew. Schreiben vom 2. Sept. hatte ich die Worte: *dass P um 1 immer kleiner als ein Quadrat seyn muss*, für eine zur vorhergehenden Formul $Q = P + \sqrt{(2PP \pm 2)}$ gehörige Condition angesehen, welche sich aber, wie ich nunmehro finde, blos auf die Aequation $zz = 4pp - 1 = P$ rapportiren, so dass alles seine Richtigkeit hat.

Wenn Ew., wie Sie vermuthen, demonstriren könnten, dass alle numeri $8m + 3$, wenn sie primi sind, zu dieser Formul $2aa + bb$ gebracht werden können, so werden Sie auch leicht finden, dass alle numeri primi $4m + 3$ zu dieser Formul gehören $2aa + bb + cc$, weil dieselbe meines Erachtens alle numeros impares in sich begreift; wenn aber

solches nur von allen numeris primis demonstrirt wäre, so würde offenbar seyn, dass alle numeri integri affirmativi aus vier quadratis bestehen.

Was die transmutationes einer summae quatuor quadratorum betrifft, so habe ich derselben unterschiedene gefunden, welche ich folgendergestalt exprimiren will, dass △ einen numerum trigonalem, 2△ ein duplum trigonalis, 3△ ein triplum etc. □+□ ein aggregatum duorum quadratorum, 2□ ein duplum quadrati etc. bedeuten; solchemnach wird eine jede Zahl seyn:

I. 2□+ □+4△; IV. 2□+□+ △;
II. □+2□+2△; V. □+△+4△;
III. □+2△+4△; VI. 2□+△+2△;
VII. △+2△+4△;
VIII. □+ □+2△;
IX. $\frac{\square + \square + \square}{2}$;

aus welchen noch viele andere deducirt werden können.

In der nachfolgenden Formul

$$aa - a + bb - b + cc - c + dd - d + 1$$

ist offenbar, dass selbige eine summa quatuor quadratorum wird, wenn $d = -a - b - c + 1$; wenn aber auch d pro numero quocunque genommen wird, muss die formula dennoch eine summa quatuor quadratorum seyn. Sollte mir etwas Neues von dieser Materie einfallen, werde ich das Vergnügen haben selbiges Ew. zu communiciren.

Goldbach.

P. S. Wenn die numeri a, b, c in casu

$$2aa + bb + cc = 2n + 1$$

gegeben sind, so können daraus die vier quadrata pro summa $2n + 3$, $4n + 3$, $6n + 3$, $4n + 6$, $8n + 6$ etc. imgleichen vor $2n + 2pp + 1$, $4ffn + 2ff + dd$, allwo p, f, d numeri integri quicunque sind, leicht angegeben werden, und diese formula $2aa + 4bb + (2c + 1)^2 + 2$ ist allezeit gleich einer andern $2AA + 4BB + (2C + 1)^2$, von welcher letztern Proposition aber die demonstratio rigorosa fehlt.

LETTRE CXV.

═

Euler à Goldbach.

Sommaire. Recherches ultérieures sur les nombres.

Berlin d. 4. Mai 1748.

Wenn der Satz wahr ist, dass $8m + 3 = 2aa + bb$, so oft $8m + 3$ ein numerus primus ist, so sehe ich nicht, dass auch immer seyn müsse $4n + 3 = 2aa + bb + cc$, so oft $4n + 3$ ein numerus primus ist; es wäre denn, dass man beweisen könnte, dass in diesem Fall immer wäre $4n + 3 = 8m + 3 + 4(2p + 1)^2$. Vielleicht aber ist dieses sogar wahr, wenn auch $4n + 3$ kein numerus primus ist. Zum wenigsten däucht mich, dass $8n + 7 = (8m + 3)(2q + 1)^2 + 4(2p + 1)^2$, existente $8m + 3$ numero primo. Wäre nun dieses wahr, so würden freylich alle numeri primi, und folglich alle Zahlen summae quatuor quadratorum seyn. Allein ich glaube kaum, dass sowohl bey diesem als bey

andern Fermatianischen theorematibus mit General-Formuln etwas auszurichten ist. Denn was das theorema anlangt, dass eine jegliche Zahl eine summa trium trigonalium sey, so ist solches nur von numeris integris zu verstehen, und würde daher sogar unmöglich seyn diesen Generalsatz

$$n = \frac{aa+a}{2} + \frac{bb+b}{2} + \frac{cc+c}{2}$$

zu beweisen, weil derselbe sogar in viel Fällen, nehmlich wenn $n = \frac{1}{2}$, oder $\frac{3}{2}$, oder $\frac{5}{2}$ etc. falsch wäre. Denn wenn dieser Satz auch für gebrochene Werthe von n wahr wäre, so würde eine jegliche Zahl sogar eine summa trium quadratorum seyn können, indem $8n+3 = (2a+1)^2 + (2b+1)^2 + (2c+1)^2$, und $8n+3$ alle Zahlen in sich begriffe. Also kann Ew. IX. Formul, kraft welcher eine jede Zahl seyn soll $= \frac{\square+\square+\square}{2}$, wofern kein Schreibfehler darin befindlich, nicht Statt finden; denn wenn quivis numerus $n = \frac{\square+\square+\square}{2}$, so würde quivis numerus par $2n = \square+\square+\square$, welches doch bey unendlich vielen, als 28, 60 etc. nicht angeht. Hingegen kommt mir die VIII. Formul $n = \square+\square+2\triangle$ sehr merkwürdig vor, von deren Wahrheit ich durch die Induction bin überführt worden, ungeacht ich nicht sehe, wie dieselbe aus dieser $n = \square+\square+\square+\square$, oder dieser $n = \triangle+\triangle+\triangle$ folget.

Die Formul $aa - a + bb - b + cc - c + dd - d + 1$ ist generaliter, und also nicht allein in dem Fall da $a + b + c + d = 1$, eine summa quatuor quadratorum; denn dieselbe ist $=$

$$\left(a-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(b-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(c-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(d-\tfrac{1}{2}\right)^2.$$

Denn ungeacht diese quadrata fracta sind, so ist doch ge-

wiss, omnem numerum, qui sit summa quatuor quadrator. fractorum, eundem in integris esse 4 quadratorum summam. Folgendes theorema kann auch dienen in vielen Fällen die quatuor quadrata selbst zu bestimmen, woraus eine Zahl zusammengesetzt ist: Si $m = aa + bb + cc + dd$ et $n = pp + qq + rr + ss$ erit $mn = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$ existente

$$A = ap + bq + cr + ds$$
$$B = aq - bp - cs + dr$$
$$C = ar + bs - cp - dq$$
$$D = as - br + cq - dp.$$

Weil man nun die Zahlen a, b, c, d, p, q, r, s sowohl affirmative als negative annehmen, dieselben ferner auch nach Belieben mit einander combiniren oder ihre Ordnung verändern kann, so ist die resolutio producti mn auf sehr vielerley verschiedene Arten möglich.

Meines Erachtens ist also nicht leicht eine Demonstration von dergleichen Fermatianischen theorematibus zu erwarten, so lang man die numeros trigonales, tetragonales, pentagonales etc. durch die gewöhnlichen Generalformuln ausdrückt, weil in denselben auch die numeri fracti mit begriffen sind, welche doch in den meisten theorematibus ausgeschlossen werden. Ich habe mir zu diesem Ende die Sach folgendergestalt vorgestellt:

Es sey $s = 1 + x^1 + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + x^{28} + \text{etc.}$, wo keine andere potestates ipsius x vorkommen, als deren exponentes sind $= \triangle$. Wenn man nun das quadratum dieser seriei nimmt, so wird $ss =$ einer seriei, in der keine andere potestates ipsius x vorkommen, als deren exponentes sind $= \triangle + \triangle$, und s^3 wird gleich einer seriei, da der Potestäten ipsius x Exponenten sind $= \triangle + \triangle + \triangle$. Wenn man nun beweisen könnte, dass in der serie s^3 alle pote-

states ipsius x vorkommen, so wäre dieses ein Beweis omnem numerum integrum esse summam trium trigonalium. Diese series lassen sich aber leicht generaliter bestimmen; denn es sey

$$s^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + Gx^7 + Hx^8 + Ix^9 + \text{etc.}$$

so sind die valores dieser Coëfficienten für die verschiedenen valores von n, wie folgt:

	1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	α	β	γ	δ	ε
Si $n = 1$. Dazu addire eben die series, wie zu sehen:	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
		1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
				1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
							1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
											1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
																1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1
																						1	1	0	1	0	0	1	0	0	0
Si $n = 2$. Dazu addire eben die series, wie zu sehen:	1	2	1	2	2	0	3	2	0	2	2	2	1	2	0	2	4	0	2	0	1	4	2	0	2	2	0	2			
		1	2	1	2	2	0	3	2	0	2	2	2	1	2	0	2	4	0	2	0	1	4	2	0	2	2	0			
				1	2	1	2	2	0	3	2	0	2	2	2	1	2	0	2	4	0	2	0	1	4	2	0	2			
							1	2	1	2	2	0	3	2	0	2	2	2	1	2	0	2	4	0	2	0	1	4			
											1	2	1	2	2	0	3	2	0	2	2	2	1	2	0	2	4	0			
																1	2	1	2	2	0	3	2	0	2	2	2	1			
																						1	2	1	2	2	0	3			
Si $n = 3$	1	3	3	4	6	3	6	9	3	7	9	6	9	9	6	6	15	9	7	12	3	15	15	6	12	12	9	12	etc.		

Wenn man also zeigen könnte, dass in dieser serie pro $n = 3$ kein terminus $= 0$, so wäre bewiesen, dass eine jede ganze Zahl eine summa trium trigonalium ist. Gleich wie man aus der serie $n = 2$ siehet, da viel termini $= 0$, dass viel Zahlen auch nicht summae duorum trigonalium sind, nehmlich 5, 8, 14, 17, 19, 23, 26, etc.

Auf gleiche Weise kann auch die Composition numerorum ex quadratis vorgestellt werden; denn ich setze zu diesem Ende

$$s = 1 + x^1 + x^4 + x^9 + x^{16} + x^{25} + x^{36} + x^{49} + \text{etc.}$$

und

$$s^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \text{etc.}$$

Hier werden nun die coëfficientes singularum potestatum ipsius x pro valoribus ipsius n successive folgendergestalt gefunden:

Exponentes ipsius x......	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	etc.
Coëfficientes casu $n=1$	1.	1.	0.	0.	1.	0.	0.	0.	0.	1.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	1.	etc.
dazu addire		1.	1	0.	0.	1.	0.	0.	0.	0.	1.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	
					1.	1.	0.	0.	1.	0.	0.	0.	0.	1.	0.	0.	0.	
										1.	1.	0.	0.	1.	0.	0.	0.	
																	1.	
Coëfficientes casu $n=2$	1.	2.	1.	0.	2.	2.	0.	0.	1.	2.	2.	0.	0.	2.	0.	0.	2.	
		1.	2.	1.	0.	2.	2.	0.	0.	1.	2.	2.	0.	0.	2.	0.	0.	
					1.	2.	1.	0.	2.	2.	0.	0.	1.	2.	2.	0.	0.	
										1.	2.	1.	0.	2.	2.	0.	0.	
																	1.	
Coëfficientes casu $n=3$	1.	3.	3.	1.	3.	6.	3.	0.	3.	6.	6.	3.	1.	6.	6.	0.	3.	
		1.	3.	3.	1.	3.	6.	3.	0.	3.	6.	6.	3.	1.	6.	6.	0.	
					1.	3.	3.	1.	3.	6.	3.	0.	3.	6.	6.	3.	1.	
										1.	3.	3.	1.	3.	6.	3.	0.	
																	1.	
	1.	4.	6.	4.	5.	12.	12.	4.	6.	16.	18.	12.	8.	16.	24.	12.	5.	

Hier kommen in der serie für $n = 2$ noch häufig 0 vor, als bey 3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, welches ein Zeichen ist, dass diese Zahlen nicht sind $\square + \square$. In der serie $n = 3$ findet

sich die 0 bey den Zahlen 7, 15, dahero diese Zahlen nicht summae trium □ sind, in der serie $n = 4$ aber kommt keine 0 mehr vor. Dahero müsste nur dieses bewiesen werden können.

Auf beyliegendem Zettel habe ich die verba Fermatii über seine demonstrationes theorematum copirt, woraus man ungefähr merken kann, aus was für Gründen dieselben hergeleitet waren, und eben deswegen ist der Verlust derselben meines Erachtens um so viel mehr zu bedauern.

Hier gehet das Gerücht, dass von der Akademie zu Paris für dieses Jahr der ganze Preis mir zuerkannt worden, worüber viélleicht morgen die Nachricht selbst erhalten werde.

Euler.

(Billet annexé:)

Fermatius in Observationibus ad Diophantum. Imo propositionem generalem et pulcherrimam nos primi deteximus, nempe omnem numerum (integrum) vel esse triangularem, vel ex 2 vel 3 triangularibus compositum: Item vel esse quadratum vel ex 2, vel 3, vel 4 quadratis compositum; item esse vel pentagonum, vel ex 2, vel 3, vel 4, vel 5 pentagonis compositum, et sic in infinitum. Hujus autem propositionis demonstrationem, quae ex multis, variis et abstrusissimis numerorum mysteriis derivatur, hic apponere non licet. Opus enim et librum integrum huic operi destinare decrevimus et Arithmeticen hac in parte ultra veteres ac notos terminos mirum in modum promovere.

LETTRE CXVI.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Théorèmes de nombres.

St. Petersburg d. 8. Juni 1748.

Ich bin noch gänzlich der Meinung, dass nicht nur $4n + 3$, sondern auch $4n + 1$ und folglich ein jeder numerus impar zu dieser Formul gebracht werden kann: $2aa + bb + cc$, welches auch in der That eben so viel ist, als die sub N. II von mir angeführte Formul $\square + 2\square + 2\triangle$, so dass, wenn Ew. an dieser letztern, wie ich sehe, nicht zweifeln, auch die aequatio $2n + 1 = 2aa + 4bb + cc$ gewiss ist. Hingegen kann die sub N. VIII aus Versehen gesetzte $\frac{\square + \square + \square}{2}$ nicht Statt haben, als an deren Stelle es heissen muss $2\square + \triangle + \triangle$, oder auch $\frac{\square + \square}{2} + \triangle$. Ausser diesem ist aber in meiner Copie von der Tabelle der Formeln noch ein lächerlicher Fehler, so sich vermuthlich auch im Original finden wird,

indem sub N. I et N. IV eben dieselbe Formul $2\square + \square + \triangle$ stehet. Was diese: $\square + \square + 2\triangle$, welche Ew. fur merkwürdig halten, betrifft, so fliesset dieselbe alsofort aus der Consideration, dass ein jeder $4n + 1$ eine summa duor. quadr. parium et unius imparis ist, gleich wie im Gegentheil $4n + 2$ aus duobus imparibus et uno pari bestehet.

Ohngeachtet ich mir zur Demonstration des theorematis Fermatiani wenige Hoffnung mache, so habe dennoch nach Anleitung desselben einige andere gefunden, die ich für eben so wahr halte, als z. Ex.

Omne quadratum numeri imparis vel numeri impariter paris, modo sit minus quam $8n + 7$, est unum ex quatuor quadratis, quorum summa est $8n + 7$. Imgleichen: Omnis numerus $8n + 2$ est hujus formae $(2 \pm 2)^{2r} + \square + \square$.

Die hiebeyliegende Demonstration von Ew. theoremate de quadratis laterum trapezii*) will ich eben nicht für die kürzeste ausgeben, ich glaube aber, dass man gar leicht auf noch viel weitläufigere verfallen kann. Die Gelegenheit dazu hat neulich ein guter Freund gegeben, welcher mir sagte, dass er einen casum particularem davon, nehmlich in einem trapezio, wo duo anguli recti und duo latera parallela sind, demonstriren könnte.

Dass Ew. das ganze praemium von der Acad. royale des sc. erhalten haben, ist mir eine sehr angenehme Nachricht gewesen. Ich gratulire Deroselben dazu von Herzen, und meine Hoffnung, dass Sie bey allen künftigen Aufgaben nicht weniger réussiren werden, wird immer grösser.

Goldbach.

*) Cette démonstration ne s'est pas trouvée.

LETTRE CXVII.

Euler à Goldbach

Sommaire. Suite sur les propriétés des nombres. Conditions de rationalité de certaines formules irrationelles. Démonstration du théorème de géométrie précédent. Oechlis, Solution du problème de la courbe catoptrique

Berlin d. 26. Juni 1748.

— — — Nun bin ich endlich auf den Grund der mir neulich von Ew. überschriebenen schönen Formuln gekommen, wobey ich das in der Abschrift derselben begangene geringe Versehen sogleich eingesehen. Dieselben gründen sich meines Erachtens auf folgende drey Hauptformuln I. $n = \triangle + \triangle + \triangle$; II. $4n + 1 = \square + \square + \square$ und III. $4n + 2 = \square + \square + \square$, von deren Wahrheit ich schon längst völlig versichert bin, ungeacht ich davon keine Demonstration angeben kann.

Aus der ersten, $n = \triangle + \triangle + \triangle$ folget $n = \frac{aa+a}{2} + \frac{bb+b}{2} + \frac{cc+c}{2}$. Nun sey $a = d + e$ und $b = d - e$, so wird

$n = dd + d + ee + \frac{cc+c}{2}$, folglich ist auch eine jegliche Zahl $n = \square + 2\triangle + \triangle$, woraus zugleich erhellet, dass immer $\triangle + \triangle = \square + 2\triangle$.

Aus der zweyten, $4n + 1 = \square + \square + \square$, folget $4n + 1 = 4aa + 4bb + (2c+1)^2$, also $n = aa + bb + cc + c$, und dahero $n = \square + \square + 2\triangle$.

Ferner, da eine jede ganze Zahl $= aa + bb + cc + c$, so ist auch eine jede gerade Zahl $2n = aa + bb + cc + c$, und also $n = \frac{aa+bb}{2} + \frac{cc+c}{2} = \frac{\square + \square}{2} + \triangle$. Oder man setze $a = d + e$ und $b = d - e$, so wird $n = dd + ee + \frac{cc+c}{2} = \square + \square + \triangle$.

Ebenfalls wird auch eine jede ungerade Zahl seyn $2n + 1 = aa + bb + cc + c$, da nun $cc + c$ immer grad ist, so muss von den Zahlen a und b die eine grad, die andere ungrad seyn, dahero $2n + 1 = 4aa + (2b+1)^2 + cc + c$ und also $n = 2aa + 2bb + 2b + \frac{cc+c}{2}$, folglich $n = 2\square + 4\triangle + \triangle$.

Die dritte Formul $4n + 2 = \square + \square + \square$ gibt $4n + 2 = 4aa + (2b+1)^2 + (2c+1)^2$ also ist $n = aa + bb + b + cc + c$, und dahero $n = \square + 2\triangle + 2\triangle$. Setzt man $b = d + e$, $c = d - e$, so wird

$$n = aa + 2dd + 2d + 2ee = \square + 2\square + 4\triangle.$$

Ferner ist auch $2n = \square + 2\triangle + 2\triangle$ und also $\square$ grad, dahero wird $2n = 4aa + bb + b + cc + c$ und

$$n = 2aa + \frac{bb+b}{2} + \frac{cc+c}{2} = 2\square + \triangle + \triangle.$$

Weil weiter $\triangle + \triangle = \square + 2\triangle$, so ist $n = 2\square + \square + 2\triangle$, folglich auch $2n = 2\square + 4\square + 2\triangle$ und also $n = \square + 2\square + \triangle$.

Oder da auch $2n+1=2aa+(2b+1)^2+cc+c$, so wird $n=aa+2bb+2b+\frac{cc+c}{2}=\square+4\triangle+\triangle$. Endlich ist auch

$2n+1=\square+2\triangle+2\triangle=(2a+1)^2+bb+b+cc+c$, und $n=2aa+2a+\frac{bb+b}{2}+\frac{cc+c}{2}$, oder $n=4\triangle+\triangle+\triangle$ $=\square+2\triangle+4\triangle$.

Also ist auch $2n=4\square+2\triangle+4\triangle$ oder $n=2\square+\triangle+2\triangle$, oder $2n+1=(2a+1)^2+2\triangle+4\triangle$ und also $n=\triangle+2\triangle+4\triangle$.

Da $4n+2=4aa+(2b+1)^2+(2c+1)^2$, so ist $2n+1=2aa+2bb+2b+2cc+2c+1$. Es sey $b=d+e$, $c=d-e$, so wird $2n+1=2aa+4dd+4ee+4d+1$ $=2\square+\square+\square$. Also ist ein jeglicher numerus impar $2n+1=2\square+\square+\square$, welches Ew. erstes, meines Erachtens sehr merkwürdiges theorema war. Alle diese hier gefundene Formuln sind also folgende

I. $n=\triangle+\triangle+\triangle$;	VIII. $n=2\square+\square+2\triangle$;
II. $n=\square+2\triangle+\triangle$;	IX. $n=\square+2\square+\triangle$;
III. $n=\square+\square+2\triangle$;	X. $n=2\square+\triangle+\triangle$;
IV. $n=\square+\square+\triangle$;	XI. $n=\square+4\triangle+\triangle$;
V. $n=2\square+\triangle+4\triangle$;	XII. $n=4\triangle+\triangle+\triangle$;
VI. $n=\square+2\triangle+2\triangle$;	XIII. $n=2\square+\triangle+2\triangle$;
VII. $n=\square+2\square+4\triangle$;	XIV. $n=\triangle+2\triangle+4\triangle$;

XV. $2n+1=\square+\square+2\square$.

Da sowohl $8n+3$ als $8n+6$ allzeit in 3 quadrata zertheilt werden kann, so folgt, dass $8n+7-pp$, wenn $pp=8m+4$ oder $=8m+1$, d. i. wenn p entweder ein numerus impar oder impariter par ist, allzeit eine summa trium quadratorum sey, wie Ew. gemeldet haben.

Dass aber omnis numerus $8n+2$ in dieser Form $(2\pm 2)^{2e}+\square+\square$ enthalten sey, kann ich nicht recht begreifen. Sollte der Sinn davon dieser seyn, dass allzeit $8n+2=\square+\square+q$, da q ist entweder 0, oder 16 oder 256, oder 4096 etc., welches die Werthe sind von $(2+2)^{2e}$, so würde solches in dem Fall $8n+2=154$ nicht Statt finden, indem $154-q$ immer eine summa duor. quadr. wird; es wäre denn, dass der exponens e auch 0 seyn könnte und folglich auch $q=1$; ob ich gleich zweifle, ob auch in diesem Fall sich keine Ausnahme finden sollte.

Ich bin neulich auf eine sonderbare Betrachtung gefallen, vermittelst welcher viel Diophanteische problemata sehr leicht können solvirt werden. Wenn man z. Ex. für x, y, z numeros rationales bestimmen kann, dass dieser Aequation

$$xx+yy+zz-2x-2y-2z+1=0$$

satisfacirt wird, so müssen alle surdische (*sic!*) Formuln, in nachfolgenden Aequationen, so aus jener entstehen, rational werden,

$$x=1\pm\sqrt{(2y+2z-yy-zz)};$$
$$y=1\pm\sqrt{(2x+2z-xx-zz)};$$
$$z=1\pm\sqrt{(2x+2y-xx-yy)};$$
$$x+y=1\pm\sqrt{(2z-zz+2xy)};$$
$$x+z=1\pm\sqrt{(2y-yy+2xz)};$$
$$y+z=1\pm\sqrt{(2x-xx+2yz)};$$
$$x-y=1\pm\sqrt{(2z+4y-2xy-zz)};$$
$$y-x=1\pm\sqrt{(2z+4x-2xy-zz)};$$
$$x-z=1\pm\sqrt{(2y+4z-2xz-yy)};$$
$$z-x=1\pm\sqrt{(2y+4x-2xz-yy)};$$
$$y-z=1\pm\sqrt{(2x+4z-2yz-xx)};$$
$$z-y=1\pm\sqrt{(2x+4y-2yz-xx)};$$
$$x+y+z=1\pm\sqrt{(2xy+2xz+2yz)}.$$

Wenn also nur eine von diesen Formuln rational gemacht wird, welches sehr leicht ist, so werden alle übrige 12 von selbsten rational; solches geschieht also nach der ersten, wenn

$$x = \frac{pp+qq+rr+2pr+2qr}{pp+qq+rr},\quad y = \frac{2p(p+q)}{pp+qq+rr},\quad z = \frac{2q(p+q)}{pp+qq+rr}.$$

Wenn also drey solche Zahlen gesucht werden sollten, dass alle obigen XIII surdischen Formuln rational werden, welches problema nach der gewöhnlichen Art beynahe unmöglich seyn würde, so können doch hieraus leicht unendlich viel Solutionen angegeben werden. Als, wenn $p=1$, $q=2$, $r=2$, so wird $x=\frac{7}{3}$, $y=\frac{2}{3}$, $z=\frac{4}{3}$.

Meine Demonstration des vorher gemeldten theorematis verhält sich so: Sit (Fig. 29) propositum trapezium $ABCD$ cum diagoniis AC, BD. Compleatur 1mo parallelogrammum $ABED$, cujus diagonales AE, BD se in G bisecabunt. Tum ducta CE compleatur parallelogr. $ACEF$ cum diag. CF, ductisque BF, DF, erit quoque $BCDF$ parallelogr. Jam cum in omni parallelogrammo sit summa quadr. diagon. = summae quadr. laterum, ex $\square ACEF$ erit $AE^2+CF^2=2AC^2+2CE^2$

ex $\square BCDF$ erit $BD^2+CF^2=2BC^2+2CD^2$

ergo

$$2AC^2+2CE^2-AE^2=2BC^2+2CD^2-BD^2=CF^2.$$

Porro $\square ABED$ dat $AE^2+BD^2=2AB^2+2AD^2$, quae aequatio ad priorem addita dat

$$2AC^2+2CE^2+BD^2=2AB^2+2BC^2+2CD^2+2AD^2-BD^2$$

adde

$$BD^2 = \qquad BD^2$$

et divide per 2, fiet

$$AC^2+CE^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2.$$

At quia AE uti et BD bisecta est in G, bisecetur quoque

AC in H, et ducta GH erit parallela ipsi CE ejusque semissi aequalis, ita ut sit $CE^2 = 4GH^2$, quo substituto erit $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4GH^2$, Q. E. D.

Wenn man, wie gemeiniglich in der Geometrie zu geschehen pflegt, eine demonstrationem more veterum verlangt, so verdienet diese einen grossen Vorzug vor derjenigen, welche Ew. mir zu überschreiben die Güte gehabt. Will man aber nur von der Wahrheit, worauf doch die Hauptsach ankommt, überzeugt seyn, so würde meine Demonstration allen Vorzug verlieren, weil ich darin die angeführte Eigenschaft der parallelogrammorum voraussetze, deren Ew. nicht nur nicht nöthig haben, sondern dieselbe auch zugleich mit beweisen.

Hr. Oechliz aus Leipzig, welcher nach St. Petersburg zur mathesi subliniori berufen worden, die Vocation aber ausgeschlagen, hat eine sehr schöne Solution des schon längst erwähnten problematis catoptrici erfunden, welche Ew. unfehlbar gefallen wird.

Es sey (Fig. 30) MN eine von den gesuchten curvis, welche alle radios ex puncto fixo C emissos post geminam reflexionem in M et N factam in idem punctum C remittat. Man verlängere MN beiderseits in E et F, so dass $ME = CM$ et $NF = CN$, so wird die longitudo EF constans seyn und die Puncte E und F werden in einer solchen krummen Linie EIF seyn, dass die grade Linie EF beiderseits auf dieselbe perpendiculär fällt. Die ganze Sache kommt also darauf an, dass man solche krumme Linien EIF finde, dass die auf ein jegliches Punct derselben gezogenen Perpendicular-Linien EF dieselbe krumme Linie nochmal in F ad angulos rectos durchschneiden. Denn diese Eigenschaft schliesst jene schon in sich, dass die quantitas lineae hujus EF con-

staus seyn müsse. Man sieht nun alsbald, dass die Linie EIF ein Circul seyn könne, dessen diameter $= EF$; es gibt aber noch unendlich viel andere krumme Linien, welche diese Eigenschaft mit dem Circul gemein haben, wie ich bald zeigen werde.

Hat man aber eine solche krumme Linie EIF gefunden, so kann daraus sehr leicht die gesuchte krumme Linie MN gefunden werden, und das auf unendlich vielerley Art. Denn man kann das punctum radians C nach Belieben annehmen, und wenn man daraus ad terminos lineae EF die graden Linien CE und CF zieht, dieselben in G und H in zwey gleiche Theile schneidet, aus den Puncten G und H auf dieselben die Perpendicular-Linien GM und HN aufrichtet, bis solche der EF begegnen, so sind nicht nur die Puncte M und N in der gesuchten Linie MN, sondern GM und HN sind auch tangentes derselben. Nimmt man für EIF ein Circul an, diametri EF, so wird MN eine ellipsis, deren foci sind das punctum radians C und das centrum circuli EIF.

Um aber alle mögliche krumme Linien EAF (Fig. 31) zu finden, welche von ihren normalibus ERF nochmal in F normaliter durchschnitten werden, so setze ich die abscissas $AP = x$, $AQ = X$, die applicatas $PE = y$, $QF = -Y$, (weil diese ad partes oppositas axis fällt). So ist die subnormalis $PR = \frac{ydy}{dx}$ und die subnormalis $QR = \frac{-YdY}{dX}$. Da nun $PE : PR = QF : QR$, so wird $y : \frac{ydy}{dx} = -Y : \frac{-YdY}{dx}$, folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$. Jetzt setze ich $dx = pdy$, so wird auch $dX = pdY$ und $PR = \frac{y}{p}$, $QR = \frac{-Y}{p}$; also $PQ = \frac{y-Y}{p} =$

$X - x$. Diese Aequation differentiiret gibt

$$\frac{dy - dY}{p} - \frac{(y - Y)dp}{pp} = dX - dx = p(dY - dy),$$

oder

$$(dy - dY)\left(\frac{1 + pp}{p}\right) = \frac{(y - Y)dp}{pp},$$

das ist

$$\frac{dy - dY}{y - Y} = \frac{dp}{p(1 + pp)} = \frac{dp}{p} - \frac{pdp}{1 + pp}.$$

Dahero ist $l(y - Y) = l2a + lp - l\sqrt{(1 + pp)}$, oder $y - Y = \frac{2ap}{\sqrt{(1 + pp)}}$, und folglich $X - x = \frac{2a}{\sqrt{(1 + pp)}} = PQ$. Da nun $PE + QF = y - Y = \frac{2ap}{\sqrt{(1 + pp)}}$, so wird $EF^2 = PQ^2 + (PE + QF)^2 = 4aa$, und also $EF = 2a$, dahero constans.

Da $y - Y = \frac{2ap}{\sqrt{(1 + pp)}}$, so setze ich $y = P + \frac{ap}{\sqrt{(1 + pp)}}$ und $Y = P - \frac{ap}{\sqrt{(1 + pp)}}$, wo P eine functionem rationalem quamcunque ipsius p bedeuten mag, denn solchergestalt wird die conditio continuitatis erfüllt, weil die Formul $P \pm \frac{ap}{\sqrt{(1 + pp)}}$ wegen des Radicalzeichens von Natur ambigua ist, und also auf beide Puncte E und F zugleich geht. Weil nun $y = P + \frac{ap}{\sqrt{(1 + pp)}}$, so ist $dy = dP + \frac{adp}{(1 + pp)^{\frac{3}{2}}}$, und also

$$dx = pdy = pdP + \frac{apdp}{(1 + pp)^{\frac{3}{2}}},$$

wovon das integrale ist $x = \int pdP - \frac{a}{\sqrt{(1 + pp)}}$. Wenn demnach für P eine functio quaecunque rationalis von p angenommen wird, so hat man pro curva AE diese Formuln

$$AP = x = \int pdP - \frac{a}{\sqrt{(1 + pp)}}, \quad PE = y = P + \frac{ap}{\sqrt{(1 + pp)}},$$

aus welchen zugleich die coordinatae pro puncto altero respondente F gefunden werden, wenn man nur das signum des radicalis $\sqrt{(1+pp)}$ verwandelt. Will man curvas algebraicas haben, so darf man für P nur eine solche functionem ipsius p annehmen, dass $\int p\,dP$ integrabel wird. Zum Ex. setze man $P = 2bp$, so wird

$$x = 2b\int p\,dp - \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}} = bpp - \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}} + c$$

und $y = 2bp + \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$. Erstere gibt

$$px = bp^3 + ap - \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}},$$

welche zu jener addirt gibt $y + px = bp^3 + (a+2b)p$. Wenn nun aus diesen zwey Aequationen der Buchstab p eliminirt wird, so erhält man die Aequation zwischen x und y. Zur Construction sind aber obige Formuln bequemer, weil in diesem Exempel seyn wird $AR = bpp + a + 2b$, $PQ = \frac{2a}{\sqrt{(1+pp)}}$, $PR = 2b + \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$, $PE + QF = \frac{2ap}{\sqrt{(1+pp)}}$. Man kann aber auch in genere eine sehr leichte Construction geben, welche alle mögliche curvas, so diese Eigenschaft haben, in sich begreift, sie seyen algebraisch oder transcendentes.

Euler.

LETTRE CXVIII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Réponse a la lettre précédente.

St. Petersburg d. 15. Juli 1748.

Ew danke ich dienstlich für die viele Mühe, welche Sie über sich nehmen wollen, damit mir die verlangte Beschreibung der Sonnenfinsterniss zu rechter Zeit übersandt werden möchte, und will hoffen, dass selbige noch intra terminum allhie eintreffen werde. Ich würde aber auf Dero geehrtes letzteres Schreiben so zeitig noch nicht geantwortet haben, wenn ich nicht die von mir angeführte, aber mit $(2 \pm 2)^{2e}$ übel exprimirte Formul je eher je lieber zu corrigiren nöthig gefunden hätte, denn es ist

$$8n + 2 = (2 \pm 2)^{e+1} + \square + \square,$$

allwo e allezeit einen numerum integrum affirmativum bedeutet, oder auch $8n + 2 = (1 \pm 1)^{2e+2} + \square + \square$, gleich-

wie $8n + 1 = (1 \pm 1)^{2e} + (1 \pm 1)^{2f} + \Box$, allwo e und f integros affirmativos bedeuten; es ist auch sehr wahrscheinlich, dass sogar $4n + 1 = (1 \pm 1)^{2e+1} + \Box + \Box$. Insonderheit aber halte ich für merkwürdig, dass in dieser aequatione

$$4n + 3 = 2aa + 4bb + cc + 2 = 2AA + 4BB + CC,$$

allwo a ein numerus par und A impar ist, a in quocunque casu numeri n so angenommen werden kann, dass A gleich sey $a + 1$. In dem casu, wo $a = 0$, ist solches offenbar, in den übrigen casibus aber fehlet es more solito an der Demonstration, jedoch ist wohl zu verstehen, dass, wie gesagt, der valor a also angenommen werden kann und nicht nothwendig also beschaffen ist, als z. Ex. wenn $n = 19$ und $4n + 3 = 79$, so kann a zwey valores haben, nehmlich 4 und 6. Nicht der andere, sondern der erste ist hier applicable, damit die aequationes

$$4.19 + 3 = 2.4^2 + 6^2 + 3^2 + 2 = 2(4 + 1)^2 + 2^2 + 5^2$$

Statt finden und $A = a + 1 = 4 + 1$ werde.

Meine vorige formulas habe ich auf folgende Art herausgebracht, so in der That mit Ew. Methode übereinstimmet: Wenn man annimmt

$$1.)\quad 4aa + 2bb + 4cc + 4c + 1 = 2n + 1,$$

so wird

$$2.)\quad n = 2aa + bb + 2cc + 2c = 2\Box + \Box + 4\Delta.$$

Es sey n ein numerus par $= 2m$, so muss auch b ein numerus par $= 2d$ seyn, ergo

$$3.)\quad m = aa + 2dd + cc + c = 2\Box + \Box + 2\Delta.$$

Es sey $m = 2p$, so muss auch a. $2e$ seyn, ergo

$$4.)\quad p = 2ee + dd + \frac{cc + c}{2} = 2\Box + \Box + \Delta.$$

Sit in formula 2.) $n = 2m + 1$, erit $b = 2d + 1$, ergo

5.) $m = aa + 2dd + 2d + cc + c = \square + 4\triangle + 2\triangle$.
Sit $m = 2p$, erit $a = 2e$, ergo

6.) $p = 2ee + dd + d + \frac{cc+c}{2} = 2\square + 2\triangle + \triangle$.
Sit in formula 4.) $m = 2p + 1$, erit $a = 2e + 1$, ergo

7.) $p = 2ee + 2e + dd + d + \frac{cc+c}{2} = 4\triangle + 2\triangle + \triangle$.
Si in formula 3.) $m = 2p + 1$, erit $a = 2e + 1$, ergo

8.) $p = 2ee + 2e + dd + \frac{cc+c}{2} = 4\triangle + \square + \triangle$. etc.

Das Präsent, welches mir Ew. von Dero Introductione in analysin infinitorum machen, wird mir überaus angenehm seyn; ich hatte gar nicht gewusst, oder wenigstens gänzlich vergessen, dass Sie dergleichen Buch geschrieben, welches nunmehro vermuthlich in den gelehrten Zeitungen bald recensirt werden wird. Bey dieser Gelegenheit möchte ich wissen, ob Ew. Scientia navalis schon gedruckt worden? item, was Sie von einer Abhandlung ejusdem argumenti, so M. Bouguer herausgegeben, halten? item, möchte gern benachrichtigt seyn, ob der in Ew. Antworten auf die Fragen von den Cometen erwähnte neuentdeckte Planet sich in seiner Possession mainteniret und durch fernere Observationen bestätiget worden? item, ob der Comet von A. 1742 in dem Lauf des Mercurii einige Alteration verursacht?

Was die Aequation $xx + yy + zz - 2x - 2y - 2z + 1 = 0$ betrifft, so wird selbige positis $x - 1 = A$, $y - 1 = B$, $z - 1 = C$, in diese $AA + BB + CC = 2$ verwandelt, woraus alsofort offenbar ist, dass posito $A = \sqrt{(2 - BB - CC)}$ rationali, auch $-BB = AA + CC - 2$, oder $B = \sqrt{(2 - AA - CC)}$ oder $C = \sqrt{(2 - AA - BB)}$ rationales seyn müssen.

Vor Dero mir communicirte Solution des problematis von den diagonalibus trapezii sage ich schuldigsten Dank,

und observire hiebey annoch, dass wenn von den quatuor lateribus (Fig. 29) AB, BC, CD, DA eines durch einen numerum impariter parem, und die drey übrigen durch numeros impares exprimiret werden, alsdann die drey quadrata $AC^2 + BD^2 + 4GH^2$ unmöglich aus numeris integris bestehen können.

Die Solution des problematis catoptrici durch Hülfe einer curvae, deren normalis curvam secans allenthalben constans sey, ist allerdings sehr schön. Ich habe dabey angemerket, dass in der formula $y = P + \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ in casu $y =$ applicatae maximae, allezeit seyn müsse $P = -ap + a\sqrt{(1+pp)}$, hingegen kann ich mir nicht recht vorstellen, wie die curva aussehen müsse, wenn man (Fig. 32) das spatium EM a vertice E usque ad applicatam maximam MP interceptum ganz klein, als $\frac{a}{1000}$ annimmt, und schliesse daraus, dass eben dieses spatium EM gewisse limites haben werde.

Goldbach.

LETTRE CXIX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Accord des tables lunaires d'Euler avec l'observation de l'éclipse du soleil. Examen du théorème numérique de Goldbach. Introduction à l'analyse des infinis et Science navale. Action de la comète de 1744 sur le cours de Mercure. Observations sur le quadrilatère et la courbe crtoptrique.

Berlin d. 6. August 1748.

Nachdem uns allhier der Himmel ziemlich günstig gewesen, um neulich die Sonnenfinsterniss sehr genau zu beobachten, so habe ich Ursach mit meinen neuen tabulis lunaribus vollkommen zufrieden zu seyn. Denn sowohl der Anfang als das Ende hat näher als auf eine Minute mit meiner Rechnung übereingetroffen, indem der Anfang nur 15″ und das Ende 30″ später bemerket worden, als ich angesetzet hatte. Insonderheit aber war diese Finsterniss würklich annularis, wie ich gefunden hatte, ungeacht nicht nur die andern tabulae, welche doch für die besten gehalten werden, keinen annulum anzeigten, sondern auch einige HH. Pariser astronomi meine Rechnung durch einige bey den tabulis ange-

brachte vermeinte correctiones widerlegen und behaupten wollen, dass diese Finsterniss allhier nur partialis seyn würde. Die nach den übrigen tabulis lunaribus angestellten Rechnungen haben sowohl im Anfang als Ende um 2, 3 ja bis auf 10 Minuten gefehlt. Uebermorgen werde ich sehen, wie genau meine Rechnung bey der Mondfinsterniss eintreffen wird.

Was die Formul $8n + 2 = (2 \pm 2)^{e+1} + \square + \square$ betrifft, so kann ich zwar keinen casum in contrarium entdecken, ich sehe aber doch die Wahrheit davon nicht ein. Hingegen kann ich diese Formul $8n + 1 = (1 \pm 1)^{2e} + (1 \pm 1)^{2f} + \square$ nicht zugeben, wofern dieselbe so viel anzeigen soll, dass eine jede Zahl von dieser Form $8n + 1$ allzeit in drey dergleichen quadrata zertheilet werden könne, wovon zwey zugleich potestates binarii seyen, *cyphra non exclusa*. Denn wenn $8n + 1 = 217$, so findet diese Formul nicht Statt.

Wenn es gewiss, dass $8n + 2 = (1 \pm 1)^{2e+2} + \square + \square$, so folget von selbsten, dass $4n + 1 = (1 \pm 1)^{2e+1} + \square + \square$, wenn man nur jene durch 2 dividirt, weil $\frac{\square + \square}{2} = \square + \square$. An der Wahrheit dieser gedoppelten Formul $4n + 3 = 2aa + 4bb + cc + 2 = 2AA + 4BB + CC$ und dass allzeit seyn könne $A = a + 1$, finde ich keine Ursach zu zweifeln; ich kann aber eben so wenig den Grund davon einsehen. Indessen sind solche Sätze, welche durch kein Exempel refutirt werden können, freylich um so viel mehr merkwürdig.

Für die gütige Communication der Demonstrationen der mir letzt überschriebenen schönen Eigenschaften der Zahlen sage ich allerschuldigsten Dank, und es freut mich nicht wenig, dass die selbenmit denen, so ich herausgebracht, so schön übereinstimmen.

Die Introductio in analysin infinitorum, welche mir die Ehre gegeben Ew. zu praesentiren, ist schon seit drey Jahren unter der Press gewesen und anjetzo wird von Mr. Bousquet meine Abhandlung vom Calculo differentiali gedruckt.

Weil die Kaiserl. Akademie der Wissenschaften ihren Anspruch auf meine Scientiam navalem erneuert, so habe ich letztens das ganze Werk an des Herrn Präsidenten Exc. überschicket und ersuche Ew. bey Gelegenheit etwan den Druck derselben durch Vorstellungen bey dem Hn. Schumacher gütigst beschleunigen zu helfen; insonderheit da in des Hn. Bouguer's Werk von dieser Materie schon ziemlich viel enthalten, was ich darüber herausgebracht habe, und da meine principia, worauf die ganze Sache beruhet, je länger je mehr bekannt werden, so befürchte ich, dass gar Alles anderwärts herauskommen möchte, wenn der Druck meines Werks nicht bald zu Stande kommt. Von dem erwähnten neuen Planeten, welcher alle 4 Jahre seinen Lauf vollenden soll, ist nicht nur nichts Neues entdeckt worden, sondern ich bin versichert, dass der Auctor desselben nicht genugsam in der theoria planetarum et cometarum erfahren gewesen, dass er aus den Observationen einen solchen Schluss hätte machen können.

Nachdem ich den locum Mercurii auf die Zeit des Cometen A. 1744 genauer berechnet, so habe gefunden, dass derselbe dem Cometen nicht so nahe gewesen, als ich anfänglich gemeinet hatte, und dass folglich in seinem Lauf keine Alteration hat entstehen können.

Wenn die 4 latera trapezii also durch Zahlen ausgedruckt werden, dass eines ein numerus impariter par, die drey übrigen aber numeri impares sind, so wird die summa qua-

dratorum laterum eine solche Zahl $8n + 7$, und kann folglich rationaliter nicht in drey quadrata resolvirt werden.

Ew. dubium gegen die figuram curvae, deren normalis curvam secans allenthalben constans ist, kann ich nicht genug einsehen. Es sey (Fig. 31) EAF eine solche curva, wo die recta utrinque normalis $EF = 2a$, die abscissa $AP = x$, die applicata $PE = y$, und P eine functio rationalis von p, so habe gefunden, dass $x = \int p\,dP - \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$, und $y = P + \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$. Hieraus wird $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{p}$ und folglich die applicata y maxima, wenn $\frac{dy}{dx} = 0$, d. i. wenn $p = \infty$. Nun kann aber für P eine solche functio von p angenommen werden, dass in diesem Fall eben nicht wird $P = -ap + a\sqrt{(1+pp)}$, oder $P = 0$, weil $p = \infty$. Hingegen wird die applicata maxima seyn $= P + a$, wenn in P gesetzt wird $p = \infty$, und die abscissa wird $x = \int p\,dP$.

Euler.

LETTRE CXX.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Réponse à la lettre précédente. Deux théorèmes de nombres.

St. Petersburg d. 7. September 1748.

Die in Charten vorgestellte Sonnenfinsterniss und die dazu gehörige gedruckte Beschreibung sind mir Tages zuvor und also noch zu rechter Zeit eingehändigt worden, vor deren Uebersendung ich Ew. schuldigsten Dank sage, wie ich denn Deroselben zugleich zu der genauen Uebereinstimmung dieser Sonnenfinsterniss mit Dero tabulis astronomicis von Herzen gratulire und ein Gleiches von der letztverwichenen Mondfinsterniss zu erfahren hoffe. Ich habe auch nicht unterlassen gehörigen Ortes die verlangte Erinnerung wegen der Scientiae navalis zu thun, und zuverlässig vernommen, dass man, wie mir schon vorhero bekannt war, und Ew. ohne Zweifel bereits von Andern werden erfahren haben, mit dem Druck dieses Werkes eifrigst fortfahrt.

Die für $8n + 1$ angegebene Formul ist allerdings unrichtig; ich habe aber bey Gelegenheit des theorematis Fermatiani noch bemerket, dass gleichwie ein jedes quadratum impar, oder radicis impariter paris, dummodo minus sit quam $8m + 7$, diese Eigenschaft hat, dass es eines von den vier quadratis ist, deren aggregatum $= 8m + 7$; also auch ein jedes quadratum impar, oder radicis pariter paris, dummodo sit minus quam $8m + 3$, diese Eigenschaft hat, dass es eines von den vier quadratis ist, deren summa $= 8m + 3$. Weil nun 0 unter die quadrata pariter paria mit gerechnet werden kann, so geschiehet es gleichsam per accidens, dass alle numeri $8m + 3$ auch aus drey quadratis imparibus allein bestehen können. Wenn man ein quadratum par durch □, und ein quadratum impar durch ⊡, ein quadratum ambiguum aber, so diverso respectu par oder impar seyn kann, durch ⊟ oder ⊟ andeutet, so lässet sich dieses alles durch folgende Formul exprimiren

$$4 ⊟ + ⊡ + ⊡ + ⊡ = 8m + 5 \pm 2,$$

allwo vor ⊟, in casu signi superioris $+$, ein quadratum impar, in casu signi inferioris $-$ aber ein quadratum par zu verstehen ist.

Ich habe auch observiret, dass wenn man setzet

$$2(2a + 1)^2 + 4bb + (2c - 1)^2 = 4n - 1$$

und $8n - 6 = 2(2A + 1)^2 + 4BB + 4CC$, posito pro n numero eodem integro positivo, alsdann allezeit genommen werden könne $B = b$. Es sey z. Ex. $n = 29$, so kann beiden Aequationen ein Genüge geschehen, wenn man setzet $B = b = 4$, denn es wird $2.1 + 4.16 + 49 = 115$ und $2.49 + 4.16 + 4.16 = 226$.

Was die curvas, deren normalis curvam secans allenthalben constans ist, anlangt, so bin ich der Meinung, dass

wenn in denselben ein axis curvam in duas partes similes et aequales dividens $= 2a$ angenommen wird, die applicata maxima nicht anders als $= a$ seyn könne, und dieses aus folgender Ursache: Sit (Fig. 33) axis $AB = 2a$; sit normalis in axem incidens $ER = a - u$, erit normalis ab axe reflexa RF sub eodem angulo $(FRB = ERA) = a + u$. Cum igitur in casu, quo normalis fit perpendicularis ad axem, quantitas variabilis u fiat $= 0$, adeoque ipsa normalis $= a$, applicata vero maxima nihil aliud sit nisi normalis ad axem perpendicularis, sequitur applicatam maximam in omnibus istis curvis esse $= a$. Dahero sehe ich nicht, wie die applicata maxima $= a + P$ seyn könne, ohne dass $P = 0$ sey.

Goldbach.

LETTRE CXXI.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Eclipses du soleil et de la lune. Travaux dioptriques d'Euler.

Berlin d. 12. October 1748.

Die letzte Sonnenfinsterniss ist zwar mit meinen neuen tabulis lunaribus genauer übereingekommen, als mit allen andern und auch denjenigen, welche für die richtigsten gehalten werden, es fand sich aber doch ein geringer Unterschied von ungefähr einer Minute in der Zeit, und der annulus dauerte nicht so lang, als ich nach meiner Rechnung gefunden hatte. Der erstere Fehler kommt theils von der noch nicht genugsam genau bestimmten differentia meridianorum von Berlin und Paris, theils von der noch in den Tabellen selbst befindlichen kleinen Unrichtigkeit her, welche ich mir zu heben nicht getraue, denn ich habe die elementa meiner Tabellen ausser der Theorie, auf observationes

eclipsium lunarium gegründet, über deren momenta man nicht wohl auf eine Minute gewiss seyn kann. Es lässt sich nehmlich wegen der penumbrae weder der Anfang noch das Ende einer Mondfinsterniss so genau besimmen, dass man nicht noch um eine Minute oder mehr fehlen sollte. Was die Dauer des annuli anlangt, so hatte ich mit den meisten astronomis die parallaxin lunae zu gross angenommen, allein eben diese Finsterniss hat mich in den Stand gesetzt, diese parallaxin auf das Genaueste zu bestimmen, welche ich um mehr als 1′ kleiner befunden, als sie in den tabulis Cassinianis angesetzt wird, und M. le Monnier hat auch wirklich gefunden, dass die parallaxis lunae um ein Merkliches kleiner sey, als bisher die astronomi geglaubet, wodurch ich in meiner Conception um so viel mehr bestärket werde. Hieraus habe ich in meinen Tabellen den Articul von der parallaxi corrigirt, und hoffe inskünftige, was diesen Punkt betrifft, in Bestimmung der Finsternisse gar nicht mehr zu fehlen.

Die letzte Mondfinsterniss haben wir auch hier mit allem Fleiss beobachtet. Nach meiner Rechnung sollte sich dieselbe d. 8. Augusti also zutragen: I. der Anfang um 11^h 3′ 53″, II. das Ende 13^h 16′ 52″. In der Observation selbst war der Unterschied zwischen umbra und penumbra so gering, dass man bey etlichen Minuten weder vom wahren Anfang noch vom wahren Ende gewiss seyn konnte. Es schien uns aber der Anfang um 11^h 4′ à 5′, das Ende aber um 13^h 17′ à 18′ geschehen zu seyn. Andere haben diese beyden momenta theils früher theils später estimirt. Ich habe in einer verfinsterten Kammer meines Hauses das Bild des Mondes durch einen 10schuhigen tubum auf ein weisses Papier fallen lassen, worauf sich der Mond mit allen Flecken sehr

deutlich praesentirt, und ich habe den Anfang der Finsterniss angeschrieben, als ich auf dem Papier nicht mehr den Rand des Mondes ganz erblickte, das Ende aber als der Bord wiederum rund berum ganz erschien, wobei zu merken, dass wenn die Vorstellung des Bilds stärker oder schwächer gewesen wäre, beyde momenta früher oder später bemerket seyn würden. Denn wenn man durch den tubum grad gegen den Mond sahe, so konnte man auch bey der stärksten Verfinsterung den verfinsterten Theil erkennen, als welcher von den durch die Atmosphaer der Erde durchgedrungenen Lichtstrahlen noch erleuchtet wurde. Der verfinsterte Theil des Monds schien auch ein Stück von einem kleinern Circul zu seyn, als der erleuchtete, wovon aus angeführtem Grund die Ursach ganz klar ist, denn die durch die Atmosphaer der Erde gegangenen Strahlen waren zu schwach, den Rand des Monds, auf welchen sie so schief auffielen, zu erleuchten, dahero wir nicht den ganzen verfinsterten Theil erblicken konnten.

Die Observation, dass $8m + 5 \pm 2 = 4 \boxminus + \boxdot + \boxdot + \boxdot$ kommt mir sehr merkwürdig vor, und ich vermuthe, dass diese Betrachtungen endlich zur wahren Quelle, woraus diese Eigenschaften fliessen, leiten werden. Ich habe jetzt wegen anderer Geschäfte seit einiger Zeit über diese Materie nicht mehr denken können; und anjetzo bin ich bemühet einen Einfall ins Werk zu richten, welchen ich gehabt, um solche Objectivgläser zu verfertigen, welche eben den Dienst leisten sollen, als die Spiegel in den tubis Newtonianis und Gregorianis. Der Fehler der gewöhnlichen Objectivgläser rühret nur daher, dass die Lichtstrahlen nicht einerley Refraction leiden und also z. Ex. die rothen Strahlen einen andern focum formiren als die blauen. Dahingegen von

einem Spiegel alle Strahlen in eben denselben focum reflectirt werden. Dieser Unterschied zwischen den focis der rothen und blauen Strahlen wird auch um so viel grösser, je weiter dieselben vom Glas entfernt sind, und bey einem Objectivglas von 27 Schuh, fällt der rothe focus einen ganzen Schuh weiter als der blaue, woraus die Undeutlichkeit und die Farben der durch lange tubos gesehenen objectorum entspringen. Wenn man also solche Objectivgläser verfertigen könnte, welche alle Strahlen in einen gemeinen focum zusammenwürfen, so würde man von denselben eben diejenigen Vortheile zu gewarten haben, als von den Spiegeln. Dieses ist aber nicht möglich mit blossem Glas zu bewerkstelligen. Dahero bin ich auf die Gedanken gefallen, ob es nicht möglich wäre aus Glas und Wasser oder zwey andern verschiedenen durchsichtigen Materien solche lentes objectivas zu verfertigen, und zweifelte hieran um so viel weniger, da wir sehen, dass in den Augen, welche aus verschiedenen durchsichtigen Cörpern bestehen, eine solche Undeutlichkeit wegen der verschiedenen Brechung der Lichtstrahlen nicht wahrgenommen wird. Ich habe mir dahero eine solche lentem compositam vorgestellt (Fig. 34), so aus zwey Gläsern *abba*, *cddc* und dem Zwischenraum *bccb* mit Wasser angefullt bestehen soll.

Nachdem ich die radios der Krümmungen *aa*, *bb*, *cc*, *dd* generaliter durch die Buchstaben *a*, *b*, *c*, *d* bemerket, so habe ich ex lege refractionis erstlich die distantiam foci a radiis rubris formati, und dann die distantiam foci a radiis violaceis formati gesuchet. Hernach habe ich diese beyden expressiones einander gleich gesetzt nud daraus die Verhältniss zwischen den radiis *a*, *b*, *c*, *d* bestimmet. Die Solution fiel dahin aus, dass beyde Gläser menisc. seyn müssen, von

welchen sich der radius faciei convexae zum radius faciei concavae verhalte wie 23 zu 10. Solche meniscos habe ich mir schon verschiedene schleifen lassen; es findet sich aber noch diese Schwierigkeit, dass das Glas nicht eben die Figur, welche die Schüssel hat, auf das Genaueste bekommt. Gleichwohl kann ich schon von solchen Objectivgläsern einen merklichen Vortheil spüren. Ich werde aber noch mehrere solche meniscos verfertigen lassen um zu sehen, ob etwan casu die erforderte Proportion näher getroffen wird.

Ew. haben vollkommen Recht, dass in den curvis, deren normales secantes allenthalben constantes sind, die maxima applicata ad diametrum curvae relata der Hälfte jener quantitatis constantis gleich seyn müsse. Die Sache kommt also nur darauf an, ob in diesen curvis immer ein solcher axis curvam in duas partes similes et aequales secans Platz finde? welche Frage ich nicht mit ja beantworten kann.

Euler.

LETTRE CXXII.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Courbe catoptrique. Théorème d'analyse indéterminée.

Moscau d. 10 Februar 1749.

Das Vornehmste, so ich jetzo bey der curva catoptrica anzumerken habe, bestehet in Folgendem:

Wenn (Fig. 35) die Catoptrica, deren axis $AB = a$ ist, compendii causa die curva A, und die curva huic respondens, deren axis $\alpha\beta = 2a$ ist, und welche diese Eigenschaft hat, dass alle normales curvam secantes auch $= 2a$ sind, die curva α genannt wird, so wird diese curva α, weil sie allezeit einen axem hat, welcher der axis AB utrinque continuatus ist, zur applicata maxima ad axem haben $ER = a$. Hieraus ziehe ich durch ein sehr simples raisonnement nachfolgende zwey corollaria:

I. Si distantia verticis A a puncto radiante C vocetur b, et abscissa CR sit $= x$, applicata huic abscissae respondens $MR = y$, datae per x, semper invenietur spatium interceptum CR maximum, si ponatur $CR = x = \sqrt{(aa - 2ay)}$.

II. Si in axe curvae a sumatur $aF = F\beta = a$, erit in curva A spatium $CF = a - 2b$ minimum omnium, inter punctum radians C et radium ad axem reflexum interceptorum, ita ut locus radiorum ad axem reflexorum sit inter F et R.

Uebrigens habe ich auch bemerket, dass so oft in dieser Aequation $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + 4\delta + 4 = AA + BB + CC$ alle numeri integri, qui his litteris designantur, bekannt sind, in der folgenden Aequation

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta + 8 = PP + QQ + RR + SS$$

die numeri P, Q, R, S angegeben werden können. Sit ex. gr. $\alpha = 3$, $\beta = 5$, $\gamma = 7$, $\delta = 3$, $A = 3$, $B = 3$, $C = 9$, erunt $P = 3$, $Q = 3$, $R = 9$, $S = 1$.

Goldbach.

LETTRE CXXIII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Recherches ultérieures sur la courbe catoptrique.

Berlin d. 4. Marz 1749

Weil es bey der bekannten curva catoptrica darauf ankommt, dass man eine curvam finde, deren normales utrinque secantes allenthalben constantis magnitudinis seyen, so habe in beygefügter Figur (Fig. 36) eine solche curvam *CMEADNBEC* mit allem Fleiss aufgerissen, in welcher alle diese normales, *CD*, *MN*, *IB*, *EE*, *AK* gleich gross sind, und merke dabey zuvörderst an, dass es auch solche curvas gebe, welche gar keinen diametrum haben; von der beygefügten aber ist *CD* ein diameter. Hat man eine solche curvam gefunden, so kann man nach Belieben das punctum radians *F* entweder im axe oder ausser demselben annehmen und daraus leicht die curvam catoptricam *GLH* beschreiben. Man zieht

nehmlich aus dem puncto radiante F ad quodvis curvae prioris punctum M, die Linie FM, schneidet dieselbe in T in zwey gleiche Theile, richtet darauf in T die Perpendicularlinie TL auf, bis sie die normalem MR in L durchschneidet, so ist L ein punctum in der Catoptrica und LT die tangens daselbst. Wenn nun das punctum radians F in dem axe oder diametro CD curvae generatricis angenommen worden, so wird auch die Linie GH ein diameter der curvae catoptricae selbst seyn; sonsten aber, wenn F nicht wäre in axe CD genommen worden, oder wenn die curva generatrix CAB gar keinen diametrum hätte, so würde sich auch in der curva catoptrica kein diameter befinden. Also ist es gewiss, dass so oft die curva catoptrica GLH einen diametrum hat, auch die curva generatrix CAB ebendenselben diametrum haben werde, aber nicht vicissim; und dahero finden Ew. Anmerkungen nur alsdann Statt, wenn die curva catoptrica einen diametrum hat.

Das punctum radians F mag angenommen werden wo man will, wenn man durch dasselbe ad curvam generatricem die normalem zieht CFD, und die partes CF und DF in zwey gleiche Theile schneidet, so bekommt man die puncta G und H in der Catoptrica.

Wenn die curva generatrix CAB einen diametrum hat, als CD, und Ed die grösste applicata ist, weil $Ed = dE$ und ad curvam normalis, so muss $EE = CD$, und also $dE = \frac{1}{2} CD$ seyn. Es sey $CD = 2a$, so wird die applicata maxima $dE = a$. Wenn also in der curva catoptrica gesetzt wird $Fd = x$, $dq = y$, so ist

$$Fq = Eq = \sqrt{(xx + yy)} = a - y,$$

und folglich $x = \sqrt{(aa - 2ay)}$, wie Ew. in der ersten An-

merkung gefunden, und in diesem Fall ist das spatium Fd maximum vel minimum inter punctum radians F et radium reflexum: in meiner Figur nehmlich ist es maximum; es würde aber minimum seyn, wenn ich das punctum radians F auf der andern Seite gegen D angenommen hätte. Gleichwie aber in der Figur das spatium FR in Fd ein maximum wird, so ist hingegen Fc der valor minimus desselben, wenn cC der radius osculi curvae generatricis in C, und folglich cD der radius osculi in D ist. Also fällt dieser Punct c nicht nothwendig in die Mitte des diametri CD; vielmehr wird aus Folgendem erhellen, dass dieser Punct c niemal in die Mitte der Linie CD falle, als wenn die curva generatrix CAB ein Circul ist, in welchem Fall die catoptrica eine ellipsis wird. Denn wenn die curva generatrix in se rediens et quasi circuliformis seyn soll, so muss ihre evoluta cab eine curva tricuspidata seyn, dergleichen unendlich viel gefunden werden können, sowohl triangulis aequilateris als scalenis inscriptibiles. Hiebey ist merkwürdig, dass wenn man eine solche curvam tricuspidatam abc gefunden, aus derselben Evolution, nachdem man den Faden länger oder kürzer annimmt, unendlich viel curvae generatrices CAB beschrieben werden können. Denn wenn Cc nach Belieben angenommen wird, so ist immer $mM = Cc + cm$ und $bL = Cc + cmb$, $Aa = Cc + cmb - adb$ und $cD = Cc + cmb + anc - adb$. Weil nun $cmb + anc$ nothwendig grösser ist als adb, so kann auch cD nimmer dem Cc gleich werden, folglich das Punct c nicht in die Mitte von CD fallen.

Um ein Exempel von einer solchen curva tricuspidata zu geben, welche rectificabel ist, damit sowohl die curvae generatrices als catoptricae algebraicae werden, so sey $cp = t$,

$pm = u$ und man nehme $t = \frac{3c(1+3pp)}{(1+pp)^2}$ und $u = \frac{6cp}{(1+pp)^2}$, woraus wenn man p eliminirt eine Aequation von sechs Dimensionen $4uu(tt+uu)^2 = 12ctuu(uu+9tt) - 243cct^4$ entspringt, darin ist $\frac{dt}{du} = p$. Pro puncto d ist $p = 0$, und also $cd = 3c$. Diese curva ist triangulo aequilatero inscriptibilis, cujus latus $ac = ab = bc = \frac{9\sqrt{3}}{4}c$. Ferner ist diese curva rectificabilis, denn es wird der arcus

$$cm = \frac{2cp(3-pp)}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + 2c,$$

und da pro cuspidibus a et b est $p = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, so ist der Bogen $cmb = cna = adb = 4c$. Wenn also genommen wird $Cc = b$, so wird $cD = b + 4c$; ferner

$$Mm = b + 2c + \frac{2cp(3-pp)}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = a + \frac{c\,p(3-pp)}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}},$$

weil $2a = 2b + 4c$. Nun aber ist $pR = pu = \frac{6cpp}{(1+pp)^2}$ und $Rm = u\sqrt{(1+pp)} = \frac{6cp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$. At $MR = a - \frac{2cp^3}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$; dahero findet man pro curva generatrice die abscissa

$$CP = a - \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{c(1-pp)}{(1+pp)^2}$$

und die applicata

$$PM = \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{2cp^3}{(1+pp)^2},$$

wobey ich nur anmerke, dass wenn man in einem Circul, dessen radius $= a = \frac{1}{2}CD$, den Bogen (qui est mensura anguli CRM) setzt $= s$, so wird in der curva generatrice der arcus $CM = s + \frac{\frac{2}{3}c(1-3pp)}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$, und also ist der perimeter

totius curvae $CABC$ accurat gleich der Peripherie eines Circuls, cujus diameter $= CD$. Diese Eigenschaft ist allen curvis, so ex evolutione curvarum tricuspidatarum quarumcunque entstehen, gemein, indem immer der ganze perimeter derselben der peripheriae eines circuli diametro $= CD$ descripti gleich ist. Dieser Circul ist in der Figur punctirt gezeichnet. Der excessus areae circuli supra aream curvae ist nun in gegenwärtigem Fall gleich der areae circuli, cujus diameter $= c = \frac{1}{4} cna = \frac{1}{3} cd$.

Weil nun aus dieser einigen evoluta abc, welche zugleich immer die caustica der daher entstehenden catoptricarum ist, unendlich viel curvae generatrices ABC, und aus jeder generatrice, pro loco puncti radiantis F arbitrario, unendlich viel catoptricae entstehen, so kommen aus einer caustica abc unendlich mal unendlich viel catoptricae, alle algebraicae.

Wenn $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\delta + 4 = A^2 + B^2 + C^2$, so ist $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 8 = A^2 + B^2 + C^2 + (\delta - 2)^2$, welches seyn soll $P^2 + Q^2 + R^2 + S^2$, ist also offenbar $P = A$, $Q = B$, $R = C$ und $S = \delta - 2$.

Euler.

LETTRE CXXIV.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Suite sur la courbe catoptrique.

Moscau d. 27. März 1749.

Aus der von Ew. mir übersandten Figur sowohl, als aus dem casu der curvae tricuspidalis, triangulo aequilatero inscriptibilis, kann ich nicht anders urtheilen, als dass die arcus ac, ab, cb nicht nur aequales sondern auch similes, und die puncta d, m, n curvas illas in duas partes aequales bisecantia seyn sollen. Wenn nun dieses ist, so müssen auch die puncta I et K von dem medio axis CD (welches Ew. in der Figur mit keinem Buchstaben bezeichnet haben und indessen r heissen kann) aeque distantia seyn, woraus denn ferner folget, dass die curva generatrix auch hexagono regulari circumscriptibilis sey und mit dem circulo, cujus radius est Cr in den sex punctis C, I, A; D, B, K coin-

cidiren müsse, womit aber die übersandte und hiebey zurückkommende Figur (die mir wieder zuzuschicken bitte) nicht übereinstimmt, weil sonst alle diese puncta in dem punctirt gezogenen Circul stehen müssten. Wenn aber auch die arcus *ab*, *bc*, *ca* nur longitudine aequales und nicht similes wären, so müsste nichts desto weniger folgen, dass die puncta *A*, *B*, *C* ein triangulum aequilaterum, circulo, cujus radius est *Cr*, inscriptum, formiren und in den punctirt gezogenen Circul fallen, dessen Centrum *r* zugleich der Mittelpunct des trianguli aequilateri ist, wie denn auch ferner die distantiae punctorum *EA* und *EB* aequales seyn müssten, welche doch in der Figur um ein gar merkliches differiren. Dieses alles habe nur deswegen erinnern wollen, damit Ew. überzeuget würden, dass ich die mir übersandte Figur nicht nur obenhin angesehen, sondern mit einiger Attention (woran es mir oftmals zu fehlen pfleget) betrachtet habe.

Was ich von den quadratis $AA + BB + CC$ etc. in meinem vorigen gemeldet hatte, ist, wie ich aus Dero Solution ersehe, von keiner Erheblichkeit gewesen und einer Distraction zuzuschreiben.

Goldbach.

P. S. v. 1. April 1749. Nachdem ich ungefähr die curvam generatricem abermal betrachtet, so habe befunden, dass bey der, von Ew. mir übersandten Figur nichts Essentielles zu erinnern gewesen, welches bey Zeiten, um Denoselben keine vergebliche Mühe zu machen, melden wollen, wobey nur noch dieses anmerke, dass von der punctirt gezeichneten curva exteriore (welche man trigibberam nennen könnte) cujus omnes normales curvam secantes aequales

sunt, die curva, **normales omnes in duas partes aequales** dividens, wie die innere Figur anzeiget, **tricuspidalis ist.**

Die aequatio $4n + 5 = 4\square + 4\boxdot + \boxdot$ (allwo $\boxdot$ ein quadratum impar, $\square$ ein quadratum par bedeutet) ist zwar allezeit möglich, man kann aber für $\boxdot$, so eines von den vier quadratis ist, nicht ein jedes pro lubitu annehmen, wie in der aequatione $4\boxdot + \boxdot + \boxdot + \boxdot = 8n + 7$ geschiehet, allwo vor eines von diesen vier quadratis ein jedes quadratum $< 8n + 7$ genommen werden kann.

LETTRE CXXV.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Suite des recherches arithmétiques

Berlin d. 12. April 1749.

Nunmehr habe ich endlich einen bündigen Beweis gefunden, dass ein jeglicher numerus primus von dieser Form $4n+1$ eine summa duor. quadr. ist. Es sey $\boxed{2}$ das Zeichen der Zahlen, welche summae duor. quadr. sind, so sind meine Sätze folgende:

I. Si $a=\boxed{2}$ et $b=\boxed{2}$, erit etiam $ab=\boxed{2}$, wovon der Beweis leicht.

II. Si $ab=\boxed{2}$ et $a=\boxed{2}$, erit etiam $b=\boxed{2}$. Hievon ist der Beweis schon schwerer und erfordert einige Sätze

III. Summa duor. quadr. $aa+bb$, ubi a et b communem divisorem non habeant, nullos alios admittit divisores, nisi qui ipsi sint $\boxed{2}$.

IV. Proposito numero primo $4n+1$, per eum semper $a^{4n}-1$ erit divisibilis, nisi ipse numerus a sit per $4n+1$ divisibilis. Den Beweis hievon habe in den Commentariis Petropolitanis gegeben.

V. Da $a^{4n}-1=(a^{2n}+1)(a^{2n}-1)$, so ist also entweder $a^{2n}+1$ oder $a^{2n}-1$ per $4n+1$ theilbar. Könnte nun ein einiger Fall angezeigt werden, da nicht $a^{2n}-1$, sondern $a^{2n}+1$ durch $4n+1$ divisibel wäre, weil $a^{2n}+1=\boxed{2}$, so wäre per N. III bewiesen, dass $4n+1$ eine summa duor. quadr. seyn muss.

VI. *Theorema.* Omnis numerus primus formae $4n+1$ est summa duor. quadr.

Demonstr. Si $4n+1$ non esset $\boxed{2}$, quia $a^{4n}-1$, vel etiam $a^{4n}-b^{4n}$ per $4n+1$ est divisibilis (dummodo neque a neque b sit per $4n+1$ divisibile) nunquam $a^{2n}+b^{2n}$, sed semper $a^{2n}-b^{2n}$ per $4n+1$ esset divisibile. Forent ergo sequentes numeri omnes $2^{2n}-1$, $3^{2n}-2^{2n}$, $4^{2n}-3^{2n}$, $5^{2n}-4^{2n}$, etc. (quamdiu radices sunt minores quam $4n+1$) per $4n+1$ divisibiles. Hoc est hujus progressionis 1, 2^{2n}, 3^{2n}, 4^{2n}, 5^{2n}, ... $(4n)^{2n}$ differentiae forent per $4n+1$ divisibiles. Forent ergo quoque differentiae secundae et tertiae et quartae et tandem differentiae ordinis $2n$, quae sunt constantes, per $4n+1$ divisibiles.

At ex doctrina differentiarum notum est, differentias ordinis $2n$, quae sunt constantes, esse $=1.2\ 3.4\ ....2n$, qui numerus, cum non sit divisibilis per numerum primum $4n+1$, sequitur non omnes differentias $2^{2n}-1$, $3^{2n}-2^{2n}$, $4^{2n}-3^{2n}$, etc. per $4n+1$ esse divisibiles; dabitur ergo quaedam differentia $a^{2n}-b^{2n}$, quae non erit per $4n+1$ divisibilis, quare cum $a^{4n}-b^{4n}=(a^{2n}+b^{2n})(a^{2n}-b^{2n})$ semper sit per $4n+1$ divisibilis (in serie enim superiori, cujus differentias sum

contemplatus, termini tantum usque ad $(2n+1)^{2n}$ continuantur, ita ut sit a et $b < 2n+1$, ideoque neque a neque b per se sit per $4n+1$ divisibilis, qui casus sunt excepti) necesse est ut hoc casu factor $a^{2n} + b^{2n}$ sit per $4n+1$ divisibilis, qui cum sit $\boxed{2}$, ejus quoque divisorem $4n+1$ summam duor. quadr. esse oportet. Q. E. D.

Dass eine jede Zahl eine summa quatuor vel pauciorum quadratorum sey, kann ich beynahe beweisen; es fehlt mir nehmlich nur noch an einer Proposition, welche dem ersten Ansehen nach keine Schwierigkeit zu haben scheint.

Dieses Zeichen $\boxed{4}$ bedeute eine jegliche Zahl, welche eine Summ von 4 oder weniger quadratis ist, so sind meine Sätze folgende:

I. Si $a = \boxed{4}$ et $b = \boxed{4}$ erit quoque $ab = \boxed{4}$. Hievon ist der Beweis bündig, denn es sey $a = pp + qq + rr + ss$ und $b = xx + yy + zz + vv$, so wird

$$ab = (px + qy + rz + sv)^2 + (py - qx \pm rv \mp sz)^2 + (pz \mp qv - rx \pm sy)^2 + (pv \pm qz \mp ry - sx)^2 = \boxed{4}.$$

II. Si $ab = \boxed{4}$ et $a = \boxed{4}$, erit etiam $b = \boxed{4}$. Dieses ist der Satz, worauf die ganze Sach beruhet, und den ich noch nicht beweisen kann.

III. *Coroll.* (Dieses Zeichen $\neq$ soll nach Ew. negationem aequalitatis bedeuten). Si ergo $ab = \boxed{4}$ et $a \neq \boxed{4}$, tum etiam $b \neq \boxed{4}$. Si enim esset $b = \boxed{4}$, per II. foret quoque $a = \boxed{4}$ contra hyp.

IV. Si omnes numeri primi essent formae $\boxed{4}$, tunc omnes omnino numeri in hac forma continerentur. Manifestum est ex N. I, unde demonstratio propositi ad numeros tantum primos revocatur.

V. Proposito numero primo quocunque p, semper datur numerus formae $aa + bb + cc + dd$ per p divisibilis, ita ut

nullus numerorum a, b, c, d seorsim per p sit divisibilis. Ich kann nehmlich beweisen, dass es allzeit solche Zahlen $aa + bb + cc + dd$, und das unendlich viel gibt, obschon ich in genere keine davon anzuzeigen vermögend bin. Der Beweis davon ist insbesondere merkwürdig, aber etwas weitläufig und kann auf Belieben den Inhalt eines ganzen Briefes inskünftige abgeben.

VI. Si $aa + bb + cc + dd$ per p est divisibile, quantumvis numeri a, b, c, d sint magni, semper exhiberi potest similis forma $xx + yy + zz + vv$ per p divisibilis, ita ut singuli numeri x, y, z, v semisse ipsius p non sint majores.

Demonstr. Erit enim $a = \alpha p \pm x$, $b = \beta p \pm y$, $c = \gamma p \pm z$, $d = \delta p \pm v$ atque x, y, z, v erunt numeri non majores quam $\frac{1}{2}p$. Cum igitur sit $aa + bb + cc + dd = (\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta)pp \pm 2p(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v) + xx + yy + zz + vv$ haecque forma per p divisibilis existat, ob duo priora membra jam sponte per p divisibilia, necesse est ut ultimum membrum $xx + yy + zz + vv$ quoque per p sit divisibile.

VII. Si p est numerus primus ideoque impar, erunt singuli numeri x, y, z, v minores quam $\frac{1}{2}p$, ideoque

$$xx + yy + zz + vv < 4 \cdot \frac{1}{4}p^2 < p^2.$$

VIII. Si p est numerus primus, certe erit summa quatuor quadratorum vel pauciorum.

Demonstr. Per N. VI datur numerus $aa + bb + cc + dd$ per p divisibilis, ac per N. VII dabitur etiam numerus $xx + yy + zz + vv$ per p divisibilis, ita ut sit

$$xx + yy + zz + vv < pp$$

Quodsi jam darentur numeri $= \boxed{4}$, existeret horum nume-

rorum minimus, qui sit $= p$, ita ut sit p minimus eorum numerorum, qui in quatuor quadrata sunt irresolubiles, (hic semper de numeris integris est sermo). Sit igitur

$$xx + yy + zz + vv = \boxed{4} = pq,$$

et quia per hyp. $p \neq \boxed{4}$, foret quoque $q \neq \boxed{4}$, at $pq < pp$, ideoque $q < p$, ac propterea haberetur numerus q minor quam p, qui esset $\neq \boxed{4}$, contra hypoth. Nullus ergo datur numerus minimus in quatuor quadrata irresolubilis, ideoque nullus plane datur numerus $\neq \boxed{4}$, ac per consequens omnis numerus $p = \boxed{4}$.

Weil ich nicht zweifle, dass diese demonstrationes Ew. nicht gefallen sollten, so bitte dieselben Dero Aufmerksamkeit zu würdigen.

In meinen Umständen ist seit der Zeit nichts veränderliches vorgefallen, als dass ich dieser Tage in einer Lotterie 600 Rthlr. gewonnen, welches also eben so gut ist, als wenn ich dieses Jahr einen Pariser Preis gewonnen hätte.

Euler.

LETTRE CXXVI.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Courbe catoptrique. Recherches arithmétiques. Suite.

Berlin d. 15. April 1749.

Hiebey habe die Ehre, meine Figur von den curvis catacausticis wiederum zurückzusenden, und weil dieselbe nicht accurat genug gerathen, indem freylich die Bögen AE und BE, wie Ew. angemerkt, gleich seyn sollten, so füge noch eine andere Figur hinzu (Fig. 37), welche ich mit mehrerem Fleisse aufgezeichnet. Indessen ist, wie in der vorigen, die curva tricuspidata abc aequilatera und die drey partes adb, bmc, cna unter sich aequales et similes. Diese curva hat also ein centrum in O, welches das centrum circuli triangulo abc circumscripti ist. Dieses Punct O ist aber nicht das Mittelpunct der Linie CD, welches Ew. mit dem Buchstaben r

andeuten wollen, denn aus der Natur der Evolution ist CD der Faden, welcher vorher um den Bogen cna gelegen und bis in A ausgedehnt gewesen, folglich ist
$cD = \text{Arc.}\, cna + Aa = \text{Arc.}\, cna + Cc$ (ob $Cc = Aa = Bb$) und also $cD + Cc = CD = \text{Arc.}\, cna + 2\,Cc$. Wenn nun das Punct r in der Mitte der Linie CD genommen wird, so ist $Cr = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2}\,\text{Arc.}\, cna + Cc$, und dahero $cr = Cr - Cc = \frac{1}{2}\,\text{Arc.}\, cna = cn$. Nun aber ist in der Figur cO grösser als der Bogen cn, und also $cO > cr$ (ich habe nehmlich die puncta d, m, n in der Mitte der Bögen ab, ac, bc angenommen). Hernach sind freylich die Linien OI und OK nicht nur einander gleich, sondern machen auch mit OC gleiche Winkel. Denn es ist $OI = OK = OD$; allein, weil das Punct O nicht in die Mitte der Linie CD fällt, so sind auch diese drey Linien OI, OK, OD nicht so gross als CO oder AO und BO. Dieses ist auch aus der Auswickelung offenbar, da der anfänglich gelegte Faden $bmcC$ in bOI nach der geraden Linie ausgedehnt wird. Also ist $bI = bmc + Cc$, und $OI = bmc + Cc - bO$. Nun aber ist $Cc = OC - cO$ und daher $OI = bmc + OC - cO - bO$, oder weil $bO = cO$, so ist $OI = OC - 2cO + bmc = OC - 2(cO - cm)$, und da $cO > cm$ so ist $OI < OC$. Wenn daher aus dem centro O mit dem radio $OC = OA = OB$ ein Circul beschrieben wird, so berührt derselbe die curvam descriptam in drey Puncten C, A, B, und diese curva hat also drey Bückel in A, B, C und drey Tiefen I, D, K, kann also trigibba genannt werden. In der vorigen Figur war der Circul aus dem centro r beschrieben, welchen hier gleichfalls bezeichne, woraus ganz klar zu sehen, wie dieser Circul die curvam trigibbam in zwey Puncten berührt und in zweyen durchschneidet; wie denn auch dieser Circul und

die curva trigibba ejusdem perimetri, folglich die area curvae kleiner als die area des Circuls seyn muss.

Ich füge noch eine neue Figur hinzu, (Fig. 38) in welcher die curva tricuspidata abc nicht aequilatera, sondern scalena, aus welcher auch eine curva trigibba scalena ABC entstehet. Ungeacht es solche curvas continuas oder aequatione exprimibiles gibt, so kann man doch auch von freyer Hand ohne einige Regel solche curvas tricuspidatas aufreissen und aus denselben per evolutionem die curvas trigibbas beschreiben, aus welchen hernach weiter auf unendlich vielerley Arten die gesuchten curvae catoptricae construirt werden können. Wie ich denn in dieser Figur die curvam tricuspidatam abc aus drey Circulbögen ab, ac, bc, so einander berühren, formirt, und daraus die trigibbam also gezeichnet habe, nachdem ich die tangentes ad cuspides a, b, c und puncta laterum media l, m, n gezogen und aA pro arbitrio angenommen, so wird $mM = ma + aA$, $c\gamma = cm + mM$, $l\lambda = c\gamma - el$, $bB = l\lambda - lb$, $nN = nb + bB$ etc. bis man herumkommt.

Ich bin neulich auf diese Betrachtung gefallen, ob es nicht möglich sey zwey Zahlen x und y zu finden, so dass $xy(x+y)$ einer gegebenen Zahl a gleich sey; oder proposito numero a, invenire duos numeros rationales x et y (sive integros, sive fractos) ut sit $xy(x+y) = a$. Solches ist immer möglich, so oft die Zahl a in dieser Form

$$pq(pm^3 \pm qn^3)$$

enthalten ist. Ich glaube aber, dass in dieser Form bey weitem nicht alle Zahlen enthalten sind, und also das problema öfters unmöglich ist, welches zu geschehen scheint, wenn $a = 1$, oder $a = 3$ etc.

Wenn aber dieses problema proponirt wird:

Proposito numero a, invenire tres numeros rationales x, y, z, ut sit $xyz(x+y+z)=a$, so ist das problema immer möglich und kann sogar in genere die Solution angegeben werden, welche ich endlich nach vieler angewandter Muhe herausgebracht. Nehmlich man setze (sumendo pro s et t numeros quoscunque pro lubitu)

$$x=\frac{6ast^3(at^4-2s^4)^2}{(4at^4+s^4)(2aat^8+10as^4t^4-s^8)},$$

$$y=\frac{3s^5(4at^4+s^4)^2}{2t(at^4-2s^4)(2aat^8+10as^4t^4-s^8)},$$

$$z=\frac{2(2aat^8+10as^4t^4-s^8)}{3s^3t(4at^4+s^4)},$$

so wird

$$x+y+z=\frac{2aat^8+10as^4t^4-s^8}{6s^3t(at^4-2s^4)}$$

und hieraus bekommt man $xyz(x+y+z)=a$.

Als es sey $a=1$ und man nehme $t=2$, $s=1$, so wird

$$x=\frac{48.14^2}{65.671},\quad y=\frac{3.65^2}{56.671},\quad z=\frac{2.671}{6.65};$$

daher

$$x+y=\frac{1350723}{56.65.671}=\frac{3.671^2}{56.65.671}=\frac{3.671}{56.65}$$

und

$$x+y+z=\frac{671}{3.56},$$

folglich

$$xyz(x+y+z)=\frac{48.14^2}{65.671}\cdot\frac{3.65^2}{56.671}\cdot\frac{671}{3.65}\cdot\frac{671}{3.56}=1.$$

LETTRE CXXVII.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Réponse à la lettre précédente.

Moscau d. 16. Juni 1749.

Vor die Communication von Dero theorematibus in dem Briefe vom 12. April sage ich schuldigsten Dank, und dass an der mir übersandten Figur nichts auszusetzen gewesen, hatte ich schon in meinem vorigen Postscript, welches ohne Zweifel angekommen seyn wird, erkannt. Ich glaube es werde Ew. auch nicht viel Muhe kosten die curvam omnes verticales bisecantem zu beschreiben in casu, da die curva tricuspidalis, so zum Grunde gelegt wird, aus lauter arcubus circuli bestehet, und es scheinet, dass diese curva verticales bisecans seltsame proprietates haben wird.

Was die resolutionem cujusvis numeri in quatuor quadratos betrifft, so sehe ich gar wohl ein, dass alles, wie

Ew. angemerket, auf der Demonstration des andern Satzes beruhet: Si ab est $\boxed{4}$, et $a = \boxed{4}$, erit etiam $b = \boxed{4}$. Eine gleiche Bewandniss hat es mit der demonstratione hujus propositionis: Si summa quatuor quadratorum in numeris fractis sit = numero integro, erit idem numerus integer = quatuor quadratis integris. Allein die demonstrationem hujus propositionis: Si numerus aliquis est summa quatuor quadratorum imparium, idem numerus est summa quatuor quadratorum parium, oder, datis quatuor quadratis imparibus $= 8m + 4$, dantur etiam quatuor quadrata numeri $2m + 1$, meine ich in potestate zu haben.

Wenn man aber ein Mittel finden könnte die summam quatuor quorumque quadratorum $AA + BB + CC + DD$ in die vier folgenden quadrata zu resolviren

$$aa + bb + \frac{(kk - bb)^2}{4} + dd,$$

wo doch auch quatuor quantitates indeterminatae sind, so hätte man zugleich erwiesen, dass eine jede Zahl $= \boxed{4}$, denn die letztern vier quadrata sind so beschaffen, dass ihre summa unitate aucta wieder eine summa quatuor quadratorum wird, oder diese quinque quadrata

$$4aa + 4bb + (ff + 2bf)^2 + 4dd + 4$$

sind allezeit = quatuor quadratis.

Ob Ew. das praemium bey der Frage von der Ursache der perturbationum in motibus planetarum erhalten haben, ist mir entweder nicht bekannt worden, oder ich habe es vergessen, und da ich schliesse, dass Sie auch um den Preis über die Frage von der Direction der courans etc. werden competiret haben, so wünsche ich, dass Dero pièce durch einen kleinen Zusatz von *vües*, künftiges Jahr victorieuse werden möge.

Goldbach.

P. S. Wenn das signum $\boxed{4}$ eine summam entweder von vier oder von weniger quadratis, und $\underset{|}{\boxed{4}}$ eine summam nicht von wenigern als 4 quadratis bedeutet, so kann gar leicht demonstriret werden omnem numerum hujus formae $8m + 7$ esse $\underset{|}{\boxed{4}}$; wenn aber zugleich nachgegeben wird, dass alle numeri $\underset{|}{\boxed{4}}$ in dieser formula begriffen sind: $4^{e-1}(8m+7)$, ubi *e* sit numerus integer affirmativus quicunque, so kann demonstriret werden numerum quemcunque esse $\boxed{4}$.

LETTRE CXXVIII.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Nouveau travail sur la théorie de Saturne. Considérations ultérieures sur les nombres.

Berlin d. 26. Juli 1749.

Ueber die Pariser Frage von den courans habe ich nicht gearbeitet, und vernommen, dass nur eine einige Schrift darüber soll eingelaufen seyn. Ich zweifle auch sehr, ob ich künftiges Jahr etwas Tüchtiges darin hervorzubringen im Stande seyn werde. Auf die wiederholte Frage aber vom Saturno habe ich schon eine neue Abhandlung übersandt, worüber auch künftige Ostern das Urtheil gefället werden soll.

Ew. theorema, dass wenn $8m + 4$ eine summa quatuor quadr. imparium ist, eben diese Zahl $8m + 4$ auch eine summa quatuor quadr. parium seyn müsse, kann ich auf folgende Art demonstriren:

Es sey

$$8m + 4 = (2a+1)^2 + (2b+1)^2 + (2c+1)^2 + (2d+1)^2,$$

so wird, (wenn man durch 2 dividirt, da $\frac{(2p+1)^2+(2q+1)^2}{2} = (p+q+1)^2 + (p-q)^2$):

$$4m + 2 = (a+b+1)^2 + (a-b)^2 + (c+d+1)^2 + (c-d)^2,$$

also $4m+2 = 4\square$. Da aber $4m+2$ ein numerus impariter par ist, so müssen von diesen vier quadratis zwey paria und zwey imparia seyn. Also wird seyn:

$$4m + 2 = (2p+1)^2 + (2q+1)^2 + 4rr + 4ss,$$

dahero

$$2m + 1 = (p+q+1)^2 + (p-q)^2 + (r+s)^2 + (r-s)^2,$$

folglich

$$8m + 4 = 4(p+q+1)^2 + 4(p-q)^2 + 4(r+s)^2 + 4(r-s)^2.$$

Q. E. D.

Hieraus folget, dass wenn $2A$ eine summa quatuor quadratorum ist, auch A eine summa quatuor quadratorum in integris sey, und generalius: Si $2^n A = 4\square$, tum etiam A erit $= 4\square$ in integris; oder: Si in fractis habetur $A = \frac{aa+bb+cc+dd}{2^n}$, tum etiam numerus A in integris in quatuor quadrata resolvi poterit.

Dieses ist nun schon ein Stück von dem allgemeinen theoremate: Si summa quatuor quadratorum fractorum aequatur numero integro A, tum etiam hic numerus erit in integris summa quatuor quadratorum; oder von diesem, worauf ich meine ganze vorige Demonstration gegründet: Wenn $mA = 4\square$ und $m = 4\square$, tum etiam erit $A = 4\square$. Von diesem theoremate ist also schon dieser casus bewiesen: Si $2A = 4\square$, tum etiam $A = 4\square$, oder si $2^n A = 4\square$, tum quoque $A = 4\square$. Ich kann aber auch noch einige andere Fälle beweisen, als:

Theorema. Si $3A = 4\square$, erit etiam $A = \boxed{4}$ (Ich habe im vorigen vergessen dieses Zeichen $\boxed{4}$ um summam quatuor quadratorum integrorum anzuzeigen).

Demonstratio. Quia omne quadratum est vel formae $3n$ vel $3n+1$, so sind entweder alle vier quadrata per 3 divisibilia, oder nur eins. Im ersten Falle wird

$$3A = 9aa + 9bb + 9cc + 9dd,$$

und also $A = 3aa + 3bb + 3cc + 3dd$, das ist

$$A = (a+b+c)^2 + (a-b+d)^2 + (a-c-d)^2 + (b-c+d)^2.$$

Im andern Fall ist

$$3A = (3a+1)^2 + (3b+1)^2 + (3c+1)^2 + 9dd,$$

und folglich

$$A = 1 + 2a + 2b + 2c + 3aa + 3bb + 3cc + 3dd.$$

Dieses aber ist

$$A = (1+a+b+c)^2 + (a-b+d)^2 + (a-c-d)^2 + (b-c+d)^2;$$

also wiederum $A = \boxed{4}$.

Theor. Si $5A = \boxed{4}$, erit quoque $A = \boxed{4}$.

Demonstr. Erit enim

vel I. $5A = 25aa + 25bb + 25cc + 25dd$

vel II. $5A = (5a+1)^2 + (5b+2)^2 + 25cc + 25dd$

vel III. $5A = (5a+1)^2 + (5b+2)^2 + (5c+1)^2 + (5d+2)^2$.

Casu I. est $A = 5aa + 5bb + 5cc + 5dd =$

$$(2a+b)^2 + (a-2b)^2 + (2c+d)^2 + (c-2d)^2 = \boxed{4}.$$

Casu II est $A = 1 + 2a + 4b + 5aa + 5bb + 5cc + 5dd =$

$$(1+a+2b)^2 + (2a-b)^2 + (2c+d)^2 + (c-2d)^2 = \boxed{4}.$$

Casu III est

$$A = 1 + 2a + 4b + 5aa + 5bb + 1 + 2c + 4d + 5cc + 5dd =$$
$$(1+a+2b)^2 + (2a-b)^2 + (1+c+2d)^2 + (2c-d)^2 = \boxed{4}.$$

Hier ist zu bemerken, dass a, b, c, d sowohl numeros affirmativos als negativos bedeuten. Dahero nicht nöthig habe

um der Allgemeinheit willen $5a \pm 1$ für $5a + 1$ zu schreiben. Wenn man nun diese theoremata zusammennimmt, so folget daraus dieses:

Si $2^\alpha . 3^\beta . 5^\gamma A = \boxed{4}$, tum erit quoque $A = \boxed{4}$.

Man kann auch noch weiter gehen, als:

Theor. Si $7A = \boxed{4}$, erit quoque $A = \boxed{4}$.

Demonstr. Cum omnes quadrati sint vel formae $7m$, vel $7m + 1$, vel $7m + 2$, vel $7m + 4$, erit

vel I. $7A = 49aa + 49bb + 49cc + 49dd$, ergo

$A = 7(aa + bb + cc + dd) = \boxed{4}$, nam $\boxed{4} . \boxed{4} = \boxed{4}$,

vel II. $7A = (1 + 7a)^2 + (1 + 7b)^2 + (1 + 7c)^2 + (2 + 7d)^2$,

vel III. $7A = (1 + 7a)^2 + (2 + 7b)^2 + (3 + 7c)^2 + 49dd$,

vel IV. $7A = (2 + 7a)^2 + (2 + 7b)^2 + (2 + 7c)^2 + (3 + 7d)^2$,

vel V. $7A = (1 + 7a)^2 + (3 + 7b)^2 + (3 + 7c)^2 + (3 + 7d)^2$.

Casu II erit

$$A = 1 + 2a + 2b + 2c + 4d + 7aa + 7bb + 7cc + 7dd = (1 + a + b + c + 2d)^2 + (a - b - 2c + d)^2 + (a + 2b - c - d)^2 + (2a - b + c - d)^2 = \boxed{4}.$$

Casu III. erit

$$A = 2 + 2a + 4b + 6c + 7aa + 7bb + 7cc + 7dd = (a - 2b + c + d)^2 + (b + 2c + d - a + 1)^2 + (a + b - c + 2d)^2 + (2a + b + c - d + 1)^2 = \boxed{4}.$$

etc.

Wenn der numerus A also in vier quadrata könnte resolvirt werden $A = aa + bb + \frac{1}{4}(kk - bb)^2 + dd$, so würde freylich, wie Ew. bemerket, $A + 1 = \boxed{4}$, denn

$$A + 1 = \left(\tfrac{1}{2}(kk - bb) - 1\right)^2 + kk + aa + dd.$$

Dass im postscripto gemeldte theorema ist sehr artig; denn wenn alle numeri $\boxed{4}$ (welche nicht aus weniger als vier quadratis bestehen) in dieser Form $4^{e-1}(8m + 7)$ ent-

halten wären, so finde ich auch, dass daraus folgte omnem numerum esse $= \boxed{4}$. Mein Beweis davon ist dieser:

Si omnes numeri $\boxed{4}$ in hac forma $4^{e-1}(8m+7)$ continentur, tum omnes numeri in hac forma $4^{e-1}(8m+7)$ non contenti essent $= \boxed{4}$. Foret ergo $8m+1 = \boxed{4}$, item $8m+3 = \boxed{4}$, item $8m+5 = \boxed{4}$. At si $8m+5 = \boxed{4}$ erit quoque $3(8m+5) = 8n+7 = \boxed{4}$. Oder also: Quia

$$3(8n+7) = 8m+5, \text{ erit } 3(8n+7) = \boxed{4},$$

ideoque etiam $8n+7 = \boxed{4}$.

Hieraus folget ferner, dass wenn man nur beweisen könnte, omnes numeros formae $8m+1$ esse $= \boxed{4}$, tum omnes plane numeros futuros esse $= \boxed{4}$. Cum enim sit $3(8n+3) = 8m+1$, erit $3(8n+3) = \boxed{4}$, ergo et $8n+3 = \boxed{4}$. Porro ob $5(8n+5) = 8m+1$, erit $5(8n+5) = \boxed{4}$, ergo et $8n+5 = \boxed{4}$. Hinc denique erit $8n+7 = \boxed{4}$; ergo omnes numeri impares, ac proinde etiam omnes pares essent $= \boxed{4}$.

Euler.

P. S. Das theorema für $7A = \boxed{4}$, so ich nicht ausgeführt, wird durch folgendes Generaltheorema vollendet:

Theorema. Posito $m = aa + bb + cc + dd$, si sit $mA = \boxed{4}$, erit quoque $A = \boxed{4}$.

Demonstr. Sit $mA = (f+mp)^2 + (g+mq)^2 + (h+mr)^2 + (k+ms)^2$ atque $ff + gg + hh + kk =$

$$(aa+bb+cc+dd)(xx+yy+zz+vv),$$

erit

$$\begin{aligned} f &= ax + by + cz + dv \\ g &= bx - ay - dz + cv \\ h &= cx + dy - az - bv \\ k &= dx - cy + bz - av \end{aligned}$$

fietque $A = xx + yy + zz + vv + 2(fp + gq + hr + ks) + m(pp + qq + rr + ss)$; at reperitur hinc

$$A = (ap + bq + cr + ds + x)^2 + (aq - bp + cs - dr - y)^2 + (ar - bs - cp + dq - z)^2 + (as + br - cq - dp - v)^2$$

ergo $A = \boxed{4}$ in integris. Q. E. D.

Ita si $7A = (2 + 7p)^2 + (2 + 7q)^2 + (2 + 7r)^2 + (3 + 7s)^2$ erit $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$, $xx + yy + zz + vv = 3$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $v = 0$, unde $f = 4$, $g = -2$, $h = 0$, $k = 1$. Ergo si

$$7A = (4 + 7p)^2 + (7q - 2)^2 + (7r + 0)^2 + (7s + 1)^2 \text{ erit}$$
$$A = (2p + q + r + s + 1)^2 + (2q - p + s - r - 1)^2 + (2r - s - p + q - 1)^2 + (2s + r - q - p)^2.$$

Neulich ward in den Braunschweiger Anzeigen diese Frage aufgegeben: Wie viel ein Capital von 1000 Rthlrn. in 640 Jahren zu 5 pro cento, Zins auf Zins gerechnet, betragen werde?

Weil die herauskommende Zahl sehr gross, und die Rechnung nach der ordentlichen Art auszuführen fast unmöglich ist, so ist die Auflösung gewiss nicht leicht. Ich habe folgende Summ gefunden: 3640419271574 4080 Rthlr. 22 Ggr. $11\frac{3}{10}$ Pf., welche nicht um $\frac{1}{10}$ Pf. von der Wahrheit fehlen soll. — Der Aufgeber verlangt, dass man die Antwort in einer halben Stund finden soll, mich hat aber dieselbe wohl eine ganz Stund gekostet; und ich sehe nicht, wie die Arbeit verkürzt werden könnte.

Euler.



LETTRE CXXIX.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Réponse à la précédente.

St. Petersburg d. 24. März 1750.

Es sind schon mehr als sieben Monate verflossen, seitdem ich Ew. letztes Schreiben erhalten habe, und dieses würde nicht geschehen seyn, wenn nicht einestheils unterschiedene Abhaltungen dazwischen gekommen wären, anderntheils aber dasjenige, so ich hätte schreiben können, auch nach meinem eignen Urtheil von gar zu geringem Werth gewesen wäre. Die Methode, so Ew. gefunden um zu zeigen, dass wenn $mA = \boxed{4}$ auch $A = \boxed{4}$ sey, halte ich vor ein inventum inventorum, und ob ich zwar geglaubet, dass die propositio: omnem numerum esse summam quatuor quadratorum, auf eine leichtere Art würde können demonstrirt werden, so habe doch dergleichen Demonstration nicht gefunden. Ich

lasse aber dahin gestellt seyn, ob nicht einige kleine theoremata, so mir en passant vorgekommen, hiezu dienlich seyn möchten, von welchen ich Ew. einige anzeigen will:

I.

$\beta\beta+\gamma\gamma+(3\delta-\beta-\gamma)^2=(2\delta-\beta)^2+(2\delta-\gamma)^2+(\delta-\beta-\gamma)^2$.
Diese transmutatio trium quadratorum in tria alia scheinet mir von ziemlichem Nutzen zu seyn, nam inter quatuor quadrata $aa+bb+cc+4kk$, ubi omnes litterae denotant numeros impares, semper erunt tria quadrata, quorum summa radicum est divisibilis per 3; folglich können diese vier quadrata nach solcher Methode auf viele, und vielleicht auf alle mögliche Arten transformiret werden, wie denn z. Ex. die Zahl 335 durch diese Methode in alle modos possibiles verwandelt wird, nemlich $3^2+7^2+9^2+14^2=3^2+13^2+11^2+6^2=9^2+13^2+9^2+2^2=15^2+7^2+5^2+6^2=15^2+1^2+3^2+10^2=15^2+9^2+5^2+2^2=3^2+1^2+1^2+18^2=3^2+1^2+17^2+6^2=7^2+13^2+9^2+6^2$ ($=14^2+11^2+3^2+3^2$ *N. m. d'Euler*), so dass in diesen transmutationibus alle quadrata paria et imparia, in quae resolvi potest numerus 335, begriffen sind. Es wäre aber schon genug, wenn man ein Mittel hätte diese vier quadrata $3^2+\beta\beta+\gamma\gamma+4\varepsilon\varepsilon$ in nachfolgende vier zu verwandeln $1+\eta\eta+\vartheta\vartheta+4\varkappa\varkappa$; denn so hätte man demonstriret, dass alle numeri $8n+7$ summae quatuor quadratorum sind. Mir ist aber gleichwohl noch kein exemple vorgekommen, da nicht die quadrata $3^2+\beta\beta+\gamma\gamma+4\varepsilon\varepsilon$ post primam aut secundam transmutationem in quatur quadrata, quorum unum sit unitas, hätten verwandelt werden können; denn also findet man:

$3^2+13^2+15^2+\ 2^2=407=1^2+9^2+15^2+10^2$
$3^2+\ 9^2+15^2+10^2=415=1^2+5^2+17^2+10^2$
$3^2+\ 5^2+17^2+10^2=423=1^2+5^2+19^2+\ 6^2$
$3^2+\ 5^2+19^2+\ 6^2=431=1^2+3^2+15^2+14^2$

die folgenden vier quadrata werden alsofort durch eine einige Operation, eben wie die vorhergehende, in quatuor quadrata, quorum unum est unitas, transmutiret, bis auf $3^2+3^2+21^2+2^2=463$, allwo man per primam transmutationem bekommt $15^2+15^2+3^2+2^2$, und aus diesen, per secundam transmutationem, $1^2+13^2+17^2+2^2$.

II.

Wie schwer es auch ist zu sagen, was datis quatuor quadratis, in quae resolvi potest numerus $2m-1$, die quatuor quadrata $=$ numero $2m+1$, seyn werden, so haben doch die erstern vier quadrata mit den letztern einen ganz genauen nexum, welcher in den tribus quadratis $=8m+3$ gegründet ist; datis enim his, dantur simul quatuor quadrata pro $2m-1$ et pro $2m+1$.

III.

Wenn α, β, γ, δ quatuor numeri impares quicunque sind, und man selbige gleich setzen kann folgenden numeris: $\alpha=2er+1$, $\beta=b+fr$, $\gamma=c+gr$, $\delta=r-eer-e-bf-cg$, so dass b, c, r numeri integri seyen, so kann man auch demonstriren omnem numerum $8m+4$ oder generatim omnem numerum esse summam quatuor quadratorum: Denn es ist

$$(2er+1)^2+(b+fr)^2+(c+gr)^2+(r+e^2r-e-bf-cg)^2=$$
$$1^2+(b-fr)^2+(c-gr)^2+(r+e^2r+e+bf+cg)^2.$$

Dass derjenige, welcher das problema in den Braunschweigischen Anzeigen aufgegeben, bessere compendia als

Ew. zu dessen Solution haben sollte, kann ich mir nicht vorstellen, und bitte mir zu melden, ob der autor ferner etwas davon bekannt gemacht? In den Amsterdamer französischen Zeitungen vom 5. Aug. 1749 war folgendes avertissement: M. Quin Mackenzie Quin .... a inventé, à l'âge de 8 ans, et il a eu l'honneur de présenter au Roy une méthode par laquelle il multiplie et divise quelque nombre de figures que ce soit, et en vérifie le produit et le quotient en une seule ligne. Il fait cette opération en moins de trois minutes, quand même il s'agiroit de multiplier 20 figures par 20 figures, ou 40 par 20. Ceux qui voudront souscrire pour avoir cette méthode seront tenus de donner d'abord une guinée, et une autre après que cette méthode leur aura été communiquée ou à leurs correspondans. Nach der Zeit habe ich nichts mehr hiervon gehört.

Goldbach.

LETTRE CXXX.

Euler à Goldbach

Sommaire. Recherches arithmétiques. Résolution de chaque nombre en quatre quarrés. Série dont les termes sont les sommes des diviseurs des nombres naturels.

Berlin d. 9. Juni 1750.

Ew. theorema

$$\beta^2+\gamma^2+(3\delta-\beta-\gamma)^2=(2\delta-\beta)^2+(2\delta-\gamma)^2+(\delta-\beta-\gamma)^2$$

hat mir Anlass gegeben folgende theoremata zu finden, unter welchen dieses das erste ist

I. Si $a+b+c=3m$, erit

$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(2m-c)^2$$

II. Si $a+b+2c=3m$, erit

$$a^2+b^2+c^2=(m-a)^2+(m-b)^2+(2m-c)^2$$

III. Si $a+2b+2c=9m$, erit

$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(4m-b)^2+(4m-c)^2$$

IV. Si $a+b+3c=11m$, erit

$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(6m-c)^2$$

V. Si $a+2b+3c=7m$, erit
$$a^2+b^2+c^2=(m-a)^2+(2m-b)^2+(3m-c)^2$$
VI. Si $2a+2b+3c=17m$, erit
$$a^2+b^2+c^2=(4m-a)^2+(4m-b)^2+(6m-c)^2$$
VII. Si $a+3b+3c=19m$, erit
$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(6m-b)^2+(6m-c)^2$$
VIII. Si $2a+3b+3c=11m$, erit
$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(3m-b)^2+(3m-c)^2$$
wo zu merken, dass die radices a, b, c sowohl negative als affirmative genommen werden können.

Solche theoremata können auch für vier quadrata gefunden werden als

I. Si $a+b+c+d=2m$, erit
$$a^2+b^2+c^2+d^2=(m-a)^2+(m-b)^2+(m-c)^2+(m-d)^2$$
II. Si $a+b+c+2d=7m$, erit
$$a^2+b^2+c^2+d^2=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(2m-c)^2+(4m-d)^2$$
III. Si $a+b+2c+2d=5m$, erit
$$a^2+b^2+c^2+d^2=(m-a)^2+(m-b)^2+(2m-c)^2+(2m-d)^2$$
IV. Si $a+2b+2c+2d=13m$, erit
$$a^2+b^2+c^2+d^2=(2m-a)^2+(4m-b)^2+(4m-c)^2+(4m-d)^2$$

Wenn dahero $3^2+\beta^2+\gamma^2+4\varepsilon^2$ zu $1^2+\eta^2+\vartheta^2+4\varkappa^2$ reducirt werden soll, wo alle Buchstaben numeros impares bedeuten, sowohl affirmativos, als negativos, so würde nach dem IIten theoremate kommen:

1. Si $3+\beta+\gamma+4\varepsilon=7m$, erit $3^2+\beta^2+\gamma^2+4\varepsilon^2=$
$(2m-3)^2+(2m-\beta)^2+(2m-\gamma)^2+4(2m-\varepsilon)^2$,
wo auch m ein numerus impar; also müsste entweder $2m-3=1$, oder $2m-\beta=1$, oder $2m-\gamma=1$. Solches geschiehet nur in folgenden Fällen:

1. wenn $m = 1$, und also $\beta + \gamma + 4\varepsilon = 4$,
2. wenn $m = 2$, und also $\beta + \gamma + 4\varepsilon = 11$, welches unmöglich,
3. wenn $\beta = 2m \pm 1$, und $\gamma + 4\varepsilon = 5m - 3 \mp 1$.

2. Si $3 + \beta + 2\gamma + 2\varepsilon = 7m$, erit $3^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\varepsilon^2 = (2m - 3)^2 + (2m - \beta)^2 + (4m - \gamma)^2 + 4(m - \varepsilon)^2$.

Also müsste seyn entweder $2m - 3 = \pm 1$, oder $2m - \beta = \pm 1$, oder $4m - \gamma = \pm 1$, wo m eine gerade Zahl ist. Also geschiehet dieses in folgenden Fällen:

1. wenn $m = 2$, und also $\beta + 2\gamma + 2\varepsilon = 11$,
2. wenn $\beta = 2m \pm 1$, und $2\gamma + 2\varepsilon = 5m - 3 \mp 1$,
3. wenn $\gamma = 4m \pm 1$, und $\beta + 2\varepsilon = -m - 3 \mp 2$.

3. Si $6 + \beta + \gamma + 2\varepsilon = 7m$, erit $3^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\varepsilon^2 = (4m - 3)^2 + (2m - \beta)^2 + (2m - \gamma)^2 + 4(m - \varepsilon)^2$,

wo m wieder ein numerus par ist.

Jedoch zweifle ich, ob durch dieses 2[te] theorema allein immer ein Quadrat $= 1$ gefunden werden könne.

Man kann auch solche theoremata für fünf quadrata geben, als:

I. Si $a + b + c + d + e = 5m$, erit $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = (2m - a)^2 + (2m - b)^2 + (2m - c)^2 + (2m - d)^2 + (2m - e)^2$.

II. Si $a + b + c + d + 2e = 4m$, erit $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = (m - a)^2 + (m - b)^2 + (m - c)^2 + (m - d)^2 + (2m - e)^2$.

etc.

Wenn man nun beweisen könnte, dass eines von diesen letztern quadratis könnte ad nihilum gebracht werden, so hätte man auch was man verlanget. Solches gehet also an, wenn entweder $a + b + c + d = 0$, oder $3a = b + c + d + 2e$.

Ew. II[tes] theorema von dem nexu inter $2m - 1 = 4\square$ et $2m + 1 = 4\square$, concessa resolutione numeri $8n + 3$

in tria quadrata, verstehe ich also: Sit $n = m - 1$, atque $8n + 3 = 8m - 5 = aa + bb + cc$, wo a, b, c numeri impares sind; erit $8m - 4 = 1 + aa + bb + cc$, unde

$$4m - 2 = \left(\frac{1+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2$$

wo zwey radices pares sind, und zwey impares, folglich diese Form $4m - 2 = 4pp + 4qq + rr + ss$, also

$$2m - 1 = (p+q)^2 + (p-q)^2 + \left(\frac{r+s}{2}\right)^2 + \left(\frac{r-s}{2}\right)^2.$$

Weil a, b, c sowohl negative als affirmative genommen werden können, sit $2p = \frac{a+1}{2}$, $2q = \frac{b+c}{2}$, erit $2m - 1 = \left(\frac{a+b+c+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{a-b-c+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{a+b-c-1}{4}\right)^2 + \left(\frac{a-b+c-1}{4}\right)^2$. Hernach ist $8m + 4 = 9 + aa + bb + cc$; also $4m + 2 = \left(\frac{a+3}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$, wo $\frac{a-3}{2}$ et $\frac{b+c}{2}$ gerade, $\frac{a+3}{2}$, $\frac{b-c}{2}$ ungerade Zahlen seyn werden. Also wird $2m + 1 = \left(\frac{a+b+c-3}{4}\right)^2 + \left(\frac{a-b-c-3}{4}\right)^2 + \left(\frac{a+b-c+3}{4}\right)^2 + \left(\frac{a-b+c+3}{4}\right)^2$. Hieraus folget, dass wenn

$$2m - 1 = pp + qq + rr + ss,$$

alsdann immer seyn werde

$$2m + 1 = (p+1)^2 + (q+1)^2 + (r-1)^2 + (s-1)^2,$$

nehmlich zwey von den radicibus quadratorum ipsius $2m + 1$, werden um 1 grösser seyn, als zwey von den radicibus quadratorum ipsius $2m - 1$, und zwey um 1 kleiner. Woraus dieses schöne theorema entspringet:

Theorema. Wenn $2m - 1 = \alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta$, et

$$2m + 1 = aa + bb + cc + dd,$$

so werden von den Wurzeln a, b, c, d zwey um 1 grösser, die andern zwey aber um 1 kleiner seyn, als die Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Also ist:

$1 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2$ $3 = (0+1)^2 + (0+1)^2 + (0-1)^2 + (1-1)^2$	$3 = 0^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$ $5 = (0+1)^2 + (1+1)^2 + (1-1)^2 + (1-1)^2$
$5 = 0^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2$ $7 = (0+1)^2 + (1+1)^2 + (2-1)^2 + (0-1)^2$	$7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$ $\quad + \quad + \quad - \quad -$ $9 = 2^2 + 2^2 + 0^2 + 1^2$
$9 = 0^2 + (-1)^2 + 2^2 + 2^2$ $\quad - \quad + \quad + \quad -$ $11 = 0^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2$	

Zu merken ist, dass $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sowohl affirmative als negative genommen werden können. Also kann das theorema also ausgesprochen werden: Singulae radicum a, b, c, d, semper unitate discrepabunt a singulis litterarum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Folgendes theorema scheint also merkwürdig zu seyn: Si $2m - 1 = pp + qq + rr + ss$, erit semper

$$2m + 1 = (p \pm 1)^2 + (q \pm 1)^2 + (r \pm 1)^2 + (s \pm 1)^2$$

dummodo signorum ambiguitas rite observetur *)

Coroll. Also ist allzeit $\pm 2p \pm 2q \pm 2r \pm 2s + 4 = 2$, oder $\pm p \pm q \pm r \pm s + 1 = 0$; das ist: Eine jegliche ungerade Zahl $2m - 1$ kann allzeit in vier solche quadrata

$$pp + qq + rr + ss$$

resolvirt werden, ut sit $\pm p \pm q \pm r \pm s = 1$. Denn es ist zu merken, dass man auch oft solche vier quadrata findet, da diese Eigenschaft nicht Statt findet als $27 = 0^2 + 1^2 + 1^2 + 5^2$, oder $39 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 6^2$. Doch aber ist auch

$$27 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 4^2, \text{ ubi } + 1 - 1 - 3 + 4 = 1.$$

Also ist, wenn diese signa $+ - - +$ verkehrt unter jene quadrata geschrieben werden

*) Nicht eine jegliche Resolution von $2m - 1$ hat diese Eigenschaft, sondern es gibt allzeit eine, so diese Eigenschaft hat.

$$27 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 4^2$$
$$\quad - \quad + \quad + \quad -$$
$$29 = 0^2 + 2^2 + 4^2 + 3^2, \text{ ubi } +0+2-4+3=1$$
$$\quad - \quad - \quad + \quad -$$
$$31 = 1^2 + 1^2 + 5^2 + 2^2, \text{ ubi } -1-1+5-2=1$$
$$\quad + \quad + \quad - \quad +$$
$$33 = 2^2 + 2^2 + 4^2 + 3^2, \text{ ubi } +2-2+4-3=1$$
$$\quad - \quad + \quad - \quad +$$
$$35 = 1^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2, \text{ ubi } -1+3+3-4=1$$
$$\quad + \quad - \quad - \quad +$$
$$37 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 5^2, \text{ ubi } +2+2+2-5=1$$
$$\quad - \quad - \quad - \quad +$$
$$39 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 6^2.$$

Von hier aus lässt sich nicht weiter gehen; dahero muss man eine andere Resolution von 39 nehmen, welches durch die IIIte der obigen Formuln geschehen kann, da dann wird $a=1, b=-1, c=-1, d=6$; $a+b+2c+2d=10=5m$, also $m=2$ und also

$$39 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 2^2, \text{ ubi } 1+3-5+2=1 \text{ oder}$$
$$1-3+5-2=1, \text{ also}$$
$$\quad - \quad - \quad + \quad -$$
$$\quad - \quad + \quad - \quad +$$
$$\left.\begin{array}{l} 41 = 0^2 + 2^2 + 6^2 + 1^2 \\ = 0^2 + 4^2 + 4^2 + 3^2 \end{array}\right\} \text{Hieraus muss wieder eine Reso-}$$

lution gesucht werden. Nach dem andern theoremate wird $a=-1$, $b=2$, $c=6$, $d=0$; $a+b+c+2d=7=7m$, also $m=1$, und dahero $41 = 3^2 + 0^2 + 4^2 + 4^2$, welche wieder nichts hilft. Hieraus aber wird durch das andere theorema $a=0$, $b=4$, $c=4$, $d=3$, $m=2$*) und also

*) Hierzu ist es aber leichter die theoremata von drey quadratis, sonderlich das erste zu gebrauchen

$41 = 4^2 + 0^2 + 0^2 + 5^2$, ubi $-4 + 0 + 0 + 5 = 1$
$\quad + \quad - \quad - \quad -$
$43 = 5^2 + 1^2 + 1^2 + 4^2$, ubi $+5 + 1 - 1 - 4 = 1$ oder
$-5 + 1 + 1 + 4 = 1$
$\quad - \quad - \quad + \quad +$
$\quad + \quad - \quad - \quad -$
$45 = 4^2 + 0^2 + 2^2 + 5^2$, ubi $+4 + 0 + 2 - 5 = 1$
$= 6^2 + 0^2 + 0^2 + 3^2$.

Ungeacht ich aber in dieser Materie so weit gekommen, dass ich dieses theorema demonstriren kann: omnem numerum esse summam quatuor quadratorum vel pauciorum, so fehlet mir doch noch zu zeigen, dass diese vier oder wenigere quadrata allzeit in integris angegeben werden können. Und dahero bin ich noch weit von des Fermat's Erfindung entfernt. Zu dieser glaube ich auch nicht dass man gelangen könne, ohne bey den numeris trigonalibus anzufangen. Man müsste also trachten zu beweisen, dass omnis numerus integer summae trium vel pauciorum numerorum trigonalium gleich sey. Hierzu aber kann eine algebraische Evolution keineswegs behülflich seyn, weil es nicht einmal wahr ist, dass $n = \frac{xx+x}{2} + \frac{yy+y}{2} + \frac{zz+z}{2}$ generaliter, sondern nur in den Fällen, da n ein numerus integer affirmativus; da hingegen diese Formul $n = xx + yy + zz + vv$ wahr ist, wenn n auch ein numerus fractus ist, nur nicht negativus. Ich habe aber hierauf seit langer Zeit nicht weiter gedacht, und also auch nichts weiter gefunden.

Vor einiger Zeit habe ich Ew. eine Entdeckung über die summas divisorum numerorum naturalium zu überschreiben die Ehre gehabt: *)

*) Lettre CIII du 1 Avril 1747.

Numeri: 1,2,3,4,5, 6,7, 8, 9,10,11,12,13,14,15 etc.
Summae divisor.: 1,3,4,7,6,12,8,15,13,18,12,28,14,24,24 etc.
und bemerket, dass diese series summae divisorum recurrens sey, also dass wenn $\int n$ die summam divisorum numeri n andeutet, allzeit ist

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) - \int(n-22) - \text{etc.}$$

Diese Entdeckung schien mir um so viel merkwürdiger, da der Beweis davon nicht vollständig war, sondern sich auf dieses theorema gründete, dass

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\text{ etc.} = 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.},$$

welches ich nur per inductionem gefunden hatte und auf keinerley Weise beweisen konnte. Es schien mir auch merkwürdig, dass die exponentes alternatim sumti 1, 5, 12, 22, 35, etc. die numeri pentagonales sind, und die übrigen 2, 7, 15, 26, 40, etc. die seriem pentagonalium retro continuatam vorstellen, also dass die obige series auch solchergestalt dargestellt werden kann

$$\text{etc.} - x^{40} + x^{26} - x^{15} + x^7 - x^2 + x^0 - x^1 + x^5 - x^{12} + x^{22} - x^{35} + \text{etc.},$$

wo die differentiae exponentium eine progressionem arithmeticam ausmachen.

Seit der Zeit aber habe ich auch die Demonstration dieses theorematis gefunden, welche sich auf dieses lemma gründet;

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)\text{ etc.} = 1 - \alpha - \beta(1-\alpha) - \gamma(1-\alpha)(1-\beta) - \delta(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) - \text{etc.}$$

dessen Demonstration sogleich in die Augen fällt.

Also ist nach diesem lemmate

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) \text{ etc.} = s =$$
$$1 - x - x^2(1-x) - x^3(1-x)(1-x^2) -$$
$$x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3) - \text{etc.}$$

Ponatur $s = 1 - x - Axx$, erit

$$A = 1 - x + x(1-x)(1-x^2) + x^2(1-x)(1-x^2)(1-x^3) + \text{etc.}$$

Evolvatur ubique factor $1 - x$, erit

$$A = 1 - x \qquad - x^2(1-xx) \qquad - x^3(1-xx)(1-x^3) - \text{etc.}$$
$$+ x(1-xx) + x^2(1-xx)(1-x^3) + x^3(1-xx)(1-x^3)(1-x^4) + \text{etc.}$$

hincque fiet

$$A = 1 - x^3 \qquad - x^5(1-xx) \qquad - x^7(1-xx)(1-x^3) - \text{etc.}$$

Sit $A = 1 - x^3 - Bx^5$, erit

$$B = 1 - xx + x^2(1-xx)(1-x^3) + x^4(1-xx)(1-x^3)(1-x^4) + \text{etc.}$$

Evolvatur factor $1 - xx$:

$$B = 1 - xx \qquad - x^4(1-x^3) \qquad - x^6(1-x^3)(1-x^4) - \text{etc.}$$
$$+ xx(1-x^3) + x^4(1-x^3)(1-x^4) + x^6(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) + \text{etc.}$$

hincque fiet

$$B = 1 - x^5 \qquad - x^8(1-x^3) \qquad - x^{11}(1-x^3)(1-x^4) - \text{etc.}$$

Sit $B = 1 - x^5 - Cx^8$, erit

$$C = 1 - x^3 + x^3(1-x^3)(1-x^4) + x^6(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) + \text{etc.}$$

Evolvatur factor $1 - x^3$:

$$C = 1 - x^3 \qquad - x^6(1-x^4) \qquad - x^9(1-x^4)(1-x^5) - \text{etc.}$$
$$+ x^3(1-x^4) + x^6(1-x^4)(1-x^5) + x^9(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) + \text{etc.}$$

ergo

$$C = 1 - x^7 \qquad - x^{11}(1-x^4) \qquad - x^{15}(1-x^4)(1-x^5) - \text{etc.}$$

Sit $C = 1 - x^7 - Dx^{11}$ etc.

Wenn man nun auf gleiche Art fortgehet, so wird

$$D = 1 - x^9 - Ex^{14}, \quad E = 1 - x^{11} - Fx^{17} \text{ etc.}$$

Also wird seyn:

$$\left.\begin{array}{l} s = 1 - x - Ax^2 \\ A = 1 - x^3 - Bx^5 \\ B = 1 - x^5 - Cx^8 \\ C = 1 - x^7 - Dx^{11} \\ D = 1 - x^9 - Ex^{14} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{array}{l} s = 1 - x - Ax^2 \\ Ax^2 = x^2\,(1 - x^3) - Bx^7 \\ Bx^7 = x^7\,(1 - x^5) - Cx^{15} \\ Cx^{15} = x^{15}\,(1 - x^7) - Dx^{26} \\ Dx^{26} = x^{26}\,(1 - x^9) - Ex^{40} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

woraus denn ganz ungezweifelt folget

$$s = 1 - x - x^2\,(1 - x^3) + x^7\,(1 - x^5) - x^{15}\,(1 - x^7) + x^{26}\,(1 - x^9) - \text{etc.}$$

oder

$$s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - \text{etc.}$$

Euler.



LETTRE CXXXI.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Théorèmes relatifs à la résolution des nombres en trois et quatre quarrés.

St. Petersburg d. 18. Juli 1750.

Die Demonstration von den theorematibus, die summas trium et quatuor quadratorum betreffend, welche Ew. in Dero Schreiben aufführen, habe ich leicht eingesehen, weil generaliter wahr ist, dass posita $z=\frac{2(\alpha e+\beta f+\gamma g+\delta h)}{ee+ff+gg+hh}$, die vier gegebenen quadrata $\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta$ gleich sind $(ez-\alpha)^2+(fz-\beta)^2+(gz-\gamma)^2+(hz-\delta)^2$, allwo die quantitates e, f, g, h pro lubitu genommen werden können, wenn auch über dieses, die letztern vier quantitates so beschaffen sind, dass die summa quatuor radicum

$$(e+f+g+h)z-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=0,$$

so können die vier quadrata allezeit in drey quadrata verwandelt werden.

Ich will noch einige andere propositiones beyfügen, die mir schon längst bekannt gewesen, und sich selbst demonstriren:

I. $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + (2\delta + \alpha + \beta + \gamma)^2 = (\alpha + \beta + \delta)^2 + (\alpha + \gamma + \delta)^2 + (\beta + \gamma + \delta)^2 + \delta\delta = (\alpha + \delta)^2 + (\beta + \delta)^2 + (\gamma + \delta)^2 + (\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2$

woraus zugleich die Methode erhellet, wie data quatuor quadrata imparia (non aequalia inter se) in quatuor alia, sive paria sive imparia, verwandelt werden können, denn wenn δ in den gegebenen vier quadratis ein numerus par ist, so gilt die erste Aequation pro quadratis paribus, und die andere pro imparibus.

II. Si dantur in uno casu $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 8m + 3$, dantur etiam quatuor quadrata pro casu quocunque $2m + pp \pm p + 1$; nam si $8m + 3$ est $=$ tribus quadratis, erit $8m + 3 + (1 + 2p)^2 =$ quatuor quadratis et divisis omnibus per 4, $2m + pp \pm p + 1 =$ quatuor quadratis.

III. Nachfolgende drey quadrata in fraetis

$$\frac{(\pm pp\alpha \mp 2qq\beta - 2pq\gamma)^2 + (\mp 2qq\alpha \pm pp\beta - 2pq\gamma)^2 + (\mp 2pq\alpha \mp 2pq\beta + (2qq - pp)\gamma)^2}{(pp + 2qq)^2}$$

allwo α, β, γ pro integris genommen werden, sind $=$ diesen drey quadratis integris $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma$.

IV. Si $AA + BB + CC = 8m + 3$, erit

$$\frac{(A + B - C \pm 1)^2}{4.4} + \frac{(A - B + C \pm 1)^2}{4.4} + \frac{(-A + B + C \pm 1)^2}{4.4} + \frac{(-A - B - C \pm 1)^2}{4.4}$$

$= 2m + 1$.

und wenn man 3 anstatt 1 setzet, so kommen vier quadrata $= 2m + 3$ heraus. Goldbach.

LETTRE CXXXII.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Recherches arithmétiques. Suite.

Berlin d. 15. August 1750.

Die überschriebenen theoremata circa resolutionem numerorum in tria et quatuor quadrata sind alle merkwürdig und haben ihre völlige Richtigkeit; ich habe mich aber bisher umsonst bemühet aus solchen theorematibus den geringsten Nutzen für die bewussten Fermatiana zu ziehen. Ich habe zwar bewiesen omnem numerum sive integrum sive fractum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum; allein es fehlet mir noch an diesem Beweise: Si numerus integer n fuerit summa quatuor fractorum quadratorum

$$\frac{aa}{pp} + \frac{bb}{qq} + \frac{cc}{rr} + \frac{dd}{ss},$$

tum eundem quoque semper esse summam quatuor quadratorum in integris. Und ich sehe wohl, dass ich ohne diese

Demonstration nichts pro resolutione numerorum in tres trigonales, quinque pentagonales, sex hexagonales, etc. auszurichten vermögend bin; und weil hier alles auf numeros integros ankommt, so können die formulae universales, als welche auch fractos in sich schliessen, nicht viel helfen. Die demonstrationem pro quadratis habe ich aus der Betrachtung der residuorum, welche post divisionem cujusque numeri per quadratum überbleiben, hergeleitet; allein diese Betrachtung kann bey den übrigen numeris polygonalibus nicht angewandt werden, dahero ich den sichern Schluss mache, dass Fermat durch ganz andere Speculationen auf seine theoremata geleitet worden, welche vielleicht aus fleissiger Erwägung seiner Werke zu errathen wären.

Ich habe neulich einen Einfall gehabt eine seriem

$$a + b + c + d + e + f + \text{etc.}$$

daraus zu bestimmen, wenn die producta ex binis terminis contiguis gegeben sind, als:

Quaeratur series numerorum $a + b + c + d + e + f +$ etc. certa et uniformi lege procedens, ut sit: $ab = 1$, $bc = 2$, $cd = 3$, $de = 4$, $ef = 5$, etc.

Hieraus ist sogleich klar, dass wenn nur ein terminus bekannt wäre, die übrigen alle daraus bestimmt werden. Also aus dem ersten a sind die folgenden:

$$b = \frac{1}{a},\ c = \frac{2a}{1},\ d = \frac{1.3}{2.a},\ e = \frac{2.4a}{1.3},\ f = \frac{1.3.5}{2.4.a},\ \text{etc.}$$

Nun folgt ex natura seriei, dass die termini infinitesimi einander gleich seyn müssen, also wenn je zwey contigui einander gleich gesetzt werden, so müssen folgende valores der Wahrheit immer näher kommen:

$$aa = \frac{1.1}{2} = \frac{1.1.3}{2.2} = \frac{1.1.3.3}{2.2.4} = \frac{1.1.3.3.5}{2.2.4.4}\ \text{etc.}$$

also wird seyn



$$aa = \frac{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.\text{etc.}}{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.\text{etc.}} \text{ in inf.}$$

Diese Expression aber ist $= \frac{2}{\pi}$ (exist. $1 : \pi =$ diam.: periph.), folglich wird $a = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Dahero ist dieses eine series uniformi lege procedens:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ \sqrt{\frac{\pi}{2}},\ 2\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ \frac{1.3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ \frac{2.4}{1.3}\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ \text{etc.}$$

Von dieser serie:

$$1 - x^1 + x^4 - x^9 + x^{16} - x^{25} + x^{36} - x^{49} + \text{etc.}$$

halte ich für merkwürdig, dass wenn man setzt $x = 1 - y$, diese series herauskommt:

$$\tfrac{1}{2} + 0\,y + 0\,y^2 + 0\,y^3 + 0\,y^4 + \text{etc.}$$

nehmlich dass alle potestates finitae ipsius y evanesciren, welches aber bey den infinitis nicht geschehen kann, indem die summa derselben seriei unmöglich allzeit seyn kann $= \frac{1}{2}$. Solches mag wohl eintreffen casu $x = 1$; aber wenn $x < 1$, so ist die summa gewiss $> \frac{1}{2}$. Allein setze ich nur $x = \frac{9}{10}$, oder $y = \frac{1}{10}$, so wird die Summ $= 0{,}4999492$, wofern ich im Rechnen nicht gefehlt.

Euler.

LETTRE CXXXIII.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Amendement à la lettre précédente. Recherche de l'intégrale d'une équation différentielle au moyen d'une seconde différentiation.

Berlin d. 17. August 1750.

Ich kann nicht unterlassen den in meinem letzten Schreiben begangnen Rechnungsfehler anzuzeigen, dass ich die Summ der dort angeführten seriei kleiner als $\frac{1}{2}$ befunden, welche doch wirklich nach wiederholter Rechnung grösser ist als $\frac{1}{2}$. Ich habe seit der Zeit verschiedene casus mit allem Fleiss berechnet von dieser serie

$$s = 1 - x^1 + x^4 - x^9 + x^{16} - x^{25} + x^{36} - x^{49} + \text{etc.}$$

und befunden, dass

wenn $x = 0$ so ist $s = 1$, welches für sich klar;

$x = \frac{1}{2}$ „ $s = 0{,}5605621040$

$x = \frac{2}{3}$ „ $s = 0{,}5063351$

$x = \frac{7}{10}$ „ $s = 0{,}5029379861$

$x = \frac{8}{10}$ „ $s = 0{,}5000591683$

$x = \frac{9}{10}$ „ $s = 0{,}5000000005$

$x = 1$ „ $s = 0{,}5$.

Wenn also x nur um sehr wenig kleiner ist als 1, nehmlich $x = 1 - \omega$, so wird die summa s um etwas fast unmerkliches grösser als $\frac{1}{2}$. Denn wenn $\omega = \frac{1}{10}$, so ist $s = \frac{1}{2} + \frac{5}{10^{10}}$, und wenn man setzet $\omega = \frac{1}{20}$ oder $x = \frac{19}{20}$, so kann man sicher schliessen, dass der Excess der summae s über $\frac{1}{2}$ nur ungefähr $\frac{5}{10^{20}}$ betragen würde. Ich habe aber bisher umsonst einen sichern Weg gesucht um die Summe dieser seriei proxime in numeris zu bestimmen, wenn ω ein sehr kleiner Bruch ist. Denn wenn ich setzen wollte $\omega = \frac{1}{100}$ oder $x = \frac{99}{100}$, so müsste ich alle terminos seriei auf mehr als 100 Figuren in Decimalfractionen berechnen, weil $s = 0{,}5000000$ etc. und die Anzahl der nach der 5 folgenden Nullen sich bis auf hundert belaufen würde. Denn ungefähr wird seyn $s = \frac{1}{2} + \frac{5}{10^{100}}$. Es wäre also eine Methode hoch zu schätzen, vermittelst welcher man im Stande wäre den Werth von s proxime zu bestimmen, wenn ω ein sehr kleiner Bruch ist.

Die theoremata Fermatiana haben mich auf die Betrachtung dieser seriei

$$s = 1 + x^1 + x^4 + x^9 + x^{16} + x^{25} + x^{36} + \text{etc.}$$

gebracht, als in welcher keine andere potestates ipsius x vorkommen als deren exponentes numeri quadrati sind. Nimmt man nun das Quadrat von dieser serie:

$$ss = 1 + 2x + x^2 + 2x^4 + 2x^5 + x^8 + \text{etc.},$$

so enthält diese series keine andere potestates ipsius x, als deren exponentes summae duorum quadratorum sind. In der serie s^3 werden noch nicht alle potestates ipsius x vorkommen, sondern darin noch diese x^7, x^{15}, x^{23}, x^{28}, etc.

fehlen. Könnte man nun beweisen, dass in der serie s^4 gar alle potestates ipsius x nothwendig vorkommen, so wäre zugleich bewiesen, dass eine solche Zahl summa quatuor quadratorum pauciorumve wäre.

Ebenfalls pro resolutione numerorum in tres triangulares müsste man beweisen, dass posito

$$s = 1 + x^1 + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + \text{etc.}$$

die daraus entstehende series s^3 gar alle potestates ipsius x in sich fasse. Und pro numeris pentagonalibus müsste bewiesen werden, dass posito $s = 1 + x^1 + x^5 + x^{12} + x^{22} + \text{etc.}$ die daher entstehende series s^5 gar alle potestates ipsius x in sich fasse, etc. In diesen seriebus pro s assumtis habe ich alle coëfficientes gleich 1 gesetzt. Der Beweis aber wird einerley seyn, wenn man quosvis coëfficientes affirmativos annimmt, und es käme darauf an, solche coëfficientes zu erwählen, dass der Beweis erleichtert würde. Dieser Weg däucht mir noch der natürlichste zu seyn, um zum Beweis der theorematum Fermatianorum zu gelangen.

Ew. werde noch ein curieuses paradoxon in analysi infinitorum vorlegen, welches darin bestehet, dass man öfters das integrale von einer Differential-Aequation finden kann, ohne dieselbe zu integriren, indem man dieselbe sogar noch weiter differentiirt, ungeachtet eine solche Operation dem Endzweck schnurstracks entgegen zu seyn scheinet. Denn wenn man eine aequationem differentialem nochmals differentiirt, so bekommt man ihr differentiale, oder das differentio-differentiale aequationis integralis quaesitae. So wunderbar muss es also scheinen, dass man durch eine solche Operation die aequationem integralem selbst bekommen sollte. Folgendes Exempel wird dieses paradoxon deutlich an den Tag legen.

Proposita sit haec aequatio differentialis

$$y\,dx - x\,dy = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)},$$

cujus integrale quaeratur.

Ponatur $dy = p\,dx$, haec aequatio abibit in

$$y - px = a\sqrt{(1 + pp)},$$

quae denuo differentiata dat

$$dy - p\,dx - x\,dp = \frac{apdp}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Atqui est $dy = p\,dx$ (per hyp.) ergo $-x\,dp = \frac{apdp}{\sqrt{(1+pp)}}$, ideoque hinc habebitur $x = \frac{-ap}{\sqrt{(1+pp)}}$. Porro ex aequatione $y - px = a\sqrt{(1+pp)}$ fit $y = px + a\sqrt{(1+pp)}$, unde valore invento pro x substituto, obtinetur $y = \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$. Cum jam sit $x = \frac{-ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ erit $xx + yy = aa$, quae est aequatio integralis quaesita, atque per differentiationem eruta.

Euler.

LETTRE CXXXIV.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Réponse à la lettre précédente. Observation sur les nombres résolubles en quatre quarrés.

St. Petersburg d. 3. October 1750.

Der Rechnungsfehler, welchen Ew. selbst in Dero Schreiben vermuthet hatten, ist mir alsofort sehr wahrscheinlich vorgekommen; es hätte mir aber viele Mühe gekostet selbigen eigentlich anzuzeigen, wenn solches nicht Ew. selbst in Dero Brief v. 17. Aug. gethan hätten; mir werden auch diese Sachen, seitdem Ew. von hier abgereiset sind und ich hierüber mit keinem Menschen mehr spreche, noch in Büchern etwas dergleichen lese, je länger je fremder, wie ich denn den nexum inter aequationes $ydx - xdy = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ und $x^2 + y^2 = a^2$ schwerlich würde entdecket haben, wenn Ew. selbigen nicht so deutlich angezeiget hätten.

Aus dem theoremate Fermatiano folget auch dieses: dass die summa radicum quatuor quadratorum imparium allezeit $=$ seyn kann ± 2, oder dass data summa quatuor quadratorum imparium, die quatuor quadrata so angegeben werden können, dass die summa radicum $=$ sey ± 2. Wenn man aber auf eine leichte Art beweisen kann, dass die summa quatuor quadratorum imparium auf nachfolgende vier zu reduciren ist: $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + (2 - \alpha - \beta - \gamma)^2$, so ist auch leicht zu beweisen, dass $8m + 4$ allezeit eine summa quatuor quadratorum imparium ist.

Goldbach.

LETTRE CXXXV.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Théorèmes de stéréométrie.

Berlin d. 14. November 1750.

Neulich kam mir in Sinn die allgemeinen Eigenschaften der Cörper, welche hedris planis eingeschlossen sind, zu bestimmen, weil kein Zweifel ist, dass sich in denselben nicht eben dergleichen allgemeine Eigenschaften finden sollten, als in den figuris planis rectilineis, deren Eigenschaften darin bestehen, dass 1. in einer jeglichen figura plana der numerus laterum dem numero angulorum gleich ist, hernach 2. dass die summa angulorum omnium gleich ist bis tot rectis quot sunt latera, demtis quatuor. Wie aber in den figuris planis nur latera und anguli zu betrachten vorkommen, so müssen bei den Cörpern mehr Stücke in Betrachtung gezogen werden, als

I. die hedrae, deren Anzahl sey $= H$;
II. die anguli solidi, deren Anzahl sey $= S$;
III. die Fugungen, wo zwey hedrae secundum latera zusammenkommen, so ich aus Mangel eines recipirten Worts, *acies* nenne, deren Anzahl sey $= A$;
IV. die latera singularum hedrarum, quorum omnium simul sumtorum numerus sit $= L$;
V. die anguli plani singularum hedrarum, quorum omnium numerus sit $= P$.

1. Bei diesen fünf Stücken ist nun erstlich klar, dass $P = L$, weil in allen hedris der numerus angulorum $=$ numero laterum.

2. Ist auch immer $A = \frac{1}{2} L$, oder $A = \frac{1}{2} P$, weil immer zwey latera diversarum hedrarum zusammenkommen, um eine aciem zu formiren.

3. Dahero ist der numerus laterum seu angulorum planorum omnium hedrarum corpus includentium allzeit par.

4. Semper est vel $L = 3H$ vel $L > 3H$
5. Semper est vel $P = 3S$ vel $P > 3S$
at est $P = L$.

Dieses ist klar, weil keine hedra aus weniger als drey Seiten, und kein angulus solidus aus weniger als drey angulis planis bestehen kann. Folgende Proposition aber kann ich nicht recht rigorose demonstriren:

6. In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex numero hedrarum et numero angulorum solidorum binario superat numerum acierum, seu est $H + S = A + 2$, seu $H + S = \frac{1}{2} L + 2 = \frac{1}{2} P + 2$.

7. Impossibile est ut sit $A + 6 > 3H$ vel $A + 6 > 3S$.

8. Impossibile est ut sit $H + 4 > 2S$ vel $S + 4 > 2H$.

9. Nullum formari potest solidum, cujus omnes hedrae

sint sex pluriumve laterum, nec cujus omnes anguli solidi ex sex pluribusve angulis planis sint conflati.

10. Summa omnium angulorum planorum, qui in ambitu solidi cujusque occurrunt, tot angulis rectis aequatur quot sunt unitates in $4A - 4H$.

11. Summa omnium angulorum planorum aequatur quater tot angulis rectis, quot sunt anguli solidi, demtis octo, seu est $= 4S - 8$ rectis.

Exemplo sit (Fig. 39) prisma triangulare, ubi est

1. numerus hedrarum $H = 5$;
2. numerus angulorum solidorum $S = 6$;
3. numerus acierum ($ab, ac, bc, ad, be, cf, de, df, ef$) $A = 9$;
4. numerus laterum et angulorum planorum $L = P = 18$. Includitur enim corpus duobus triangulis et tribus quadrilateris, unde $L = P = 2.3 + 3.4 = 18$. Nun ist nach dem theor. 6to: $H + S(11) = A + 2(11)$. Ferner summa omnium angulorum planorum (aus den beiden triangulis $= 4$ rectis, aus den drey quadrilateris $= 12$ rectis) erit $= 16$ rectis $= 4(A - H)$ $= 4S - 8$ rectis.

Es nimmt mich Wunder, dass diese allgemeinen proprietates in der Stereometrie noch von Niemand, so viel mir bekannt, sind angemerkt worden; doch viel mehr aber, dass die fürnehmsten davon als theor. 6 et theor. 11 so schwer zu beweisen sind, denn ich kann dieselben noch nicht so beweisen, dass ich damit zufrieden bin.

Um die soliditatem eines Cörpers zu bestimmen, so wollte ich nach Belieben inners desselben ein Punct annehmen, und daraus nach allen angulis solidis grade Linien ziehen. Hierdurch wird der Cörper in lauter Pyramiden zertheilt,

deren vertices im angenommenen Punct sind und die hedras zu basibus haben. Welche Pyramiden nicht triangulares sind, können ferner leicht in triangulares zerschnitten werden. Alles kommt also darauf an, dass man die soliditatem pyramidis triangularis bestimmen könne, welches also ex cognitis lateribus geschehen kann:

Sit (Fig. 40) *ABCD* pyramis proposita, in qua habeantur $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $AD = d$, $BD = e$, $CD = f$, erit hujus pyramidis soliditas =

$$\frac{1}{12}\sqrt{\left\{\begin{array}{r} +aaff(bb+cc+dd+ee-aa-ff)-aabbcc \\ +bbee(aa+cc+dd+ff-bb-ee)-aaddee \\ +ccdd(aa+bb+ee+ff-cc-dd)-bbddff \\ -cceeff \end{array}\right\}}.$$

Euler.

LETTRE CXXXVI.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Encore sur la décomposition des nombres en quatre quarrés.

St. Petersburg d. $\frac{4}{15}$ Juni 1751.

Ew. bin ich für die mir communicirten schönen theoremata von den Eigenschaften der Cörper, welche hedris planis eingeschlossen sind, sehr verbunden; ich beklage aber, dass bey mir die gehörige Attention zu dergleichen Betrachtungen je länger je mehr, und zwar per seriem valde ad nihilum convergentem wider meinen Willen abnimmt, ausser dass ich noch bisweilen an das theorema Fermatianum gedenke, wovon ich über Vermuthen nachfolgende casus, darin quatuor quadrata $+8$ aequalia fiunt quatuor quadratis, bemerket. Sint $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ numeri integri permutabiles sive affirmativi sive negativi, erunt $\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta+8$ aequalia quatuor quadratis si fuerit $\delta=7+\alpha+\beta+\gamma$, vel $=$

$2+\alpha+\beta+\gamma$, vel $= 2\beta+2\gamma+3$, vel $= \frac{2\alpha+2\beta+\gamma}{3}$ (casu quo hic numerus fit integer), vel $= 3\alpha+2\beta+2\gamma$, vel $= \alpha$, vel $= 3\gamma+8$, in welchen allen Fällen die quatuor quadrata gar leicht angegeben werden können; ingleichen wenn

$$\delta = \frac{(3qq+1)\gamma - 2q(q+1)(\alpha+\beta+\gamma)}{3qq-2q-1}$$

numero integro, ubi et $2q$ sit numerus integer quicunque. Ich habe schon längst in den Zeitungen gelesen, dass der Herr Philidor sich in Berlin bei den grössesten Schachspielern fürchterlich gemacht, woraus ich vermuthe, dass er Ew. auch nicht unbekannt seyn wird.

Goldbach.

LETTRE CXXXVII.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Suite des recherches sur la décomposition des nombres. Le célèbre joueur aux échecs Philidor. Nouveau mémoire sur Jupiter et Saturne.

Berlin d. 5. Juli 1751.

Ich beklage von Herzen, dass bey Ew. die Lust zu mathematischen Speculationen abzunehmen beginnt, woran ohne Zweifel der Mangel eines vertrauten Umgangs über dergleichen Untersuchungen grossen Antheil haben wird. Denn die mir gütigst überschriebenen Anmerkungen über das theorema Fermatianum zeigen nichts weniger, als eine Verminderung in der Kraft dergleichen Sachen nachzudenken an. Dieselben haben mir Anlass gegeben diese Bestimmung allgemeiner zu machen und den Werth von δ zu bestimmen, dass $\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta+e$ eine summa quatuor quadratorum werde. Setze ich nun

$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta+e=(\alpha-kx)^2+(\beta-mx)^2+(\gamma-nx)^2+(\delta+x)^2$,

so wird

$$\delta = k\alpha + m\beta + n\gamma - \tfrac{1}{2}x(kk+mm+nn+1) + \frac{e}{2x}.$$

Damit nun diese Formul in ganzen Zahlen bestehe, setze ich $e(kk+mm+nn+1) = ab$, oder ich resolvire

$$e(kk+mm+nn+1)$$

in zwey factores, die entweder beyde grad oder beyde ungrad sind, so wird

$$\delta = k\alpha + m\beta + n\gamma + \frac{a-b}{2} \text{ und } x = \frac{e}{a}.$$

Ist nun, wie bey Ew. $e = 8$, so können in genere die vier quadrata, deren Summ $= \alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta + 8$, angegeben werden, wenn $\delta = k\alpha + m\beta + n\gamma + f$, und f so angenommen wird, dass $f = c - d$, existente

$$2(kk+mm+nn+1) = cd;$$

und da wird $x = \frac{4}{c}$, oder $x = -\frac{4}{d}$.

Für k, m und n können nun Zahlen nach Belieben angenommen werden, da immer für f ein, zwei oder mehr taugliche Werthe herauskommen. Als setzt man

$k=1$, $m=0$, $n=0$, so wird $cd=4$ und $f=0$, oder $f=3$; $\delta=\alpha+\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{matrix}0^*\\3\end{matrix}\right.$

$k=2$, $m=0$, $n=0$, „ $cd=10$ „ $f=3$, „ $f=9$; $\delta=2\alpha+\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{matrix}3\\9\end{matrix}\right.$

$k=3$, $m=0$, $n=0$, „ $cd=20$ „ $f=1$, $f=8$, $f=19$; $\delta=3\alpha+\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{matrix}1\\8^*\\19\end{matrix}\right.$

$k=1$, $m=1$, $n=0$, „ $cd=6$ „ $f=1$, $f=5$; $\delta=\alpha+\beta+\ldots \left\{\begin{matrix}1\\5\end{matrix}\right.$

$k=2$, $m=1$, $n=0$, „ $cd=12$ „ $f=1$, $f=4$, $f=11$; $\delta=2\alpha+\beta+\ldots \left\{\begin{matrix}1\\4\\11\end{matrix}\right.$

$k=2$, $m=2$, $n=0$, „ $cd=18$ „ $f=3$, 7, 17; $\delta=2\alpha+2\beta+\ldots \left\{\begin{matrix}3^*\\7\\17\end{matrix}\right.$

$k=3$, $m=1$, $n=0$, „ $cd=22$ „ $f=9$, 21; $\delta=3\alpha+\beta+\ldots \left\{\begin{matrix}9\\21\end{matrix}\right.$

$k=3$, $m=2$, $n=0$, „ $cd=28$ „ $f=3$, 12, 27; $\delta=3\alpha+2\beta+\ldots \left\{\begin{matrix}3\\12\\27\end{matrix}\right.$

$k=3, m=3, n=0$, so wird $cd=38$ und $f=17, 37$; $\delta=3\alpha+3\beta+\ldots\ldots \left\{\begin{matrix}17\\37\end{matrix}\right.$

$k=1, m=1, n=1$, „ $cd=8$ „ $f=2, 7$; $\delta=\alpha+\beta+\gamma+\left\{\begin{matrix}2^*\\7^*\end{matrix}\right.$

$k=2, m=1, n=1$, „ $cd=14$ „ $f=5, 13$; $\delta=2\alpha+\beta+\gamma+\left\{\begin{matrix}5\\13\end{matrix}\right.$

$k=2, m=2, n=1$, „ $cd=20$ „ $f=1, 8, 19$; $\delta=2\alpha+2\beta+\gamma+\left\{\begin{matrix}1\\8\\19\end{matrix}\right.$

$k=2, m=2, n=2$, „ $cd=26$ „ $f=11, 25$; $\delta=2\alpha+2\beta+2\gamma+\left\{\begin{matrix}11\\25\end{matrix}\right.$

$k=3, m=1, n=1$, „ $cd=24$ „ $f=2, 5, 10, 23$; $\delta=3\alpha+\beta+\gamma+\left\{\begin{matrix}2\\5\\10\\23\end{matrix}\right.$

$k=3, m=2, n=1$, „ $cd=30$ „ $f=1, 7, 13, 29$; $\delta=3\alpha+2\beta+\gamma+\left\{\begin{matrix}1\\7\\13\\29\end{matrix}\right.$

$k=3, m=2, n=2$, „ $cd=36$ „ $f=0, 5, 9, 16, 35$; $\delta=3\alpha+2\beta+2\gamma+\left\{\begin{matrix}0^*\\5\\9\\16\\35\end{matrix}\right.$

wo ich die von Ew. überschriebenen Formeln mit einem * bemerkt. Man kann auch f nach Belieben annehmen, um daraus k, m und n zu bestimmen, als, wenn seyn soll $f=0$ oder $\delta=k\alpha+m\beta+n\gamma$, so wird $c=d$, folglich cd ein Quadrat. Dasselbe sey $=4pp$, so wird $kk+mm+nn=2pp-1$. Hier ist klar, dass wenn p ein numerus par, $2pp-1$ unmöglich die Summ von drey Quadraten seyn kann; also müssen für p nur ungrade Zahlen genommen werden, da dann für k, m, n, folgende Werthe herauskommen:

$2pp-1=$	1	17	49	97	161	241	337
$k=$	1	4, 3	7, 6	9, 6	12, 11, 10, 9	15, 14, 13, 12	18, 16, 12
$m=$	0	1, 2	0, 3	4, 6	4, 6, 6, 8	4, 6, 6, 9	3, 9, 12
$n=$	0	0, 2	0, 2	0, 5	1, 2, 5, 4	0, 3, 6, 4	2, 0, 7

Da nun solchergestalt, wenn α, β, γ gegeben sind, unendlich vielerley valores für δ gefunden werden können, nach-

dem entweder f oder k, m, n nach Belieben angenommen wird, und auch die Zahlen k, m, n und f negative genommen werden können, so wäre nun zu beweisen, dass auf solche Art alle mögliche Zahlen für δ herauskommen; und hieraus würde man einen sehr schönen Beweis für das theorema Fermatianum erhalten, welcher gewiss noch zu andern wichtigen Entdeckungen leiten würde.

Den grossen Schachspieler Philidor habe ich nicht gesehen, weil er sich mehrentheils in Potsdam aufhielt. Er soll noch ein sehr junger Mensch seyn, führte aber eine Maitresse mit sich, wegen welcher er mit einigen Officiren in Potsdam Verdriesslichkeiten bekommen, welche ihn genöthiget unvermuthet wegzureisen; sonsten würde ich wohl Gelegenheit gefunden haben mit ihm zu spielen. Er hat aber ein Buch vom Schachspiel in England drucken lassen, welches ich habe, und darin gewiss sehr schöne Arten zu spielen enthalten sind. Seine grösste Stärke bestehet in Vertheidigung und guter Führung seiner Bauern, um dieselben zu Königinnen zu machen, da er dann, wenn die Anstalten dazu gemacht, pièce für pièce wegnimmt um seine Absicht zu erreichen und dadurch das Spiel zu gewinnen.

Seit einiger Zeit habe ich mich wiederum mit dem Jupiter und Saturnus gequälet, und darüber verschiedene Sachen entdecket, welche mir zu einer nähern Erkenntniss ihrer Bewegung den Weg gebahnet. Weil dieses wieder die Preisfrage bey der Pariser Akademie auf künftiges Jahr ist, so habe ich darüber eine neue Abhandlung dahin abgeschickt.

Euler.

LETTRE CXXXVIII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Suite des recherches numériques précédentes.

St. Petersburg d. 17. Juli 1751.

Von der aequatione

$$3^2 + 5^2 + u^2 + 8 = uu + 42 = \text{tribus quadratis}$$

will ich nur bemerken, dass u infinities infinitis modis determiniret werden kann, davon ein casus ist

$$3^2 + 5^2 + (4pp - 10p + 7)^2 + 8 =$$
$$(4pp - 10p + 3)^2 + (4p - 9)^2 + (4p - 1)^2;$$

was ich aber in meinem vorigen Schreiben von dem valore δ per α, β, γ et q expresso erwähnet habe, verstehe ich jetzo selbst nicht mehr und zweifle an dessen Richtigkeit, doch ist dieses gewiss, dass

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \varepsilon\varepsilon + 8 = 3^2 + (1 - \alpha + \beta)^2 +$$
$$(1 - \alpha + \gamma)^2 + \frac{(2\varepsilon q + \alpha - 1)^2}{qq},$$

si q determinetur per hanc aequationem

$$\frac{(3qq+1)}{2q}(1 - \alpha) + (\alpha + \beta + \gamma)q = 2\varepsilon.$$

Goldbach.

LETTRE CXXXIX.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Même sujet.

St. Petersburg d 3. August 1751.

Ew. sage ich schuldigsten Dank vor die Communication der vielen casuum pro

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta + 8 = aa + bb + cc + dd.$$

Es ist allerdings wahr, wie Ew. vermuthet, dass ich ausser Deroselben Niemand habe, mit dem ich von dergleichen découvertes schriftlich oder mündlich conferiren könnte. Ich glaube, man kann die Sache etwas kürzer fassen, wenn man nur drey quantitates indeterminatas annimmt und

$$\beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta + 8 = bb + cc + dd$$

setzet, denn es ist gewiss, dass wenn b in einem casu bekannt ist, selbiges auch in infinitis aliis angegeben werden kann, wie ich in meinem letztern Schreiben angezeiget habe, (woselbst aber unnöthig $2p$ anstatt p gesetzt worden), indem

es leicht zu demonstriren ist, dass alsdann auch seyn wird $\beta\beta + \gamma\gamma + (\delta + pu)^2 + 8 = (b + pu)^2 + (c + 2u)^2 + (d + 2u)^2$, si ponatur $u = (\delta - b)p - (c + d)$. Ich weiss gar wohl, dass u noch auf unzählige andere Arten determiniret werden kann, ich bin aber ein grosser Liebhaber von solchen formulis, welche an sich selbst kurz, und auf eine leichte Art immer generaler zu machen sind; denn wenn z. Ex. allhie $\delta + pu = \Delta$, $b + pu = B$, $c + 2u = C$, $d + 2u = D$, so entstehet daraus diese aequatio infinities generalior

$$\beta\beta + \gamma\gamma + (\Delta + PU)^2 + 8 =$$
$$(B + PU)^2 + (C + 2U)^2 + (D + 2U)^2,$$

wenn P numerum integrum quemcunque bedeutet und

$$U = (\Delta - B)P - (C + D)$$

gesetzt wird.

Es folget auch ex theoremate Fermatiano, dass $8n + 4$ allezeit in quatuor quadrata imparia, quorum summa radicum est $= 2$, aber nicht allezeit in quatuor quadrata imparia, quorum summa radicum est $= 0$, resolvirt werden kann.

Ferner hat auch dieses seine Richtigkeit, dass eine summa quatuor quadratorum, quorum summa radicum est $= 0$, in tria quadrata resolviret werden kann, ob aber quinque quadrata, quorum summa radicum $= 0$, allezeit in quatuor quadrata die man angeben kann, resolviret werden könne, weiss ich noch nicht, jedoch gibt es unendlich viele casus, da solches angehet, ohngeachtet die summa radicum nicht $= 0$ ist, also ist z. Ex.

$$((2 + pp)b - c - d - e)^2 + (c - 2b)^2 + (d - 2b)^2 +$$
$$(e - 2b)^2 + 4ppbb =$$

his quatuor $((4 + pp)b - c - d - e)^2 + cc + dd + ee.$

Goldbach.

LETTRE CXL.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Même sujet. Recherche sur le nombre des manières dont un polygone peut être partagé en triangles par des diagonales.

Berlin d. 4. September 1751.

So gross das Vergnügen auch ist, welches ich in Betrachtung der Eigenschaften der Zahlen finde, so wird mir doch diese Materie, wenn ich einige Zeit mit ganz andern Untersuchungen umgegangen, so fremd, dass ich mich sobald nicht mehr darin finden kann. Also konnte ich den Grund des schönen theorematis, dessen Ew. Meldung thun, dass eine summa quatuor quadratorum $aa+bb+cc+dd$, quorum summa radicum $a+b+c+d=0$, allzeit in drey quadrata resolvirt werden könne, sogleich nicht einsehen, da doch derselbe ziemlich offenbar, indem

$$aa+bb+cc+dd=aa+bb+cc+(a+b+c)^2=$$
$$(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2.$$

Doch lässt sich auf gleiche Weise nicht darthun, dass eine summa quinque quadratorum $aa + bb + cc + dd + ee$ in quatuor quadrata resolvirt werden könne, so oft die summa radicum $a + b + c + d + e = 0$. Allein aus dem Vorigen erhellet, dass diese Resolution Statt findet, so oft die fünf radices a, b, c, d, e so beschaffen sind, dass vier derselben zusammengenommen nichts werden, welches auf so vielerley Art geschehen kann, da es erlaubt ist eine jede radicem sowohl affirmative als negative zu nehmen, dass es schwer seyn würde fünf solche Zahlen anzuzeigen, davon nicht vier zusammengenommen auf 0 gebracht werden könnten. Oder die summa quinque quadratorum $aa + bb + cc + dd + ee$ lässt sich in vier quadrata resolviren in folgenden Fällen

$$a \,..\, b \,..\, c \,..\, d = 0$$
$$a \,..\, b \,..\, c \,..\, e = 0$$
$$a \,..\, b \,..\, d \,..\, e = 0$$
$$a \,..\, c \,..\, d \,..\, e = 0$$
$$b \,..\, c \,..\, d \,..\, e = 0$$

wo das Zeichen .. statt $\pm$ gesetzt ist. Dahero jede von diesen fünf Aequationen acht in sich schliesst, und folglich vierzig darin enthalten sind.

Wenn also die radices a, b, c, d, e alle affirmative genommen werden, und unter diesen vierzig Formuln nur eine enthalten ist, die $= 0$, so kann man sicher schliessen, dass die summa quinque quadratorum

$$aa + bb + cc + dd + ee$$

sich in summam quatuor quadratorum verwandeln lasse.

Dieses folget nun aus dem einigen Satze, dass

$$aa + bb + cc + dd = \Box + \Box + \Box,$$

wenn $a + b + c + d = 0$. Weil nun eine summa quatuor quadratorum in unendlich viel andern Fällen auch in drey

quadrata resolvirt werden kann, so können daher noch unendlich viel mehr Conditionen angezeigt werden, unter welchen summa quinque quadratorum in quatuor quadrata resolvirt werden kann.

So oft die quatuor quadrata $aa+bb+cc+dd$ so beschaffen, dass $a+b+c+d=2$, so ist
$aa+bb+cc+dd=(a+b-1)^2+(a+c-1)^2+(b+c-1)^2+1$;
folglich ist $aa+bb+cc+dd-1$ in drey quadrata resolubel. Da nun $8n+3$ in drey quadrata resolubel, wenn man setzt

$$8n+3=(a+b-1)^2+(a+c-1)^2+(b+c-1)^2,$$

so wird $8n+4=aa+bb+cc+dd$ dergestalt, dass

$$a+b+c+d=2;$$

und dieses ist das schöne theorema, welches Ew. aus dem theoremate Fermatiano hergeleitet haben.

Ich bin neulich auf eine Betrachtung gefallen, welche mir nicht wenig merkwürdig vorkam. Dieselbe betrifft, auf wie vielerley Arten ein gegebenes polygonum durch Diagonallinien in triangula zerschnitten werden könne.

Also ein quadrilaterum $abcd$ kann entweder durch die diagonalem ac, oder durch bd, und also auf zweyerley Art in zwey triangula resolvirt werden.

Ein Fünfeck $abcde$ wird durch zwey diagonales in drey triangula getheilet, und solches kann auf fünferley verschiedene Arten geschehen, nehmlich durch die diagonales

I. ac, ad. II. bd, be. III. ca, ce. IV. db, da, V. ec, eb.

Ferner wird ein Sechseck durch drey diagonales in vier triangula zertheilet, und dieses kann auf 14 verschiedene Arten geschehen.

Nun ist die Frage generaliter: da ein polygonum von n Seiten durch $n-3$ diagonales in $n-2$ triangula zerschnit-

ten wird, auf wie vielerley verschiedene Arten solches geschehen könne. Setze ich nun die Anzahl dieser verschiedenen Arten $= x$, so habe ich per inductionem gefunden

wenn $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$
so ist $x = 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430$.

Hieraus habe ich nun den Schluss gemacht, dass generaliter sey

$$x = \frac{2.6.10.14.18.22\ldots.(4n-10)}{2.3.4.5.6.7\ldots\ldots(n-1)}$$

oder es ist $1 = \frac{2}{2}$, $2 = 1.\frac{6}{3}$, $5 = 2.\frac{10}{4}$, $14 = 5.\frac{14}{5}$, $42 = 14.\frac{18}{6}$, $132 = 42.\frac{22}{7}$; dass also aus einer jeden Zahl die folgende leicht gefunden wird. Die Induction aber, so ich gebraucht, war ziemlich mühsam, doch zweifle ich nicht, dass diese Sach nicht sollte weit leichter entwickelt werden können. Ueber die Progression der Zahlen 1, 2, 5, 14, 42, 132, etc. habe ich auch diese Eigenschaft angemerket, dass $1 + 2a + 5a^2 + 14a^3 + 42a^4 + 132a^5 + \text{etc.} = \frac{1-2a-\sqrt{(1-4a)}}{2aa}$. Also wenn $a = \frac{1}{4}$, so ist

$$1 + \frac{2}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{14}{4^3} + \frac{42}{4^4} + \text{etc.} = 4.$$

Euler.



LETTRE CXLI.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Suite des recherches numériques.

St. Petersburg d. 16. October 1751.

Aus Ew. werthem Schreiben vom 4. Sept. habe ich mit Vergnügen die leichte legem progressionis von

$$1+2a+5aa+14a^3+\text{etc.}$$

ersehen. Wenn mir wäre aufgegeben worden die coëfficientes incognitos b, c, d etc. in serie

$$A\ldots 1+ba+caa+da^3+ea^4+\text{etc.}=\frac{1-2a-\sqrt{(1-4a)}}{2aa}$$

zu determiniren, so würde ich die Solution kaum unternommen haben, da ich aber diese coëfficientes bereits exprimiret gesehen, so habe ich zwey Methoden zur Solution gefunden: 1. Weil aus der summa $\frac{1-2a-\sqrt{(1-4a)}}{2aa}=A$ folget, dass $1+aA=A^{\frac{1}{2}}$, oder dass

$$B\ldots 1 + a + baa + ca^3 + da^4 + \text{etc.}$$

in se multiplicata $= A$ seyn muss, so wird

$$BB = \left\{\begin{array}{llllll} 1 + & a + & baa + & ca^3 + & da^4 & \ldots \\ \vdots & a + & aa + & ba^3 + & ca^4 & \ldots \\ \vdots & \vdots & baa + & ba^3 + & bba^4 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & ca^3 + & ca^4 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & da^4 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}\right.$$

$$= A\ldots 1 + 2a + 5aa + 14a^3 + 42a^4 \ldots$$

nehmlich $b = 2$, $c = 5$, $d = 14$ etc. 2. Wenn in der serie A gesetzt wird $a = \alpha - \alpha\alpha$, so wird die summa seriei $= \frac{1}{(-\alpha)^2} = E\ldots 1 + 2\alpha + 3\alpha\alpha + 4\alpha^3 + \text{etc.}$ und die series A verwandelt sich in

$$\begin{array}{llllll} 1 & & & & & \\ \vdots & + b\alpha - b\alpha\alpha & & & & \\ \vdots & \vdots & + c\alpha\alpha \mp 2c\alpha^3 + & c\alpha^4 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & + d\alpha^3 \mp 3d\alpha^4 \ldots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & + e\alpha^4 \ldots & \\ = E\ldots 1 & + 2\alpha & + 3\alpha\alpha & + 4\alpha^3 & + 5\alpha^4 \ldots & \end{array}$$

Comparatis singulis terminis seriei A transmutatae cum singulis seriei E, fit $b = 2$, $c = 5$, $d = 14$, etc.

Ich hatte in meinem Brief vom 15. Juni unter andern auch des casus Erwähnung gethan, wenn in der aequatione $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta + 8 =$ quatuor quadratis, $\delta = \frac{2\alpha + 2\beta - \gamma}{3}$ numero integro. Selbigen casum haben Ew. in Dero Antwort mit Stillschweigen übergangen; es sind aber die quatuor quadrata invenienda in solchem Falle

$$\frac{(2\alpha+2\beta-\gamma+6)^2}{3^2}+\frac{(2\alpha+2\beta-\gamma-6)^2}{3^2}+\frac{(-\alpha+2\beta+2\gamma)^2}{3^2}+\frac{(2\alpha-\beta+2\gamma)^2}{3^2}$$

und der valor δ kann noch generaler angenommen werden, wen man setzet $\delta=\frac{\alpha-2qq\beta-2q\gamma}{1+2qq}=$ numero integro, und zugleich $\varepsilon=\frac{-2q\alpha-2q\beta+(2qq-1)\gamma}{1+2qq}=$ numero integro, quibus positis erunt

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+4\delta\delta+8=(\delta+2)^2+(\delta-2)^2+(\delta-\alpha+\beta)^2+\varepsilon\varepsilon.$$

Hinc sequitur pro quocunque casu $\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+4\delta\delta+8$ assignari posse quatuor quadrata integra si

$$\gamma\gamma+2(\beta+\delta)(\alpha-\delta)$$

sit numerus quadratus, ubi α, β, etc. sunt numeri permutabiles sive affirmativi sive negativi.

Imgleichen positis tribus quadratis imparibus

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma=8n+3 \text{ et } \delta=(uu-u-4n-1),$$

ubi u sit numerus quicunque integer, erunt

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+4\delta\delta+8=(\delta+2)^2+(\delta-2)^2+(\delta-u)^2+(\delta+u-1)^2.$$

Unter die problemata, zu deren Solution es an einer sichern Methode fehlet, rechne ich auch dieses: Determinare numerum e per f et constantes hac lege, ut $2ee-ff+2$ fiat quadratum. *Solutio*: ponatur $e=13^2f\pm 239$.

Goldbach.



LETTRE CXLII.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Même sujet. Réponse à la précédente.

Berlin d. 4. December 1751.

Ew. Schwierigkeit, betreffend die Auswickelung der Formul $\frac{1-2a-\sqrt{(1-4a)}}{2aa}$, wird sogleich gehoben, wenn man die Formul $\sqrt{(1-4a)} = (1-4a)^{\frac{1}{2}}$ nach gewöhnlicher Art in eine seriem verwandelt. Denn da

$$\sqrt{(1-4a)} = 1 - \frac{1}{2}\cdot 4a - \frac{1.1}{2.4}\cdot 4^2a^2 - \frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot 4^3a^3 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\cdot 4^4a^4 - \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\cdot 4^5a^5 - \text{etc.}$$

oder wenn ein jeder coëfficiens numericus des termini antecedentis, die potestatem von 4 mit eingeschlossen, durch P angedeutet wird, so wird

$$\sqrt{(1-4a)} = 1-2a-\frac{4}{4}Pa^2-\frac{12}{6}Pa^3-\frac{20}{8}Pa^4-\frac{28}{10}Pa^5-\text{etc.}$$

oder

$$\sqrt{(1-4a)} = 1-2a-\frac{2}{2}Pa^2-\frac{6}{3}Pa^3-\frac{10}{4}Pa^4-\frac{14}{5}Pa^5-\text{etc.}$$

folglich

$$\sqrt{(1-4a)} = 1-2a-2\cdot\frac{2}{2}a^2-2\cdot\frac{2.6}{2.3}a^3-2\cdot\frac{2.6.10}{2.3.4}a^4-2\cdot\frac{2.6.10.14}{2.3.4.5}a^5-\text{etc.}$$

Dahero bekommt man

$$\frac{1-2a-\sqrt{(1-4a)}}{2aa} = \frac{2}{2}+\frac{2.6}{2.3}a+\frac{2.6.10}{2.3.4}aa+\frac{2.6.10.14}{2.3.4.5}a^3+\text{etc.}$$

wobey merkwürdig ist, dass alle diese Coëfficienten ganze Zahlen werden, welches zu besondern Betrachtungen Anlass geben kann.

Also gibt auch $\sqrt[3]{(1-9a)}$ eine seriem, deren alle Coëfficienten ganze Zahlen werden, nehmlich

$$\sqrt[3]{(1-9a)} = 1-3a-3\cdot\frac{6}{2}a^2-3\cdot\frac{6.15}{2.3}a^3-3\cdot\frac{6.15.24}{2.3.4}a^4-3\cdot\frac{6.15.24.35}{2.3.4.5}a^5-\text{etc.}$$

und generaliter geschiehet dieses

$$\sqrt[n]{(1-nna)} = 1-na-n\frac{(nn-n)}{2}a^2-n\cdot\frac{(nn-n)(2nn-n)}{2.3}a^3-n\cdot\frac{(nn-n)(2nn-n)(3nn-n)}{2.3.4}a^4-\text{etc.}$$

Ew. casus, quo $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+8 =$ quatuor $\square$, nehmlich $\delta = \frac{2\alpha+2\beta-\gamma}{3}$, hat allerdings etwas Besonderes an sich, welches ich sogleich nicht bemerket, und noch jetzt nicht sehe, wie derselbe in den von mir angeführten Fällen enthalten ist. Nun sehe ich zwar, dass derselbe herauskommt, wenn von den gesuchten 4 quadratis zwey dergestalt an-

genommen werden: $(\delta+2)^2+(\delta-2)^2$, da dann noch übrig ist $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta^2$ in zwey quadrata zu resolviren. Setzt man nun dieselben $(\delta+p)^2+(\delta+q)^2$, so wird

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma=3\delta\delta+2(p+q)\delta+pp+qq$$

und

$$3\delta+p+q=\sqrt{(3\alpha\alpha+3\beta\beta+3\gamma\gamma-2pp-2qq+2pq)}.$$

Es sey nun ferner $p=\gamma+m$, $q=\gamma+n$, so wird

$$3\delta+2\gamma+m+n=$$

$$\sqrt{(\gamma\gamma-2(m+n)\gamma+3\alpha\alpha+3\beta\beta-2mm-2nn+2mn)}.$$

Damit nun dieses radicale gleich werde

$$\sqrt{(\gamma\gamma-2(m+n)\gamma+(m+n)^2)},$$

oder

$$3\alpha\alpha+3\beta\beta=3mm+3nn,$$

so darf man nur setzen $m=\alpha$ und $n=\beta$, und bekommt $3\delta+2\gamma+\alpha+\beta=\pm(\gamma-\alpha-\beta)$ oder $\delta=-\left(\frac{2\alpha+2\beta-\gamma}{3}\right)$.

Wenn, um die Sach generaler zu machen, zwey von den gesuchten vier Quadraten angenommen werden

$$(q\delta+2)^2+(q\delta-2)^2=2qq\delta\delta+8,$$

so muss

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma-(2qq-1)\delta\delta=2 \text{ quadr.}=(\delta+f)^2+(\delta+g)^2,$$

das ist

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma=(2qq+1)\delta\delta+2(f+g)\delta+ff+gg,$$

oder

$$2(qq+1)\delta+f+g=$$

$$\sqrt{(2fg-2qq(ff+gg)+(2qq+1)(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma))}.$$

Nun sey ferner $f=\frac{q\gamma+m}{2q-1}$ und $g=\frac{q\gamma+n}{2q-1}$, so kommt eine weitläufige Formul heraus, welche ich nicht der Mühe werth achte zu entwickeln, weil ich nun sehe, dass daraus Ew. zweyte Formuln nicht entspringen. Es scheint aber, dass

unendlich viel dergleichen Operationen angestellt werden können, welche immer andere Formuln hervorbringen; und deswegen können unendlich viel Relationen zwischen den Buchstaben α, β, γ, δ angegeben werden, damit

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta + 8$$

in vier quadrata resolvirt werden könne. Da nun dies ohne einige Restriction wahr ist, so sehe ich nicht, was dergleichen Determinationen zur gesuchten Demonstration beytragen könnten. Ich habe rigorosissime bewiesen, dass wenn N ein numerus integer ist, allezeit seyn müsse

$$N = A^2 + B^2 + C^2 + D^2,$$

wo aber A, B, C, D sowohl numeros fractos als integros andeuten. Es wäre also nur noch übrig zu zeigen, dass wenn quatuor quadrata fracta eine summam integram haben, dieselbe Summ sich auch nothwendig in quatuor (vel pauciora) quadrata integra müsse zerlegen lassen. Ich kann nun wohl beweisen, dass wenn $\frac{pp}{qq} + \frac{rr}{ss} = N$ numero integro, auch seyn müsse $N = aa + bb$ in integris; allein jenen Beweis kann ich nicht auf gleiche Art bewerkstelligen.

Wenn $2ee - ff + 2$ ein Quadrat seyn soll, und dazu e gesucht wird, ohne darauf zu sehen, ob e ein numerus fractus oder integer wird, so habe ich diese solutionem generalem gefunden:

$$e = \frac{(mm - 2mn + 2nn)f + mm - 4mn + 2nn}{2nn - mm},$$

wo man für m und n numeros quoscunque annehmen kann.

Will man aber nur die valores integros für e haben, damit $2ee - ff + 2$ ein Quadrat werde, so dienen dazu folgende formulae in infinitum:

$$e = f \pm 1$$
$$e = 5f \pm 7$$
$$e = 29f \pm 41$$
$$e = 169f \pm 239$$
$$e = 985f \pm 1393$$
$$e = 5741f \pm 8119$$

etc.

Die lex progressionis ist diese, dass wenn zwey dergleichen formulae se immediate insequentes sind

$$e = Mf \pm m$$
$$e = Nf \pm n$$

die folgende seyn muss

$$e = (6N - M)f \pm (6n - m).$$

Inzwischen kann man doch alle diese Formuln durch eine einige Generalformul ausdrücken: Sit q numerus impar quicunque, dico fore

$$e = \frac{(\sqrt{2}+1)^q + (\sqrt{2}-1)^q}{2\sqrt{2}} f \pm \left(\frac{(\sqrt{2}+1)^q - (\sqrt{2}-1)^q}{2}\right)$$

und es ist auch gewiss, dass alle Fälle, in welchen e durch ganze Zahlen ausgedrückt werden kann, in diesen Formuln enthalten sind. Gleichergestalt, wenn

$$(bb \pm 1)\, ee \mp 4aaff \pm 4cc\,(bb \pm 1)$$

ein Quadrat seyn soll, so ist:

$$e = \frac{(\sqrt{(bb \pm 1)} + b)^q + (\sqrt{(bb \pm 1)} - b)^q}{\sqrt{(bb \pm 1)}} \cdot af \pm$$
$$\left((\sqrt{(bb \pm 1)} + b)^q - (\sqrt{(bb \pm 1)} - b)^q\right) c;$$

also in diesem Fall $3ee + ff - 3 =$ quadrato, wird

$$e = \frac{(\sqrt{3}+2)^q + (\sqrt{3}-2)^q}{2\sqrt{3}} f \pm \frac{((\sqrt{3}+2)^q - (\sqrt{3}-2)^q)}{2}.$$

Euler.

LETTRE CXLIII.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Même sujet. Question de syntaxe de la langue française.

St. Petersburg d. 9. Mai 1752.

Ew. Dissertation de summis divisorum, welche Sie an die hiesige Akad. der Wiss. übersandt haben, ist mir von dem Hrn. Prof. Grischow communicirет worden. Ich befinde mich jetzo nicht im Stande davon pro dignitate zu urtheilen, allein Dero bekannte Einsicht in dergleichen Sachen, lässet mich an der Richtigkeit alles dessen, was in bemeldter Dissertation enthalten ist, nicht zweifeln. Insonderheit habe ich mit Vergnügen gesehen, dass in den numeris 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, etc. eine so schöne Ordnung von Ew. bemerkt worden, und glaube gänzlich, dass es series gibt, aus deren mehr als hundert terminis consequentibus die lex progressionis, ob sie gleich an sich selbst kurz und leicht ist,

dennoch nicht zu ersehen seyn wird, als z. Ex. sit series

$$\overset{1}{\alpha \ldots 1}, \overset{2}{1}, \overset{3}{5}, \overset{4}{7}, \overset{5}{1}, \overset{6}{23}, \overset{7}{43}, \text{ etc.}$$

cujus progressio haec est, ut dato termino quocunque A et exponente termini n, fiat $A \pm \sqrt{(2.3^n - 2AA)} =$ termino proxime sequenti B, sumendo signum $+$ vel $-$, ita ut B non fiat divisibilis per 3, ex quo sequitur seriem α habere sororem

$$\beta \ldots \overset{1}{1}, \overset{2}{2}, \overset{3}{1}, \overset{4}{4}, \overset{5}{11}, \overset{6}{10}, \overset{7}{13}, \text{ etc.}$$

ita comparatam, ut duplum quadrati termini, cujus exponens est n in serie β, additum ad quadratum termini, cujus exponens est idem n in serie α, det 3^n, unde simul apparet legem progressionis seriei β esse $A \pm \sqrt{(3^n - 2AA)} = B$, sumendo $+$ vel $-$, ita ut B non fiat divisibilis per 3.

Sit ex. gr. $n = 4$, erit terminus huic exponenti respondens in serie α, 7, quadratum ejus 49, et duplum quadrati termini huic exponenti respondentis in serie β erit 2.4^2 ergo $7^2 + 2.4^2 = 3^4 = 81$.

Similiter quadratum termini, cujus exponens est 5 in serie α, est 1^2, duplum quadrati termini respondentis exponenti 5 in serie β, est $= 2.11^2$, ergo $1 + 2.11^2 = 3^5 = 243$ et ita porro. Hinc patet solutio problematis: Dividere numerum 3^{n+1} in tria quadrata, quorum nonnisi duo sint aequalia.

Ich habe auch observiret, dass $\square + \square + \square = \frac{\square + 2\square + 3\square}{6}$, oder dass in der Aequation

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{p^2 + 2q^2 + 3r^2}{6}$$

datis a, b, c, integris, die numeri p, q, r allezeit per integros exprimiret werden können.

Goldbach.

P. S. Dass ein jeder numerus $(2mm+1)^n$ in drey quadrata, quorum duo sunt aequalia, resolviret werden kann,

ist gar leicht auf folgende Art zu demonstriren: Sit

$$(2mm+1)^n = pp + 2mmqq,$$

erit

$$(2mm+1)^{n+1} = (p \pm 2mmq)^2 + 2mm(p \mp q)^2;$$

nun aber ist die propositio antecedens wahr in casu $n=1$ (denn es wird $p=q=1$), also ist auch die propositio consequens wahr, weil auf gleiche Art aus jedem casu der proxime sequens demonstriret werden kann.

(Feuillet annexé).

Der P. Bouhours saget an einem Orte: Comme ces messieurs m'ont reproché plusieurs fois que je lisois ce que je ne devrois point lire, je me suis attaché plus que jamais à la lecture du Nouveau Testament.

Hierüber hat ein gewisser Autor nachfolgende critique gemacht: „Je ne *devrois*“ est là une faute de temps, il falloit avoir mis: „qúe je lisois ce que je ne *devois* point lire,“ autrement il faudra supposer que cet auteur lit encore les livres qu'on lui a reproché de lire.

Ich möchte gern wissen, ob diese critique, die sehr subtile ist, von M. Achard oder von M. Formey vor richtig erkannt wird, im Fall Ew. Gelegenheit hätten sich darüber zu informiren.



LETTRE CXLIV.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Même sujet. Question de syntaxe de la lettre précédente. Intégrations et théorème de la géométrie des courbes.

Berlin d. 30. Mai 1752.

Die series

$$\overset{1}{1},\ \overset{2}{1},\ \overset{3}{5},\ \overset{4}{7},\ \overset{5}{1},\ \overset{6}{23},\ \overset{7}{43},\ \text{etc.},$$

von welcher Ew. diese schöne Eigenschaft angemerket, dass $B = A \pm \sqrt{(2.3^n - 2A^2)}$, ist dem ersten Anblick nach so irregulär, dass sie nach keinem gewissen Gesetz fortzugehen scheinet. Weil aber die bemerkte Eigenschaft Statt findet, die termini mögen affirmative genommen werden oder negative, so kann man denselben solche signa vorsetzen, dass eine sehr regelmässige series herauskomme, nehmlich:

$$-\overset{1}{1}+\overset{2}{1}+\overset{3}{5}+\overset{4}{7}-\overset{5}{1}-\overset{6}{23}-\overset{7}{43}-\overset{8}{17}+\overset{9}{215}\,\text{etc.}+\overset{n}{P}+\overset{n+1}{Q}+\overset{n+2}{R}$$

als welche recurrens ist von der Eigenschaft, dass $R = 2Q - 3P$.

Folglich ist kraft der Natur dieser serierum

$$P = \frac{-(1+\sqrt{-2})^n - (1-\sqrt{-2})^n}{2}$$

und

$$Q = \frac{-(1+\sqrt{-2})^{n+1} - (1-\sqrt{-2})^{n+1}}{2}.$$

folglich $2.3^n = Q^2 - 2PQ + 3P^2$ und also

$$Q = P + \sqrt{(2.3^n - 2P^2)}.$$

Eine gleiche Beschaffenheit hat es mit der andern serie sorore, welche mit den gehörigen signis diese Form bekommt

$$\overset{1}{+1} \overset{2}{+2} \overset{3}{+1} \overset{4}{-4} \overset{5}{-11} \overset{6}{-10} \overset{7}{+13} \text{ etc. } \overset{n}{p} \overset{n+1}{+q} \overset{n+2}{+r},$$

da auch $r = 2q - 3p$, und also

$$p = \frac{(1+\sqrt{-2})^n - (1-\sqrt{-2})^n}{2\sqrt{-2}} \text{ und } q = p + \sqrt{(3^n - 2pp)}.$$

Was aber die schöne Vewandtschaft dieser beyden serierum anlangt, so habe ich überhaupt gefunden, wenn man zwey solche series hat

$$\alpha \ldots . \overset{(0)}{1},\ \overset{(1)}{a},\ \overset{(2)}{aa-b},\ \overset{(3)}{a^3-3ab},\ \overset{(4)}{a^4-6aab+bb},$$

$$\ldots . \frac{(a+\sqrt{-b})^n \overset{(n)}{+} (a-\sqrt{-b})^n}{2} = X$$

$$\beta \ldots . \overset{(0)}{0},\ \overset{(1)}{1},\ \overset{(2)}{2a},\ \overset{(3)}{3aa-b},\ \overset{(4)}{4a^3-4ab},$$

$$\ldots . \frac{(a+\sqrt{-b})^n \overset{(n)}{-} (a-\sqrt{-b})^n}{2\sqrt{-b}} = Y$$

welche beyde recurrentes sind von der Natur, dass

$$C = 2aB - (aa+b)A,$$

wenn nehmlich A, B, C tres termini successivi sind, so ist immer $XX + bYY = (aa+b)^n$. Setzt man nun $a=1$, $b=2$, so kommen Ew. beyde series heraus.

Dero Anmerkung, dass allezeit

$$aa + bb + cc = \frac{pp+2qq+3rr}{6},$$

beruhet auf diesem Grund, dass $p = 2a + b - c$, $q = a - b + c$, und $r = b + c$. Dieselbe hat mir aber Anlass gegeben zu suchen, in welchen Fällen es möglich sey, dass

$$aa + bb + cc = fpp + gqq + hrr.$$

Zu diesem Ende setze ich

$$p = \alpha a + \beta b + \gamma c, \quad q = \delta a + \varepsilon b + \zeta c, \quad r = \eta a + \vartheta b + \iota c,$$

und da muss folgenden sechs Aequationen ein Genüge geleistet werden:

$$f\alpha\alpha + g\delta\delta + h\eta\eta = 1; \quad f\beta\beta + g\varepsilon\varepsilon + h\vartheta\vartheta = 1;$$
$$f\alpha\beta + g\delta\varepsilon + h\eta\vartheta = 0; \quad f\alpha\gamma + g\delta\zeta + h\eta\iota = 0;$$
$$f\gamma\gamma + g\zeta\zeta + h\iota\iota = 1;$$
$$f\beta\gamma + g\varepsilon\zeta + h\vartheta\iota = 0;$$

deren Resolution nicht wenig Mühe kostet. Ich habe dieselbe folgendergestalt herausgebracht: Für $\beta, \gamma, \varepsilon, \zeta$ kann man annehmen, was man will, und ausser denselben noch nach Belieben die Zahlen m und n, so wird

$$\alpha = \frac{n}{m}(\beta\varepsilon + \gamma\zeta); \quad \delta = -\frac{m}{n}; \quad \eta = mn(\gamma\varepsilon - \beta\zeta);$$

$$\vartheta = mm\gamma + nn\zeta(\beta\varepsilon + \gamma\zeta); \quad \iota = -mm\beta - nn\varepsilon(\beta\varepsilon + \gamma\zeta):$$

und ferner $f = \frac{mm}{mm(\beta\beta + \gamma\gamma) + nn(\beta\varepsilon + \gamma\zeta)^2}$; $g = \frac{nn}{mm + nn(\varepsilon\varepsilon + \zeta\zeta)}$ und $h = \frac{fg}{mmnn}$. Also ist $aa + bb + cc = \frac{3pp + 14qq + rr}{42}$ wenn

$$p = 3a + 2b - c$$
$$q = a - b + c$$
$$r = -a + 4b + 5c.$$

Dergleichen theoremata können also unendlich viel aus diesen Generalformuln herausgebracht werden.

Wegen der überschriebenen passage des P. Bouhours habe ich erstlich den Hrn. De Maupertuis als un des quarante de l'Académie française befraget, welcher, nachdem er dieselbe nebst der critique etlichemal überlesen, gesagt,

dass er ohne einiges Bedenken sich sowohl des *devrois* als des *devois* bedienen würde, und fügte hinzu: „il est plaisant qu'on a critiqué le Père Bonhours sur ce mot.“

M. Achard lässt Ew. wegen des in ihn gesetzten guten Zutrauens sein gehorsamstes Compliment vermelden, und nachdem er die Sache wohl erwogen, so vermeint er, dass *devrois* besser sey; doch will er das *devois* nicht verwerfen.

Ich habe darüber auch den Hrn. Beguelin, Hofmeister bey dem Prinz Friedrich von Preussen, welcher für ungemein stark in der französischen Sprache gehalten wird, befraget, und dieser approbirt die critique vollkommen.

M. de Maupertuis hatte wohl noch diesen Einfall, dass man untersuchen müsste, ob man auf Latein sagen soll „quos legere non debebam“ oder „non deberem“, und die Decision im Lateinischen, welche weder er noch ich zu geben uns getraueten, würde auch im Französischen gelten. Hieraus werden also Ew. selbst die Sache am besten decidiren.

Mir kommt des Hrn. Beguelin's Entscheidung deswegen am gründlichsten vor, weil er die Reguln der französischen Sprache mit allem Fleiss studirt hat, welche M. de Maupertuis und Achard nur ex usu wissen, und beyde sagen mir, dass sie oft der Sache einen andern tour geben müssen, weil sie in Zweifel stehen, ob gewisse Expressionen, die sie brauchen wollten, recht sind oder nicht.

Neulich bin ich auf curieuse Integrationen verfallen. Denn gleich wie von dieser Aequation $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$ das integrale ist $yy+xx=cc+2xy\sqrt{(1-cc)}$, also ist von dieser Aequation $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$ das integrale:

$$yy+xx=cc+2xy\sqrt{(1-c^4)}-ccxxyy.$$

Ferner ist von dieser Aequation $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^3)}}$ das integrale:

$$xx + yy + ccxxyy = 4c - 4cc(x+y) + 2xy - 2cxy(x+y).$$

Aus solchen Formuln habe ich folgendes theorema hergeleitet (Fig. 41):

> In quadrante elliptico ACB, si ad punctum quodvis M ducatur tangens VMT, alteri axi CB occurrens in T, eaque capiatur $TV = CA$, et ex V ipsi CB agatur parallela VN; itemque ex centro C in tangentem perpendiculum CP, dico fore differentiam arcuum BM et AN rectificabilem, scilicet $BM - AN = MP$.

Dieses Jahr habe ich wieder den auf den Saturnum gesetzten Preis, welcher doppelt war, nemlich von 5000 ₶, allein erhalten.

Euler.



LETTRE CXLV.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Développement ultérieur du théorème de géométrie précédent Opinion de Formey sur la question de syntaxe

Berlin d. 3. Juni 1752.

Seit dem vorigen Posttag hat mir auch M. Formey seine Meynung über die gemeldte Stelle des P. Bouhours zugeschickt, welche also Ew. nicht habe ermangeln wollen zuzustellen.

Die Eigenschaft der ellipsis, dass darin zwey arcus, deren differentia rectificabilis ist, können angegeben werden, scheinet um so viel mehr merkwürdig zu seyn, da bisher die arcus elliptici auf keinerley Art haben unter sich verglichen werden können. Seitdem habe ich aber angemerkt, dass wenn man das problema umgekehrt vorträgt und diejenige krumme Linie sucht, welcher die gedachte Eigenschaft zukommt, die Solution durch die gewöhnlichen Methoden gefunden werden kann.

Quaeratur scilicet (Fig. 41) curva AMB hujus indolis, ut ducta in quovis puncto M tangente TMV, axi CB in T occurrente, indeque sumta $TV = CA$, si ex V ad axem CA perpendicularis agatur VNq curvam in N secans, differentia arcuum BM et AN fiat rectificabilis, scilicet $= \frac{CQ.Cq}{b}$.

Solutio. Pro puncto M sit abscissa $CQ = x$, arcus $BM = s$; pro puncto autem N sit abscissa $Cq = X$ et arcus $BN = S$, et ob curvae continuitatem relatio inter X et S similis esse debet relationi inter x et s. Ponatur totus arcus $AMB = A$, erit arcus $AN = A - S$, ideoque oportet sit

$$BM - AN = s - A + S = \frac{xX}{b};$$

hincque differentiando $ds + dS = \frac{Xdx + xdX}{b}$. Deinde quia $TV = CA = a$ est tangens curvae in M, erit

$$ds : dx = TV : Cq = a : X, \text{ ergo } ds = \frac{adx}{X}.$$

Cum autem puncta M et N sint inter se permutabilia ob curvae continuitatem, erit pari modo $dS = \frac{adX}{x}$; sicque habebitur $ds + dS = \frac{adx}{X} + \frac{adX}{x}$. At invenimus $ds + dS = \frac{Xdx + xdX}{b}$, unde fit $\frac{adx}{X} + \frac{adX}{x} = \frac{Xdx + xdX}{b}$, seu $ab(xdx + XdX) = Xx(Xdx + xdX)$, quae aequatio integrata dat $ab(xx + XX) = XXxx \pm c^4$, ideoque

$$XX = \frac{abxx \mp c^4}{xx - ab} = \frac{\pm c^4 - abxx}{ab - xx} \text{ et } X = \sqrt{\frac{c^4 - abxx}{ab - xx}}.$$

Consequenter

$$ds = \frac{adx}{X} = \frac{adx\sqrt{(ab - xx)}}{\sqrt{(c^4 - abxx)}}.$$

Sit applicata $QM = y$, ob $dy = \sqrt{(ds^2 - dx^2)}$ erit

$$dy = \frac{dx\sqrt{(a^2b - aaxx - c^4 + abxx)}}{\sqrt{(c^4 - abxx)}}.$$

Cum nunc constans c pro lubitu accipi queat, dantur infinitae curvae problemati satisfacientes, inter quas erit curva algebraica, si $c^4 = a^3 b$, quo casu fit $dy = \frac{x\,dx \sqrt{(ab - aa)}}{\sqrt{ab(aa - xx)}}$, et integrando $y = \sqrt{\left(\frac{b-a}{b}\right)}(aa - xx)$, quae est aequatio pro ellipsi, existente $CA = a$ et $CB = a\sqrt{\frac{b-a}{b}}$; hincque $b = \frac{a^3}{aa - CB^2}$. Ita vicissim ellipsis proprietas ante memorata hinc colligitur. Scilicet sumta tangente $TMV = CA$, unde punctum N definitur, erit

$$BM - AN = \frac{CQ.Cq(CA^2 - CB^2)}{CA^3},$$

cujus expressionis valor reducitur ad portionem tangentis inter punctum M et perpendiculum ex C in eam dimissum interceptam.

Euler.

(Billet de Formey annexé à celle lettre).

La critique qui concerne le P. Bouhours ne paroît point fondée, et son expression est grammaticale, aussi bien que convenable à ce qu'il veut exprimer. *Je devois* n'aurait pas exprimé une simple convenance, mais une obligation étroite. Or ce n'est que par raison de convenance que le P. Bouhours auroit dû ne pas trop s'enfoncer dans la lecture des auteurs profanes. Et sa façon de parler suppose qu'il les lisoit bien encore, mais moins qu'auparavant. Dans le cas où il y auroit tout à fait renoncé, l'expression propre seroit: „ce que je n'aurois pas dû lire.“ Berlin ce 30 mai 1752.

Formey.

LETTRE CXLVI.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Réponse aux deux lettres précédentes. Formules de Maupertuis pour les lois du mouvement.

Sans date (juillet 1752?)

Ew. beyde mir sehr angenehme Schreiben vom 30. Mai und 3. Juni habe ich allhie d. 10. und 14. ejusd. wohl erhalten. Was die von Ew. angeführte series betrifft, deren progressiones ich durch gewisse formulas determiniret hatte, sehe ich mit Vergnügen, dass Sie selbigen auch die terminos generales bestimmt haben. Ich erinnere mich hiebey, dass ich schon ehemals mündlich gegen Ew. erwähnet, dass alle quantitates finitae, tam rationales quam quovis modo irrationales, durch die einige seriem $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ etc. exprimiret werden könnten, und die ganze Kunst nur darauf ankommen würde, wie die Abwechslungen der signorum $+$ et $-$ zu determiniren sind. Solchergestalt ist z. Ex.

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \text{etc.};$$

die signa + und — werden allhie so abgewechselt, dass in terminis, qui locis imparibus exstant, die signa alterniren, nehmlich

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \frac{1}{18} - \text{etc.}$$

in terminis vero, qui locis paribus exstant, eadem signa occurrunt, quibus dupla eorum affecta sunt; also hat der terminus $\frac{1}{8}$ das signum +, weil $\frac{1}{4}$ das signum + hat; $\frac{1}{12}$ hat das signum —, weil $\frac{1}{6}$ das signum — hat etc.

Was übrigens Ew. von den zwey seriebus, allwo

$$XX + bYY = (aa + b)^n,$$

imgleichen von

$$\square + \square + \square = f\square + g\square + h\square$$

melden, zeiget alles von der grossen Fertigkeit, welche Sie. für unzähligen Andern, erlanget haben, dergleichen calculos einzusehen und unendlich generaler zu machen.

Ich habe vorher nicht gewusst, auch vielleicht niemals daran gedacht, ob es möglich sey, den quadrantem ellipsis in aliquot partes aequales zu theilen. Aus demjenigen aber, was Ew. in Dero Schreiben anführen, lässt sich leicht schliessen 1. dass es zwar möglich, diesen quadrantem in zwey gleiche Theile zu theilen, wenn $PM = 0$ genommen wird, aber 2. schlechterdings unmöglich sey, den quadrantem in mehrere partes aliquotas zu theilen, ohne zugleich eine partem assignabilem hujus quadrantis zu rectificiren. Denn es sey nach Ew. Figur (Fig. 41) $AN = BE$ eine pars aliquota quaecumque totius quadrantis, so wird der arcus

$$EM = BM - BE = \text{rectae } PM.$$

Von den integralibus aequationis $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^n)}}$ möchte ich wissen, ob Ew. nur allein die casus $n=2$, $n=3$, $n=4$ entdecket, oder ob Sie deren noch mehr in potestate haben? Sonst ist mir zwar die integralis von $\frac{x^{-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \frac{my^{-1}dy}{\sqrt{(1-y^n)}}$ bekannt, ich mag aber dieselbe nicht hersetzen, weil ich besorge, sie möchte Ew. gar zu einfältig vorkommen. Hingegen gestehe ich gern, dass ich auch selbige jetzo nicht hätte finden können, wenn ich sie nicht schon längst in einem Buche annotirt hätte.

Zu dem abermal erhaltenen Preise aus Paris gratulire ich von Herzen. Die erste Nachricht davon bekam ich aus der französischen Zeitung, allein das eigentliche quantum des praemii war mir entfallen. Dafern Ew. ein Exemplar von der pièce an Hn. Prof. Grischow schicken möchten, werde mir selbiges auf einige Tage ausbitten.

Was endlich die über eine gewisse expression des P. Bouhours entstandene difficulté betrifft, habe ich grosse Ursach Ew. zu danken, dass Sie darüber die éclaircissemens von vier so berühmten Männern mir communiciren wollen, bedaure aber auch zugleich, dass Ihnen dadurch mehrere Mühe, als ich gedacht hatte, verursachet worden. Indessen halte ich gänzlich dafür, dass wenn die difficulté von denen Quarante selbst hätte decidiret werden sollen, die sentimens nicht weniger partagiret gewesen seyn würden, so dass man bey dieser Gelegenheit eben das sagen könnte, was der P. Bouhours in der Suite des remarques nouvelles gesaget hat: „J'ai consulté sur cette question de fort habiles gens, et j'ai été surpris de voir que leurs sentimens ne s'a c c o r d e n t point," worin er aber wiederum, nach der Meynung desselben Critici, einen Fehler begangen, indem er hätte sagen sollen:

„ne s'accordoient point". Und auf diese Weise sollte es fast das Ansehen gewinnen, dass die Quarante, welche in ihrer Observation über die Remarque 201 de Vaugelas gesagt haben: „On a décidé d'une voix qu'il faut dire"... vielmehr hätten sagen sollen: „qu'il falloit dire etc."

Von M. Achard, welchen unter den vier Gelehrten, deren Ew. Erwähnung gethan haben, nur allein persönlich kenne, bin ich ein alter admirateur. Ich habe denselben schon vor 27 Jahren mit ungemeinem Vergnügen gehöret, und erinnere mich noch eigentlich zweyer Predigten, deren eine von der médisance, die andere von der dritten Bitte im Vater-unser handelte.

Wenn Ew. mir die zwey oder drey kurze formulas, wodurch die leges motus von dem Herrn de Maupertuis exprimiret werden, und wie selbige von den formulis Leibnitianis unterschieden sind, communiciren oder auch nur melden wollten, ob sie den erstern gänzlich beypflichten, würden Sie mich obligiren; ich weiss wohl, dass diese formulae in einem gewissen tomo der Miscellaneorum befindlich sind, woselbst ich sie auch im Durchblättern gesehen; ich erinnere mich aber nicht mehr, von wem ich damals denselben tomum bekommen hatte.

Goldbach.

LETTRE CXLVII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Même sujet. Réponse a la précédente.

Berlin d. 5 August 1752.

Ich erinnere mich noch ganz wohl von Ew. gehört zu haben, dass alle mögliche Zahlen durch die seriem

$$1 \,.\, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \text{etc.}$$

ausgedrückt werden können, wofern nur statt der Puncte die gehörigen Zeichen $+$ oder $-$ gesetzt werden. Ew. hatten mir auch einige solche series eröffnet, und wo ich nicht irre, so befand sich darunter auch die letzt überschriebene

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.} =$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} \text{ etc.}$$

Da nun jene series $= \frac{\pi}{4}$, wenn π die peripheriam circuli,

dessen diameter $= 1$, andeutet, so ist

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} \text{ etc.}$$

und folglich

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \text{ etc.}$$

welche seriem ich auch in meiner Introductione in Analysin pag. 244 angebracht. Daselbst befinden sich noch viel andere series von dieser Art, als

$$\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \text{ etc.}$$

ubi binarius habet signum $-$, numeri primi formae $4n - 1$ signum $-$, et numeri primi formae $4n + 1$ signum $+$; numeris autem compositis id signum convenit, quod iis ratione multiplicationis ex primis competit, also $\frac{1}{60}$ ob $2 . 2 . 3 . 5$ hat das Zeichen $- . - . - . + = -$. Ferner ist

$$\pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \text{ etc.}$$

ubi binarius habet signum $+$, numeri primi formae $4n - 1$ signum $+$, et numeri primi formae $4n + 1$ signum $-$. Ferner ist

$$\frac{3\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} + \frac{1}{14} \text{ etc.}$$

ubi binarius habet signum $+$, numeri primi $4n - 1$ signum $+$, numeri primi $4n + 1$, excepto quinario, signum $-$. Alle dergleichen series folgen aus diesen beiden Formuln, wo die factores nach den numeris primis fortgehen:

$$\text{I. } \frac{\pi}{2} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13}) \text{ etc}}$$

$$\text{II. } \frac{\pi}{3} = \frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13}) \text{ etc.}}$$

als aus welchen unendlich viel andere hergeleitet werden können.

Als multiplicetur prima per $\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2$, erit

$$\pi = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\,\text{etc.}}$$

et resolutione in seriem facta

$$\pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11}\,\text{etc.}$$

ubi 2 habet signum $+$, numeri primi formae $4n-1$, excepto ternario, signum $-$, numeri primi $4n+1$ signum $+$.
Hernach, da $0 = \frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\,\text{etc.}}$, können auch unendlich viel series $= 0$ gemacht werden, als $0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$ etc. ubi omnes numeri primi habent signum $-$.

Noch mehr, als in meinem Briefe befindlich, können auch noch aus den daselbst gegebenen Formuln gefunden werden, als da $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\,\text{etc.}}$, ubi numeri primi $6n-1$ habent $+$, numeri primi $6n+1$ sign. $-$.
Multiplicetur per $\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$ erit

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\,\text{etc.}}$$

und also

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11}$$
$$+ \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14}\,\text{etc.}$$

ubi 2 habet $-$; 3, $+$; $6n-1$, $-$; et $6n+1$, $+$.

Vermittelst dieser Methode aber kann ich keine andere series von dieser Art herausbringen, als deren summae entweder $= 0$, oder a quadratura circuli pendent.

Von den integralibus aequationis $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^n)}}$ kann ich keine andere angehen, als die Fälle $n=2$, $n=3$, $n=4$ und $n=6$. Wenn ich diesen letzten Fall Ew. zu berichten vergessen habe, so ist von dieser aequatione differentiali $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^6)}}$ die aequatio integralis

$$x^4 + y^4 - 4cx^4y^4 + 4ccxxyy(xx+yy) - 2xxyy + 2c(xx+yy) + cc = 0,$$

wo c die constantem andeutet, so durch die Integration dazugekommen, und nach Belieben angenommen werden kann, so dass dieses integrale completum ist.

Die Integration dieser Aequation $\frac{x^{-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \frac{my^{-1}dy}{\sqrt{(1-y^p)}}$ fällt auch nicht sogleich in die Augen, wie Ew. scheinen zu sagen; allein, da ein jedes Glied für sich integrabel ist per logarithmos, so kann davon eine aequatio integralis algebraica gegeben werden, welcher Umstand sich bey obigen Formuln nicht befindet, da weder $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}$, noch $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$, noch $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}}$ ullo modo sive per circulum, sive logarithmos integrirt werden kann; dahero um so viel merkwürdiger ist, dass doch für jene aequationes differentiales, aequationes integrales algebraicae angegeben werden können. Für Ew. Formuln aber, wenn ich setze $\sqrt{(1-x^n)} = v$, so wird $x^n = 1 - vv$ und $\frac{ndx}{x} = \frac{-2vdv}{1-vv}$, also $\frac{dx}{x\sqrt{(1-x^n)}} = -\frac{2}{n}\cdot\frac{dv}{1-vv}$, und integrando

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{(1-x^n)}} = -\frac{1}{n}\,l\,\frac{1+v}{1-v} = -\frac{1}{n}\,l\,\frac{1+\sqrt{(1-x^n)}}{1-\sqrt{(1-x^n)}}.$$

Ebenfalls ist

$$\int\frac{dy}{y\sqrt{(1-y^p)}} = \frac{-1}{p}\,l\cdot\frac{1+\sqrt{(1-y^p)}}{1-\sqrt{(1-y^p)}} + \text{Const.}$$

folglich

$$\frac{1+\sqrt{(1-x^n)}}{1-\sqrt{(1-x^n)}} = C\left(\frac{1+\sqrt{(1-y^p)}}{1-\sqrt{(1-y^p)}}\right)^{\frac{mn}{p}},$$

welches die integratio completa ist von dieser aequatione differentiali $\frac{x^{-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \frac{my^{-1}dy}{\sqrt{(1-y^p)}}$.

Es ist noch sehr zweifelhaft, ob ich von meiner pièce über den Saturnum aus Paris exemplaria bekommen werde: denn bisher habe ich keine erhalten, und es ist so schwer dergleichen Sachen von Paris zu bekommen, dass auch ein Buch, so M. Bouguer mir zum Präsent geschickt, unter Wegs verloren gegangen. Sollte ich aber bekommen können, so werde nicht ermangeln damit Ew. aufzuwarten.

Als ich letztens bey M. de Maupertuis speisete, so habe ich die von Ew. angeführten Passagen auf die Bahn gebracht. Die Meinung fiel dahin aus, dass grammaticaliter sowohl das Praesens als Imperfectum recht sey, allein der Sinn sey unterschieden. Also sey es recht: „On a décidé d'une voix qu'il faut dire . . .“ weil man nicht nur so hätte sagen sollen, sondern auch immer so sagen soll. Stünde aber „qu'il falloit dire“, so würde solches nicht mehr anzeigen, als dass man bey dem vorgelegten Fall allein so hätte reden sollen, und würde also nicht als ein beständiges Gesetz angesehen werden können.

Was Ew. wegen der von M. de Maupertuis gegebenen Formuln über die leges motus zu fragen belieben, wird ohne Zweifel diejenigen antreffen, wodurch er die regulas communicationis motus in conflictu corporum tam elasticorum quam non elasticorum bestimmt; weil dieselben mit den schon längst bekannten vollkommen einerley sind, so kommen sie auch mit den Leibnizianis uherein. Was aber das principium selbst anlanget, woraus der H. v. Maupertuis diese regulas hergeleitet, solches ist allerdings vollkommen

neu. Denn ungeachtet man schon vorlängst behauptet, dass die Natur via facillima würke, so hat doch weder Leibniz noch Jemand anders gezeigt, welches eigentlich diejenige Quantität sey, welche in den operationibus naturae ein minimum ist. M. de Maupertuis nennet diese Quantität die quantitatem actionis, und bestimmt dieselbe durch das Product aus der massa, der Geschwindigkeit und dem spatio, und leitet daraus nicht nur die regulas motus, sondern andere Sachen gar schön her. Ich hatte auch schon längst gewiesen, dass in motibus corporum coelestium immer die Formul $\int Mvds$ ein minimum sey, wo M die massam, v die celeritatem und ds das spatiolum percursum andeutet. Also ist $Mvds$ die quantitas actionis elementaris und $\int Mvds$ die totalis, welche folglich nach M. de Maupertuis ein minimum seyn muss.

Euler.

LETTRE CXLVIII.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Mêmes sujets. Winsheim et le P. Mersenne sur les nombres parfaits

St. Petersburg d. 7. October 1752

Meine Demonstration, dass $\frac{2}{1} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \text{etc.} =$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \text{etc.}$$

ist ein casus particularis von dieser propositione generali

$$A \cdots \frac{1}{a} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{4a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{2b} - \frac{1}{d} + \frac{1}{8a} + \frac{1}{e} + \text{etc.} =$$

$$B \cdots \frac{2}{a} - \frac{2}{b} + \frac{2}{c} - \frac{2}{d} + \frac{2}{e} - \text{etc.}$$

sunt enim seriei A termini impares $= \frac{B}{2}$, et ejusdem seriei A termini pares et termini impares simul sumti nempe $\frac{B+A}{2} = A$, ergo $A = B$. Es sind zwar allhie in der serie

B die signa + et — alternantia angenommen worden, es können aber auch, wenn nur die summa ipsius *B* finita ist, alle termini affirmativi oder quaecunque lege variantes angenommen werden; wenn man also die Condition, dass in der serie *A* die termini continuo decresciren sollen (non attenta variatione signorum + et —) bey Seite setzet, so kann eine jede series *B* in *A* verwandelt werden; hingegen sehe ich nicht, wie eine einzige von denen, welche Ew. gefunden haben, hieraus deduciret werden könne; dass aber alle solche series entweder $= 0$ sind, oder von der quadratura circuli dependiren, halte ich vor eine merkwürdige Observation.

Was Ew. von den casibus integrabilibus aequationis

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^n)}}$$

melden, wird ohne Zweifel nur von denen zu verstehen seyn, wo n ein numerus integer ist, denn dass jede aequatio

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{\frac{1}{m+1}})}} = \frac{a\,dy}{\sqrt{(1-y^{\frac{1}{m+1}})}},$$

posito m numero integro affirmativo, integrabilis sey, scheinet mir ganz gewiss zu seyn. In denen von Ew. angegebenen casibus aber, wo $n=2$, vel 3, vel 4, vel 6, finde ich, dass zwar die valores von y etwas verworren aussehen, wenn man die constantem generatim durch c exprimiret, weil sich alsdann allezeit quantitates irrationales mit einmischen; setzet man aber $c = -1$, so wird

pro casu $n=2$, $yy = 1 - xx$; pro casu $n=3$, $yy = \frac{(xx+x-2)^2}{(1-x)^4}$

$n=4$, $yy = \frac{1-xx}{1+xx}$; $\qquad n=6$, $yy = \frac{-2x^4+xx+1}{(1+2xx)^2}$

woraus man siehet, dass alle diese casus in der formula

$$\frac{ax^4+bx^3+cxx+ex+f}{1+px+qxx+rx^3+sx^4}$$

begriffen sind; so dass, wenn Jemand noch mehrere casus suchen wollte, derselbe sehr wohl thun würde, wenn er gleich anfangs die constantem $c=-1$ setzete.

Hiebey liegt ein Zettel von Dero eignen Hand, worauf Sie schon vor vielen Jahren aus der aequatione $xx+yy-1=0$, diese $xx-1=2cy+cc$ deducirct; ich zweifle aber, ob $xdx+ydy=dy\sqrt{(xx+yy-1)}$ gesetzt werden könne, wenn gleich beydes ex hypothesi $=0$ ist; denn sonst würde auch folgen, dass positis X et Y pro functionibus quibuscunque ipsarum x et y, $xdx+ydy=XYdy\sqrt{(xx+yy-1)}$ seyn könnte.

Als ich vor wenigen Tagen einige tomos Commentariorum tam antiquorum quam novorum von der Akad. der Wiss. zum Präsent bekam, hat sich mir, sobald ich den tomum II der letztern eröffnet, des Hrn. Winsheim's Dissertatio de numeris perfectis praesentiret, woselbst er p. 77 die von Ew. angegebenen numeros perfectos, absonderlich aber den neunten, cum salutari clausula „donec contrarium fuerit probatum" annimmt; ich zweifle aber, ob Ew. das schöne excerptum, so er aus dem Mersenno anführet, schon gelesen haben, welches meines Erachtens sehr lesenswürdig ist. Ob die cogitata Mersenni oder des Lenneschlos paradoxa eher bekannt gemacht worden, ist mir zwar unbekannt, ich sehe aber, dass sie beyde sich in Betrachtung der noch rückständigen 10 oder 11 numerorum perfectorum, einer gleich lautenden Expression bedienet. „Qui undecim alios invenerit — sagt Mersennus — noverit se ana-

lysim omnem, quae fuerit hactenus, superasse", er hält aber doch die Erfindung derselben nicht unmöglich; und Leuneschlos sagt paradoxo 46 et 47: „Vastissima et infinita numerorum multitudo capit duntaxat decem numeros perfectos; qui decem alios invenerit, noverit se analysin omnem, quae fuerit hactenus, superasse", welcher Zusatz aber überflüssig ist, wenn, nach des autoris Vorgeben, nur 10 numeri perfecti in rerum natura sind.

Goldbach.

LETTRE CXLIX.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Recherches sur les nombres premiers. Réponse à la précédente.

Berlin d. 28. October 1752.

Ew. Methode eine jede seriem $\frac{2}{a} - \frac{2}{b} + \frac{2}{c} - \frac{2}{d} +$ etc. in eine andere, als $\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{4a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{2b}$ etc. zu verwandeln, erinnere ich mich noch sehr wohl, und es können allerdings durch Hülfe derselben solche Verwandelungen gefunden werden, die sich aus der von mir gebrauchten Methode, als welche nur auf eine gewisse Art von Zahlen eingeschränkt ist, nicht herleiten. Hingegen gibt auch meine Methode solche series, welche mit jener keine Gemeinschaft haben. Da meine Methode nur eine gewisse Art von Variation in den signis in sich schliesst, so folgt daher, dass die

Summ aller daraus entspringenden serierum entweder 0 ist, oder a circuli quadratura dependirt. Wenn ich aber im Stande wäre andere variationes signorum anzubringen, so zweifle ich nicht, dass nicht quaelibet quantitas pro summa herausgebracht werden könnte.

Da die numeri primi in Ansehung ihrer gedoppelten Form von $4n+1$ und $4n-1$, so sehr von einander verschieden sind, und die Menge von beyden Gattungen infinita ist, so habe ich die summam folgender serici proxime untersucht

$$A = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} - \frac{1}{29} + \frac{1}{31} - \frac{1}{37} - \frac{1}{41} + \frac{1}{43} + \frac{1}{47} \text{ etc.}$$

wo die numeri primi formae $4n-1$ das signum $+$, die formae $4n+1$ aber das signum $-$ haben, in der Hoffnung, ob etwa die summa nicht rational seyn möchte. Ich fand aber diese summam $= 0{,}334980$ und also etwas grösser als $\frac{1}{3}$. Wäre accurat $\frac{1}{3}$ herausgekommen, so hätte die Sach allerdings Nachdenken verdient.

Da die Anzahl aller numerorum primorum unendlich ist, aber doch ein infinitum infimi ordinis, weil ich gezeigt, dass wenn die Zahl omnium numerorum $= n$, die Anzahl der numerorum primorum seyn werde $= ln$, es ist aber ln kleiner als $n^{\frac{1}{m}}$, so gross auch immer die Zahl m seyn mag: so wäre die Frage, ob auch die Anzahl der numerorum primorum, so z. Ex. in dieser Formul $aa+1$ enthalten sind, auch unendlich sey, weil dieselbe gewiss unendlich mal kleiner ist, als die Anzahl aller numerorum primorum. Hernach, wenn auch diese unendlich wäre, könnte man

eben dieses fragen de numeris primis hujus formae a^4+1 oder a^8+1 etc. Ich habe die numeros primos in hac forma $aa+1$ contentos untersucht und gefunden, dass $aa+1$ ein numerus primus wird in Folgenden Fällen: $a=$

1. 2. 4. 6. 10. 14. 16. 20. 24. 26. 36. 40. 54. 56. 66. 74. 84. 90. 94.

110. 116. 120. 124. 126. 130. 134. 146. 150. 156. 160. 170. 176. 180. 184.

204. 206. 210. 224. 230. 236. 240. 250. 256. 260. 264. 270. 280. 284. 300.

306. 314. 326. 340. 350. 384. 386. 396. 400.

406. 420. 430. 436. 440. 444. 464. 466. 470. 474. 490. 496.

536. 544. 556. 570. 576. 584. 594.

634. 636. 644. 646. 654. 674. 680. 686. 690. 696. 700.

704. 714. 716. 740. 750. 760. 764. 780. 784.

816. 826. 844. 860. 864. 890.

906. 910. 920. 930. 936. 946. 950. 960. 966. 986.

1004. 1010. 1036. 1054. 1060. 1066. 1070. 1094. 1096.

1106. 1124. 1140. 1144. 1146. 1150. 1156. 1174. 1176. 1184.

1210. 1234. 1244. 1246. 1274. 1276. 1290. 1294.

1306. 1314. 1316. 1320. 1324. 1340. 1350. 1354. 1366. 1374. 1376. 1394.

1406. 1410. 1416. 1420. 1430. 1434. 1440. 1456. 1460. 1494.

Bis 1500 habe ich dieses Examen getrieben, und hierdurch bin ich im Stande viel numeros primos anzuzeigen, welche nicht nur grösser sind als 100000, als so weit die tabulae numerorum primorum gehen, sondern auch als 1000000. Sonsten würde es gewiss sehr schwer seyn einen numerum primum > 1000000 anzugeben.

Soll aber $a^4 + 1$ ein numerus primus seyn, so werden die valores von a seyn folgende wenige

$$a = 1.\ 2.\ 4.\ 6.\ 16.\ 20.\ 24.\ 34.$$

Doch bin ich noch weit entfernt des Fermatii problema zu solviren: invenire numerum primum, dato quovis numero majorem. Sollte man eine seriem regularem finden können, deren alle termini in jenen valoribus von a enthalten wären, so wäre das problema solvirt. Jedoch gibt es gewiss keine series algebraica, deren omnes termini numeri primi seyn können. Denn es sey X der terminus indici x respondens, und daher A der terminus indici dato a respondens, so wird, wenn man nimmt $x = nA + a$, der terminus X divisibilis per A und also nicht primus.

Meine integratio aequationis $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx^n)}} = \frac{dy}{\sqrt{(a+by^n)}}$ setzet nicht nur zum voraus, dass n ein numerus integer ist, sondern ich kann auch nur die integralia angeben in diesen Fällen: $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ und $n = 6$. Wenn $n = 5$, so habe ich bisher das integrale nicht finden können. Wenn aber $n = \frac{1}{m+1}$, so wären die formulae allerdings absolute integrabiles, dahero dieselben nichts sonderbares geben würden. Denn dieses kam mir fürnehmlich merkwürdig vor, dass, da die Formuln in den Fällen $n = 3$, oder $n = 4$, oder $n = 6$ auf keinerley Art weder ad circuli noch hyperbolae quadraturam gebracht werden können, doch die Aequation selbst algebraice und das generaliter integrirt werden kann.

Beygelegten Zettel erinnere ich mich noch bey Ew. geschrieben zu haben, um zu zeigen, dass man nicht allezeit per integrationem alle casus findet, quibus aequationi diffe-

rentiali satisfit, wovon ich in meiner Mechanic einige wichtige casus angemerket hatte. Ich kann den Fall noch simpler machen und diese aequationem differentialem $adx = (a-x)dy$ vorlegen, welcher augenscheinlich ein Genügen geschiehet, wenn $x = a$, welcher Fall doch durch die Integration nicht herausgebracht wird. Also wenn ich habe $\frac{Pdz}{Z} = dy$, oder $Pdz = Zdy$, existente Z functione ipsius z, et P quantitate ex y et z utcunque composita, so satisfacirt $Z = 0$, denn daher wird $z =$ certae constanti und also $dz = 0$. Setzt man nun für z eine formulam magis compositam, als $xx + yy - aa$, so bekommt man aus $Z = 0$ solche casus integrales, welche durch die Integration nimmer herausgebracht werden. Also wenn $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{(xx + yy - aa)}} = Vdy$, existente V functione quacunque ipsarum x et y, so satisfacirt gewiss $xx + yy - aa = 0$.

Den tomum II Nov. Comment. habe ich noch nicht bekommen. Ob $2^{30}(2^{31} - 1)$ wirklich ein numerus perfectus sey, oder nicht, kann ich freylich nicht behaupten, weil ich nicht weiss ob $2^{31} - 1$ ein numerus primus ist, oder nicht. Dass es aber nicht unendlich viel numeros perfectos geben sollte, kann ich nicht einsehen. Weil aber um dieselben zu finden, erforderlich wird, dass man alle casus, quibus formula $2^n - 1$ fit numerus primus, anzeigen könne, so sehe ich nicht ab, wie man mehr als sieben, nehmlich: $2^1(2^2-1)$, $2^2(2^3-1)$, $2^4(2^5-1)$, $2^6(2^7-1)$, $2^{12}(2^{13}-1)$, $2^{16}(2^{17}-1)$, $2^{18}(2^{19}-1)$, und also nicht einmal acht, oder gar zehn angeben kann. So viel ist gewiss, dass wenn $2^n - 1$ ein numerus primus seyn soll, auch n ein numerus primus seyn muss. Allein es gibt viel numeros primos, die fur n ge-

setzt, $2^n - 1$ nicht primum machen, als $n = 11$, $n = 23$, $n = 29$, $n = 37$, etc. Was also Mersennus oder Leunenschloss sagt, als wenn die Anzahl der numerorum perfectorum endlich wäre, halte ich für ungegründet, ungeacht ich nicht glaube, dass mehr als sieben, praeter unitatem mit Gewissheit angezeigt werden können. Des Leunenschloss Tractat erinnere ich mich bey Ew. gesehen zu haben; ich kann aber von diesem auctore in keinem Lexico die geringste Nachricht finden, dahero ich Ew. um einige Umstände seines Tractats und wo möglich seiner selbst gehorsamst ersuchet haben wollte.

Euler.

LETTRE CL.

═

Goldbach à Euler.

Sommaire. Mêmes sujets.

St. Petersburg d. 18. Novbr. 1752.

Durch was für compendia Ew. die differentiam serierum

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{19}+\text{etc. et }\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\text{etc.}$$

erhalten haben, ist mir zwar nicht bekannt. Sollten Sie aber die Methode schon herausgegeben haben, so bitte mir den Ort, wo selbige zu finden ist, anzuzeigen.

Dass der numerus numerorum primorum omnium hujus formae $aa+1$ infinite magnus sey, halte ich für gewiss, ohngeachtet ich es nicht alsofort demonstriren kann, und finde ich die rationem dubitandi, dass die Anzahl numerorum primorum hujus formae $aa+1$ unendliche Mal kleiner ist, als die Anzahl numerorum primorum omnium, gar nicht erheblich, indem kein numerus infinitus so klein genommen werden kann, dass er nicht infinities major alio infinito sey.

Mersennus hat um so viel weniger gesagt, dass nur zehn numeri perfecti möglich sind, weil er deren eilf selbst angiebt, darunter aber der octavus von Ew. nicht begriffen ist; er sagt auch nicht, dass die Anzahl der numerorum perfectorum endlich sey, wohl aber, dass kein so grosses intervallum numerorum anzugeben möglich sey, welches nicht *absque* numeris perfectis seyn könne, wie solches Ew. aus der von dem Hrn. Winsheim allegirten praefatione gener. ad Mersenni cogitata physico-mathematica § 19, wenn der tom. II Commentariorum noch nicht angekommen ist, allenfalls selbst werden ersehen können.

Was des Leuneschlos paradoxa mathematica betrifft, so sind selbige zu Heidelberg A. 1658, 8°. gedruckt, ich habe aber dieses Buch selbst niemals gehabt, sondern ich hatte das Exemplar, welches ich A. 1716 gelesen, von der altstädtischen Bibliothec in Königsberg genommen, welches derselben auch noch vor meiner letzten Abreise A. 1718 restituiret worden, dahero es unmöglich ist, dass Ew. selbiges Buch in Petersburg bey mir gesehen haben sollten; hingegen erinnere ich mich, jedoch nicht mit völliger Gewissheit, dass Sie mir vor einigen Jahren aus Berlin geschrieben, Sie hätten sich selbiges nebst des Bungi Buch aus der Königl. Bibliothec geben lassen*). Von diesem Leuneschlos ist mir weiter nichts bekannt, als dass ich irgendwo gelesen, er habe in Heidelberg als Professor gestanden; er wird auch von einigen, ni fallor, Luneschlos genennt, und wäre also dessen Name auf beyde Art in den Lexicis zu suchen. Es scheinet, dass er sein paradoxum de numeris perfectis in dem Mersenno gefunden und nachgehends, da er

*) V. les lettres 34ème et suiv. page 104 et suiv.

es memoriter hingeschrieben, von dem wahren Sinn des Mersenni abgegangen ist.

Dass keine formula algebraica lauter numeros primos geben könne, hatte ich schon in einem meiner vorigen Briefe angemerket; denn es sey z. Ex. die formula

$$x^3 + bxx + cx + e,$$

so ist offenbar, dass so oft x ein multiplus des termini absoluti e ist, so oft auch (und folglich infinitis modis) die formula einen numerum non primum geben wird, sollte aber $e = 1$ seyn, so setze ich nur $x + p$ anstatt x, alsdann wird die formula transmutiret in

$$\begin{aligned} x^3 + 3pxx &+ 3ppx + p^3 \\ + \; bxx &+ 2bpx + bpp \\ &+ \quad cx + cp \\ &\qquad\quad + 1 \end{aligned}$$

und so oft x ein multiplus numeri $p^3 + bpp + cp + 1$ ist, so oft gibt die formula einen numerum non primum. Da nun dieser casus, wo die potestas maxima ipsius $x = 3$ ist, auf alle andere *lusus naturae*, quaecunque fuerit potestas ipsius x, appliciret werden kann, so ist es unmöglich eine seriem algebraicam anzugeben, in welcher nicht infiniti termini aus numeris non primis bestehen sollten.

Noch habe ein kleines ganz neues theorema beyzufügen, welches so lange vor wahr halte, donec probetur contrarium: Omnis numerus impar est = duplo quadrati + numero primo, sive $2n - 1 = 2aa + p$, ubi a denotet numerum integrum vel 0, p numerum primum, ex. gr. $17 = 2.0^2 + 17$, $21 = 2.1^2 + 19$, $27 = 2.2^2 + 19$, etc.

Goldbach.

LETTRE CLI.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Suite des recherches numériques et autres relatives à la résolution des équations algébriques.

Berlin d. 16. December 1752.

Ich bin weit davon entfernt, dass ich die wahre Summ dieser seriei

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{23}-\frac{1}{29}\text{ etc.}$$

sollte anzeigen können. Ich habe diese Summ nur per approximationem gesucht, von deren Beschaffenheit ich mich nicht mehr erinnern kann. Meine Absicht war dabey nur, zu erforschen, ob etwan diese Summ simpel seyn möchte, weil ich schon vorher gemerket hatte, dass dieselbe beynahe $\frac{1}{3}$ ist.

Ew. theorema, quod omnis numerus impar $2n-1$ sit aggregatum ex quadrato duplicato $2aa$ et numero primo p,

hat bey mir alle Aufmerksamkeit verdienet, und nach angestellter Probe habe ich dasselbe für alle numeros $2n-1$ unter 1000 würklich wahr befunden. Kraft desselben kann man also behaupten, quod dato numero $2n-1$, semper detur duplum quadratum $2aa$, ut $2n-1-2aa$ evadat numerus primus.

Um die Demonstration davon zu finden, fiel mir ein, ob man etwan nicht beweisen könnte, dass je grösser die Zahl $2n-1$, je mehr numeri primi aus der Form $2n-1-2aa$ erwachsen müssten. Denn, da das theorema wahr ist für die kleinen Zahlen, so würde man um so viel sicherer auf die grossen Zahlen schliessen können. Ich habe demnach pro quovis numero non primo $2n-1$ bemerket, wie viel numeri primi daraus entstehen, allein ich habe befunden, dass, wenn auch $2n-1$ eine sehr grosse Zahl, doch bisweilen nur ein einziger numerus primus entspringt.

Also wenn $2n-1=785$, so wird $785-2aa$ unico casu numerus primus, nehmlich quo $a=18$. Eben dieses geschiehet auch, wenn $2n-1=1703=13.131$, und der casus ist $1703-2.21^2=821$; wenn also 821 kein numerus primus wäre, so fände hier das theorema nicht Statt. Ich habe auch hier noch viel andere und grössere Zahlen untersucht, von welchen ich vorhersahe, dass die daher entstehenden numeri primi sparsam seyn müssen; doch habe ich aber keine Ausnahme finden können. Ich glaube also dieses theorema, ungeacht ich nicht darauf schwören wollte.

Es fiel mir dabey ein ziemlich ähnliches theorema ein, nehmlich: dass a numero impari non primo $2n-1$ allzeit eine potestas binarii abgezogen werden könne, dass der Rest ein numerus primus sey. Nach angestellter Probe hat sich dieses auch noch bis auf sehr grosse Zahlen wahr befunden;

als ich aber auf $959 = 7.137$ kam, so fand sich eine Ausnahme, indem $959 - 2^a$ nullo modo primus werden kann.

Ich bin letztens auf folgende theoremata negativa gefallen.

I. Si n non est numerus formae $\square + 2\triangle$, tum $4n+1$ certe non est primus.

II. Si n non est numerus formae $\square + \triangle$, tum $8n+1$ certe non est primus.

III. Si n non est numerus formae $2\triangle + \triangle$, tum $8n+3$ certe non est primus.

Der Grund der zwey letztern beruhet darauf, dass wenn $8n+1$ oder $8n+3$ primus ist, so sey derselbe auch in hac forma $2\square + \square$ enthalten; als $3 = 2.1+1$, $11 = 2.1+9$, $17 = 2.4+9$, $19 = 2.9+1$. Dieses aber kann ich nicht beweisen, ungeacht ich es für eben so gewiss halte, als dass $4n+1 = \square + \square$, siquidem $4n+1$ sit primus, welches ich bewiesen habe.

Ew. bin ich für die mir gütigst ertheilten Nachrichten über den Lennenschloss gehorsamst verbunden. Ich habe mich geirrt, wenn ich geglaubt, das Buch selbst bey Ew. gesehen zu haben; es werden nur einige excerpta gewesen seyn, so Dieselben mir zu communiciren die Güte gehabt. Hier habe ich dieses Buch nicht finden können. Des Bungi Buch erinnere ich mich auch nicht gelesen zu haben; ich werde es aber auf der hiesigen Bibliothec aufsuchen. Den II tomum Novor. Comment. habe ich noch nicht bekommen, um darin nachsehen zu können, was der seel. Winsheim von den numeris perfectis geschrieben. Ich glaube, dass man keine andere numeros perfectos für gewiss angeben könne, als folgende: I. $2^0(2-1) = 1$; II. $2^1(2^2-1) = 6$; III. $2^2(2^3-1) = 28$; IV. $2^4(2^5-1)$; V. $2^6(2^7-1)$; VI. $2^{12}(2^{13}-1)$; VII. $2^{16}(2^{17}-1)$; VIII. $2^{18}(2^{19}-1)$.

weil man von den folgenden Formuln $2^p - 1$ (existente p primo) nicht gewiss seyn kann, ob dieselben primi sind, oder nicht. Der folgende wäre $2^{30}(2^{31}-1)$, wenn nur $2^{31}-1$ ein numerus primus wäre, welches aber weder behauptet noch untersuchet werden kann. So viel ist gewiss, dass diese Zahl $2^{31}-1$ keine andere divisores haben kann, als welche in dieser Formul $62n+1$ enthalten sind, woraus ich so viel gefunden, dass kein divisor unter 2000 Statt findet.

Aus Anlass der aequationum Moivreanarum habe ich noch viel ähnliche formulas gefunden, deren radix angegeben werden kann, ungeacht die Aequation keine divisores rationales hat.

Als von dieser Aequation $x^5 = 5\alpha xx + 5\beta x + \frac{\beta\beta}{\alpha} + \frac{\alpha^3}{\beta}$ ist radix $x = \sqrt[5]{\frac{\beta\beta}{\alpha}} + \sqrt[5]{\frac{\alpha^3}{\beta}}$. Also von dieser $x^5 = 10xx + 10x + 6$ ist radix $x = \sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{4}$. Ferner von dieser aequatione 6^{ti} gradus

$$x^6 = 6x^4 + 28x^3 + 18xx - 12x + 2$$

ist $x = \sqrt[6]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$. Diese casus scheinen um so viel mehr merkwürdig zu seyn, weil diese Aequationen nicht in factores (rationales) zergliedert werden können.

Hernach habe ich auch wahrgenommen, wenn eine solche Formul vorgegeben wird

$$x = A\sqrt[5]{s} + B\sqrt[5]{s^2} + C\sqrt[5]{s^3} + D\sqrt[5]{s^4},$$

welche von den signis radicalibus befreyt werden soll, solches geschehen könne, ohne dass man nöthig hat über die fünfte Potestät des x herauf zu steigen. Dieses scheint deswegen paradox zu seyn, da vier signa radicalia und das

surde solida vorhanden, welche durch eine einige Elevation ad 5[tam] dignitatem nicht gehoben werden können. Doch kommt nun diese aequatio rationalis 5[ti] gradus heraus:

$$x^5 = 5s(AD+BC)x^3 + \left.\begin{matrix} +5As(AC+BB) \\ +5Dss(CC+BD) \end{matrix}\right\} xx \left.\begin{matrix} +5A^3Bs \\ +5ss(AC^3+B^3D) \\ -5ss(A^2D^2+B^2C^2) \\ +5ABCDss \\ +5CD^3s^3 \end{matrix}\right\} x$$

$$\begin{matrix} +A^5s+B^5s^2+C^5s^3+D^5s^4 \\ -5ACss(A^2D+B^3) \\ +5ABss(ABD+AC^2) \\ -5BDs^3(C^3+AD^2) \\ +5CD^2s^3(B^2+AC) \end{matrix}$$

also ist auch hinwiederum die radix aus dieser Aequation $x = A\sqrt[5]{s} + B\sqrt[5]{s^2} + C\sqrt[5]{s^3} + D\sqrt[5]{s^4}$. Und da die obige Aequation general ist, so glaube ich, dass in dieser Form alle radices aequationum 5[ti] gradus enthalten sind, und in einem jeglich vorgelegten Fall kommt es nur auf die Bestimmung der Buchstaben A, B, C, D und s an, und zuletzt wird s nur per aequationem 4[ti] ordinis bestimmt werden, wie ich vermuthe. Daraus schliesse ich ferner, dass proposita aequatione quacunque
$x^n - \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} - \gamma x^{n-3} + \delta x^{n-4} - \varepsilon x^{n-5}$ etc. $= 0$
die radix allzeit diese Form haben werde

$$x = \frac{1}{n}\alpha + A\sqrt[n]{s} + B\sqrt[n]{s^2} + C\sqrt[n]{s^3} + D\sqrt[n]{s^4} + \text{etc.}$$

und es ist so viel gewiss, dass wenn $n=2$, oder 3, oder 4, die Bestimmung des Buchstabens s von einer aequatione 1[mi] oder 2[di] oder 3[tii] ordinis dependire, woraus zu schliessen, dass in genere s durch eine aequationem $(n-1)$[ti] ordinis bestimmt werde.

In meinen Papieren habe ich noch ein ander theorema, so Ew. mir vormals communicirt, gefunden. Nehmlich dass ein jeder numerus impariter par $4a+2$ allzeit gleich sey einer Summ von zwey numeris primis formae $4n+1$, als $6=1+5$, $10=5+5$, $14=1+13$, $18=1+17=5+13$, $22=5+17$, $26=13+13$, $30=1+29=13+17$, $34=5+29=17+17$, wobey ich bemerke, dass nicht nur bey kleinen Zahlen keine Ausnahme vorkommt, sondern bey grössern um so viel weniger eine zu vermuthen. Denn die Zahlen, bey welchen eine solche Zergliederung nur einmal angehet, sind 2, 6, 10, 14, 22, 26, 38, 50, 62, 86 und von hier bis 150 gibt es keine mehr, auch nicht bis 230, daher auch unter den folgenden um so viel weniger zu vermuthen, indem die Anzahl der Resolutionen immer zunimmt, als 210 lässt sich auf 9 Arten resolviren.

Euler.

LETTRE CLII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Réponse à la précédente.

Moscau d. 12. März 1753.

Dass sich das theorema: omnem numerum imparem resolvi posse in duplum quadrati et numerum primum, bis auf die Zahl 1000 wahr befunden, auch in grössern Zahlen sich annoch keine Ausnahme geäussert, ist mir sehr lieb; jedoch muss es bishero für eine blosse conjecture passiren und hat man Ursach zu zweifeln, ob die Demonstration davon, wenn sie ja possibilis wäre, jemals gefunden werden wird.

Weil Ew. melden, dass Sie, ob a numero impari *non primo* allezeit eine potestas binarii abgezogen werden könne, so dass ein numerus primus überbleibe? hatten versuchen wollen, so schliesse ich aus der Restriction *non primo*, dass Sie es von den numeris primis falsch befunden, und

möchte wohl wissen, bey welchem numero primo solches zu ersehen, denn ich habe schon vor einigen Jahren dergleichen Einfall von den numeris primis gehabt, selbigen aber nicht weiter, als bis 89 continuirt.

Dass alle numeri primi hujus formae $8n+1$ gleich seyn sollen $2\square+\square$, hatte ich vorher nicht beobachtet, bey näherer Betrachtung aber habe gefunden, si $4n+1$ est numerus primus, esse eum $= d\square+\square$, denotante d quemcunque divisorem numeri n, wodurch hoffentlich die pomoeria der theorematum de numeris primis in numeros quadratos resolvendis in etwas werden erweitert werden.

Dass Ew. sowohl des Bungi Tractat, als des Leuneschlos paradoxa sich schon A. 1741 in Berlin aus der bibliothèque geben lassen und gelesen haben, ist ganz gewiss, indem Sie mir solches selbst d. 9. Sept. ejus anni umständlich gemeldet.

Dero meditationes, um die radicem quintae potestatis zu finden, scheinen mir so gründlich und zulänglich, dass wenn selbige auf diese Weise nicht zu erhalten ist, ich sehr zweifle ob jemand in dieser découverte réussiren wird. Es kommt alles, wie Ew. bemerken, darauf an, ob sich die quantitas s per aequationem quartae potestatis determiniren lässet, zu welcher Untersuchung aber meines Erachtens eine ferrea patientia erfordert wird.

Ich erinnere mich zwar wohl, dass man noch keinen numerum parem angegeben, welcher nicht eine summa duorum primorum wäre, dass aber ein jeder numerus pariter impar ein aggregatum duorum primorum hujus formae $4n+1$ ist, war mir entfallen, und dass zwischen 86 und 230 keine casus unici vorkommen, halte ich allerdings für merkwürdig, da bis 86 sich deren schon zehn befinden. Hingegen kommen in dem theoremate $2n-1=2aa+p$ viele

casus unici vor, wovon einige numeri primi selbst nicht ausgeschlossen sind, also ist 17 unico modo $= 2aa + p$, wenn $a = 0$, imgleichen 127, wenn $a = 0$, und es scheinet fast, als wenn der numerus p, so zu einem casu unico gehöret, in keinem andern casu unico wieder vorkommt, ex. gr. $57 = 2.5^2 + 7$ ist ein casus unicus, weil in der formula $2aa + p$ vor p keine andere Zahl als 7 angenommen werden kann. Ob es aber ausser diesem noch andere casus unicos gibt, wo $2n - 1 = 2aa + 7$, lasse ich dahin gestellt seyn und möchte auch wohl keine weitere Untersuchung verdienen.

Ich habe in meinen annotatis gefunden, dass ich schon vor etwa 30 Jahren observiret, wie

$$An^2 - Bn^4 + Cn^6 - Dn^8 + \text{etc.} = n^{\sqrt{2}}$$

seyn könne, allwo A, B, C, etc. per series numerorum rationalium, quarum singularum summa plus quam finita est, exprimiret werden. Ich bin aber ungewiss, ob ich solches nicht etwa schon zu anderer Zeit Ew. gemeldet, oder ob es nicht gar in den Commentariis gedruckt worden.

Ich habe zwar zum öftern das Vergnügen gehabt aus den französischen Zeitungen zu ersehen, dass Ew. den Preis von der Parisischen Acad. des sc. erhalten; da ich aber nicht eigentlich weiss, wie viel Mal solches geschehen, so möchte gern davon benachrichtigt seyn.

Goldbach.



LETTRE CLIII.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Recherches ultérieures sur les nombres. Prix remportés par Euler à l'académie de Paris. Trouver un nombre qui appartienne à différentes séries de nombre polygonaux.

Berlin d. 3. April 1753.

Bei dem Einfall, ob etwan ab omni numero impari eine potestas binarii abgezogen werden könne, so dass ein numerus primus überbleibe, habe ich die Condition „a numero impari *non primo*" beygefügt, weil ich gleich befunden, dass solches bey dem numero primo 127 nicht angehet. Da nun solches auch bey dem numero non primo 959 nicht eintrifft, so fällt das ganze vermuthete theorema weg.

Wenn Ew. bey näherer Betrachtung befunden, dass wenn $4n+1$ ein numerus primus und d ein divisor quicunque ipsius n, auch allzeit sey $4n+1=daa+bb$, so bin ich sehr begierig zu vernehmen, ob Ew. diesen Satz demonstriren können, indem dadurch die pomoeria der theore-

matum de numeris primis in quadratos resolvendis allerdings ungemein würden erweitert werden. Ich habe auch eben diesen Satz schon längst bemerkt und bin von der Wahrheit desselben so überzeugt, als wenn ich davon eine Demonstration hätte. Also gleich wie $4.1m+1$ allzeit ist $=aa+bb$, welches ich demonstriren kann, so ist eben so gewiss $4.2m+1=2aa+bb$, $4.3m+1=3aa+bb$, $4.5m+1=5aa+bb$, etc. wovon mir aber die Demonstration noch fehlet. Doch ist hiebey ein besonderer Umstand wohl zu bemerken, dass bisweilen diese Resolution nicht in integris geschehen kann. Als, wenn gleich $4dm+1$ ein numerus primus ist, so gibt es Fälle, wo diese Zahl $4dm+1$ unmöglich in integris in die Form $daa+bb$ verwandelt werden kann. Dem ungeacht aber bleibt das theorema nicht weniger wahr, weil die Resolution allzeit in fractis Statt findet, welches um so viel mehr merkwürdig ist, da keine Zahl in fractis auf diese Formen $aa+bb$, $2aa+bb$, $3aa+bb$ und einige andere gebracht werden kann, wenn dieselbe nicht in integris darin enthalten. Dergleichen Fälle sind:

I. $4.22+1=89$ primus; folglich sollte 89 in dieser Form $11aa+bb$ enthalten seyn, welches aber in integris nicht angehet; doch ist in fractis $89=11(\frac{5}{2})^2+(\frac{9}{2})^2$ oder auch $=11(\frac{4}{3})^2+(\frac{25}{3})^2$.

II. $4.28+1=113$ primus; folglich sollte 113 in dieser Form $14aa+bb$ enthalten seyn, so in integris nicht möglich ist. In fractis aber ist $113=14(\frac{2}{3})^2+(\frac{31}{3})^2$.

III. $4.34+1=137$ primus; und doch nicht in integris $137=17aa+bb$; in fractis aber ist $137=17(\frac{4}{3})^2+(\frac{31}{3})^2$.

IV. $4.57+1=229$ primus; und doch nicht in integris $229=19aa+bb$; in fractis aber ist $229=19(\frac{5}{2})^2+(\frac{21}{2})^2$.

Bisher waren die Nenner nur 2 oder 3; es gibt aber auch Fälle, wo auch solche Brüche nicht Statt finden, sondern noch grössere Nenner zu Hülfe genommen werden müssen. Als $4.3.61+1=733$ primus; und ist doch nicht $733=61aa+bb$ in integris. Doch ist in fractionibus minimis $733=61(\frac{6}{5})^2+(\frac{127}{5})^2$. Demnach muss dieses theorema also ausgedruckt werden:

> Si $4n+1$ sit numerus primus, et d divisor ipsius n, tum iste numerus $4n+1$ certo in hac forma $daa+bb$ continetur, si non in integris, saltem in fractis,

und dieser Umstand wird auch insbesondere bey der Demonstration müssen in Betracht gezogen werden.

Da die Fälle, wo $2n-1=2a^2+p$ unico modo so sparsam vorkommen, so würde es freylich eine mühselige Arbeit seyn zu untersuchen, ob noch in einem andern unico modo $p=7$ seyn könnte, ausser $57=2.5^2+7$. Zum wenigsten habe ich bis 2500 keinen solchen gefunden. Wenn dieses behauptet werden könnte, so folgte daraus dieses theorema:

> Si $2aa+p$ unico modo est aggregatum ex duplo quadrato et numero primo, tum $2bb+p$ certo plus uno modo erit ejusmodi aggregatum, dum non sit $b=a$.

Ich konnte mich gar wohl erinnern, dass Ew. mir schon längst die Resolution von $n^{\sqrt{2}}$ communicirt, und weiss auch, dass ich solches unter meinen Papieren finden muss, allein es fället mir sehr schwer etwas daraus hervorzufinden, und ich konnte fast nicht mehr auf den Grund dieser Resolution kommen, bis mir ungefähr die Materie von der Interpolation wieder einfiel. Da nun proposita serie

$$\overset{0}{a},\ \overset{1}{b},\ \overset{2}{c},\ \overset{3}{d},\ \overset{4}{e},\ \text{etc.}$$

der terminus indici x respondens ist

$$(1-1)^x a+(1-1)^{x-1}xb+(1-1)^{x-2}.\frac{x(x-1)}{1.2}c+$$
$$(1-1)^{x-3}.\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}d+\text{etc.}$$

so ist der terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens $=$

$$a\sqrt{(1-1)}+\frac{b}{2\sqrt{(1-1)}}-\frac{1.1.c}{2.4(1-1)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1.1.3d}{2.4.6(1-1)^{\frac{5}{2}}}-\text{etc.}$$

Setzt man nun n^1, n^2, n^4, n^8, n^{16}, etc. für a, b, c, d, e, etc. so ist $n^{\sqrt{2}}$ der terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens, folglich

$$n^{\sqrt{2}}=n(1-1)^{\frac{1}{2}}+\frac{1.n^2}{2(1-1)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1.1.n^4}{2.4(1-1)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1.1.3n^8}{2.4.6(1-1)^{\frac{5}{2}}}-\text{etc.}$$

Setzt man nun, ob primum terminum

$$n(1-1)^{\frac{1}{2}}=0,\ n^{\sqrt{2}}=An^2-Bn^4+Cn^8-Dn^{16}+\text{etc.}$$

so wird

$$A=\frac{1}{2}(1-1)^{-\frac{1}{2}}=$$
$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}+\text{etc.}\right)$$
$$B=\frac{1.1}{2.4}(1-1)^{-\frac{3}{2}}=$$
$$\frac{1.1}{2.4}\left(1+\frac{3}{2}+\frac{3.5}{2.4}+\frac{3.5.7}{2.4.6}+\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}+\text{etc.}\right)$$
$$C=\frac{1.1.3}{2.4.6}(1-1)^{-\frac{5}{2}}=$$
$$\frac{1.1.3}{2.4.6}\left(1+\frac{5}{2}+\frac{5.7}{2.4}+\frac{5.7.9}{2.4.6}+\frac{5.7.9.11}{2.4.6.8}+\text{etc.}\right)$$

etc.

welches ohne Zweifel Ew. series numerorum rationalium sind, quarum singularum summa plus quam finita est.

Von dieser serie

$$An^2-Bn^4+Cn^8-Dn^{16}+\text{etc.}=n^{\sqrt{2}}.$$

verdienet angemerkt zu werden, dass

$$An^2(2-\sqrt{2})-Bn^4(4-\sqrt{2})+Cn^8(8-\sqrt{2})-Dn^{16}(16-\sqrt{2})$$
$$+En^{32}(32-\sqrt{2})-\text{etc.}=0,$$

was auch immer n für eine Zahl seyn mag.

Bey den obigen Betrachtungen ist mir auch folgendes problema beygefallen:

Invenire summam duorum quadratorum $xx+yy$, quae simul in hac forma $2aa+bb$ continеatur.

Solutio. Sumantur $x=pp-qq$ et $y=rr\pm 2pq$, eritque $xx+yy=(pp-qq)^2+(rr\pm 2pq)^2=(pp+qq)^2\pm 4pqrr+r^4=(pp+qq-rr)^2+2(p\pm q)^2rr$. Q. E. I.

Ew. haben die Güte sich zu erkundigen, wie viel Mal ich schon bey der Akademie zu Paris den Preis erhalten? Weil ich solches nicht aufgeschrieben und auch von meinen Pièçen keine Copien behalten, so kann ich weder die Jahre noch den Theil des Preises, so ich jedesmal bekommen, genau melden. Ich habe aber bey folgenden Fragen den Preis davongetragen: I. Sur la nature du feu. II. Sur le cabestan. III. Sur le flux et reflux de la mer. IV. Sur la théorie de l'aimant. V. Sur l'observation de l'heure du jour sur mer. VI. Sur les inégalités de Saturne. VII. Sur la même question.

Ich fand letztens, — weiss aber nich mehr, wo? — dieses problema: Invenire numerum, qui sit vel duplici, vel triplici, vel quadruplici modo, numerus polygonalis. Wollte man das problema so nehmen: invenire numerum qui simul sit trigonalis et tetragonalis, oder qui simul sit trigonalis et pentagonalis, etc. so liesse sich dasselbe wohl solviren. Kämen aber drey Bedingungen, als invenire numerum qui simul sit trigonalis, tetragonalis et pentagonalis, so wäre das problema vielleicht unmöglich. Bestimmt man aber den numerum laterum nicht, so ist es möglich, so viel Mal die Zahl auch ein numerus polygonalis seyn soll, und die Solution ist artig. Es sey z die gesuchte Zahl, x die radix,

und n die Anzahl der Seiten der Polygonalzahl, so wird

$$z = \frac{(n-2)xx - (n-4)x}{2},$$

hieraus wird

$$n = \frac{2z + 2xx - 4x}{xx - x} = 2 + \frac{2z - 2x}{xx - x} = 2 - \frac{2z}{x} + \frac{2(z-1)}{x-1}.$$

Also muss sich $2z$ durch x, und $2z-2$ durch $x-1$ theilen lassen; d. i. quaeruntur duo numeri binario differentes, qui habeant divisores unitate differentes (major majorem, minor minorem), und wenn dieses auf vielerley Art geschehen kann, so ist z auf eben so vielerley Art ein numerus polygonalis. Zum Exempel:

Numeri binario differentes.	Divisores unitate differentes.			
450	3.	5.	9.	15.
448	2.	4.	8.	14.

(Die divisores $\begin{Bmatrix}225\\224\end{Bmatrix}$ lasse ich weg, weil daraus numeri digonales entständen).

Also sey $2z = 450$ oder $z = 225$, so ist folgendergestalt

I. $n = 2 - \frac{450}{3} + \frac{448}{2} = 76$; II. $n = 2 - \frac{450}{5} + \frac{448}{4} = 24$;

III. $n = 2 - \frac{450}{9} + \frac{448}{8} = 8$; IV. $n = 2 - \frac{450}{15} + \frac{448}{14} = 4$;

Dahero ist 225 I. tetragonalis, II. octogonalis, III. 24-gonalis et IV. 76-gonalis.

Dergleichen Zahlen nun zu suchen, ist gewiss ein problema, wo es insonderheit auf die Natur der Zahlen ankommt, und welches zu schönen Speculationen Anlass geben kann. Euler.



LETTRE CLIV.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Développement ultérieur des recherches sur les propriétés des nombres.

Moscau d. 28. Juni 1755.

Eine rigorosam demonstrationem, dass $1+4ef=PP+4QQ$ habe ich zwar nicht gefunden, jedoch bin ich auf einige observationes affines gerathen, worinnen Ew. vielleicht finden werden *qu'il y a des vües*. Ich verstehe also in Folgendem durch p allezeit den numerum primum $1+4ef$ und $e>f$, imgleichen setze ich $aa+bb=p$. In einem gegebenen casu particulari wollte ich mich dieser Methode bedienen:

Zuvörderst suche ich numerum Q hujus naturae, ut

$$1+4ef+4fQQ=\square,$$

welches per substitutiones successivas $Q=1$, $Q=2$, etc. leicht zu seyn scheinet, indem viele numeri, ad hunc scopum non idonei, gleichsam bey dem ersten Anblick removiret

werden können, ex. gr. es wäre der gegebene numerus primus 89 und $f=2$, so siehet man alsofort, dass vor Q kein numerus desinens in 1 angenommen werden kann, weil sich das gesuchte quadratum auf 7 endigen würde, quod est absurdum; sobald nun ein solcher numerus congruus pro Q gefunden ist, setze ich die radicem quadrati inventi oder

$$\sqrt{(1+4ef+4fQQ)}=4fv+1,$$

wo v entweder affirmativa oder negativa zu nehmen ist, ut solutioni satisfiat, und alsdann findet sich

$$1+4ef=\frac{(e-v)^2+eQQ}{vv}.$$

Solchergestalt wird in denen von Ew. angeführten Zahlen in casu numeri 89, $Q=2$; numeri 113, $Q=1$; num. 137, $Q=2$; num. 229, $Q=5$; num. 733, $Q=3$. Hieraus folgt auch die doppelte Aequation

$$p=\frac{PP+eQQ}{vv}=\frac{(4fv+(P+v):e)^2-4fQQ}{(P+v)^2:ee}.$$

Ich bemerke ferner 1. dass weil die numeri a, b, e, f cogniti sind, es schon genug ist, wenn nur $p=\frac{RR\pm 2abe}{hh}$ Statt finden kann, so dass R und h rationales seyen, es mag $2ab$ ein numerus quadratus seyn oder nicht, denn es wird

$$Q=\frac{-(a+b)\pm R}{e+hh}=\frac{P-(a+b)}{h} \text{ und } p=aa+bb=PP+eQQ.$$

2. Habe ich beobachtet, dass wenn $1+4ef+4fQQ=\square$, der numerus Q entweder eines von beyden quadratis aa oder bb, oder doch einer von dererselben factoribus ist, als in 89, wo $a=8$, $b=5$, wird $Q=5$; in casu numeri $137=4^2+11^2$, wird $Q=2$, wiewohl ich von der allgemeinen Gewissheit dieser Observation noch nicht convinciret bin. Dagegen kann ich:

3. in summo rigore demonstriren, dass wenn α ein numerus hujus formae ist $\beta\beta + e\gamma\gamma$, alsdann auch

$$\alpha(e+xx)(e+yy)(e+zz) \text{ etc.} = PP + eQQ.$$

4. Dependiret die natura numerorum P et v in dieser aequatione $1+4ef = \frac{PP+eQQ}{vv}$ allerdings von dem numero e, denn es müssen PP et vv beyde so beschaffen seyn, dass sie, divisa per e, idem residuum hinterlassen, als z. Ex. in dem casu $89 = \frac{9^2+11.5^2}{2^2}$, allwo $e = 11$, $PP = 81$, $vv = 4$, folglich das residuum commune post divisionem per 11 est $= 4$. Hingegen müssen die residua quadratorum PP et QQ post divisionem per vv so beschaffen seyn, dass wenn das residuum respectu PP aequale α wird, das residuum respectu QQ aequale $\frac{uvv-\alpha}{e}$ werde, so dass u ein numerus integer sey; also wird in eodem exemplo

$$\alpha = 1, \quad \frac{uvv-\alpha}{e} = \frac{4u-1}{11} = 1$$

(weil 25 per 4 divisum, 1 zum residuo lässet) et $u =$ numero integro 3.

5. Will ich Ew. für die mir communicirte Solution des problematis: invenire duo quadrata quorum summa sit $PP+2QQ$, qualiscunque hostimenti loco die Solution des nachfolgenden problematis offeriren: invenire duo quadrata, quorum summa sit $PP+eQQ$, dato pro e numero quocunque. Sint n et e numeri quicunque, erunt

$$\left(\frac{4nn+e}{4n}\right)^2 + \frac{4ee}{(e-1)^2} = \left(\frac{4nn-e}{4n}\right)^2 + \frac{e(e+1)^2}{(e-1)^2}$$

vel

$$\left(\frac{4nn+e}{4n}\right)^2 + \frac{4eemm}{(e-mm)^2} = \left(\frac{4nn-e}{4n}\right)^2 + e\left(\frac{e+mm}{e-mm}\right)^2$$

positis pro e, m, n numeris quibusvis.

Meine Expression für $n^{\sqrt{2}}$ bestehet in Folgendem: Sit

$$a=1,\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{1.3}{2.4},\ d=\frac{1.3.5}{2.4.6},\ \text{etc.},$$

dico

$$n^{\sqrt{2}}=(a+b+c+d+\text{etc.})nn \quad -(b+2c+3d+4e+\text{etc.})n^4$$
$$+(c+3d+6e+10f+\text{etc.})n^8-(d+4e+10f+20g+\text{etc.})n^{16}$$
$$+(e+5f+15g+35h+\text{etc.})n^{32}-\text{etc.}$$

und differiret nicht von dieser

$$n^{\sqrt{2}}=nn-\frac{1}{2}(n^4-nn)+\frac{1.3}{2.4}(n^8-2n^4+nn)-$$
$$\frac{1.3.5}{2.4.6}(n^{16}-3n^8+3n^4-nn)+\text{etc.}$$

welche den terminum respondentem exponenti $\frac{1}{2}$ in serie $n^{2^1}+n^{2^2}+n^{2^3}+n^{2^4}+$ etc. exprimiret.

Goldbach.

LETTRE CLV.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Lettre d'un Officier de la flotte russienne. Lettre de Frédéric II. à Euler. Observations sur les problèmes et théorèmes de la lettre précédente. Théorème de Fermat.

Berlin d. 4. August 1753.

Die verlangten exemplaria von der Lettre d'un Officier de la flotte russienne sind schon vor einigen Posttagen von hier weggeschickt worden, und werden also verhoffentlich schon bey Ew. eingelaufen seyn. Gedachte Schrift ist mir auf ordre des Hn. Hettmanns Hochgräfl. Excellenz zugeschickt worden, um solche hier drucken zu lassen, wovon ich auch die deutsche Uebersetzung besorget. Inzwischen können Ew. versichert seyn, dass ich hievon mit keinem Wort nach St. Petersburg Meldung thun werde, als wohin ich mit Niemand mehr correspondire, als an den Hn. Rath Schumacher, an welchen auch niemals einige Neuigkeit überschreibe. Seit der Abwesenheit unseres Hn. Präsidenten sind

auch meine Geschäfte so angewachsen, dass ich wenig Briefe mehr beantworte, weil ich nicht nur die ganze Administration der Akademie auf dem Halse habe, sondern auch alle Posttage an den Präsidenten rapportire und über alles noch unmittelbar an S. Königl. Majestät Bericht abstatten muss.

Weil ich weiss, dass Ew. auf grosser Herren Briefe aufmerksam sind, so nehme die Freyheit ein Königl. Handschreiben zu communiciren, welches ich erhalten, als ich im Frühjahr einige Pfirsiche aus dem akademischen Garten an S. Königl. Majestät überschickt hatte:

„J'ai bien reçu votre lettre du 24 de ce mois avec les „présens qui l'accompagnoient. Quelque plaisir que la „beauté et la bonté des fruits que Vous M'avez en-„voyés M'ait causé, J'en ai encore ressenti davantage „de l'attention que vous avez bien voulu Me témoigner „par-là. Je vous en remercie et Je verrai avec satis-„faction les occasions pour vous en marquer Ma recon-„noissance. A Potsdam le 26 mai 1753".

Ew. Manier die Formul $1 + 4ef = P^2 + 4Q^2$ zu entwickeln scheinet allerdings weit mehreres in ihrem Umfang einzuschliessen, woraus vielleicht gar eine bündige Demonstration herzuleiten wäre. Ich getraue mir aber kaum, bey meinen gegenwärtigen Zerstreuungen, mich an diese Untersuchung zu wagen. Die Art, um die Zahl $1 + 4ef$ auf diese Form $\frac{SS + eQQ}{vv}$ zu bringen, in welchen Fällen nehmlich diese Auflösung in ganzen Zahlen nicht geschehen kann, scheint mir auch alle Aufmerksamkeit zu verdienen. Ich habe gesucht dieses etwas generaler zu bewerkstelligen auf folgende Art:

Es sey $1 + 4ef = \frac{SS + eQQ}{vv}$; weil nun daher

$$vv - SS = eQQ - 4efvv = e(QQ - 4fvv),$$

so sehe ich, dass $vv - SS$ durch e theilbar seyn muss. Es sey daher $S = ne - v$, so wird $2nev - nnee = e(QQ - 4fvv)$ oder $QQ - 4fvv + enn - 2nv = 0$ und mit $4f$ multiplicirt $16ffvv + 8nfv + nn = 4efnn + 4fQQ + nn$, woraus man erhält $n + 4fv = \sqrt{((1 + 4ef)nn + 4fQQ)}$. Die ganze Sach kommt also darauf an, dass man in einem jeglichen Fall, da die Zahlen e und f gegeben sind, solche Zahlen für n und Q suche, dass $(1 + 4ef)nn + 4fQQ$ ein Quadrat werde.

Will man sich mit Probiren behelfen, so wird es nicht schwer fallen in jeglichem Fall, wofern nur die Zahlen e und f nicht gar zu gross sind, n und Q zu finden; allein wenn e und f grosse Zahlen sind, so wird man mit dem Probiren schwerlich zurecht kommen. Eine sichere Methode aber scheint mir kaum möglich zu seyn, weil es Fälle gibt, da die Auflösung gar nicht einmal Statt findet, nehmlich wenn $1 + 4ef$ kein numerus primus ist, und ich sehe nicht ab, wie diese Bedingung in die Methode gebracht werden könnte.

Dass dergleichen problemata sehr schwer werden können, ist aus diesem zu ermessen, wenn eine ganze Zahl x gesucht wird, dass $nxx + 1$ ein Quadrat werde, wenn nehmlich n ein numerus integer positivus non quadratus ist. Wenn z. Ex. $61xx + 1$ ein Quadrat werden soll, so ist die kleinste ganze Zahl für x, wodurch dieses erhalten wird, $x = 226153980$. Wie sollte nun diese erstaunliche Zahl durch Probiren gefunden werden können.

Soll aber $109xx+1$ ein Quadrat werden, so ist die kleinste Zahl $x=15140424455100$ und die Wurzel des daher entstehenden Quadrats $\sqrt{(109xx+1)}=158070671986249$. Diese grossen Zahlen habe ich vermittelst einer gewissen Methode neulich in etlichen Minuten gefunden.

Wie unendlich viel summae duorum quadratorum $aa+bb$ gefunden werden können, welche zugleich in dieser Form $vv+ezz$ enthalten sind, habe ich aus Anlass der mir von Ew. gütigst communicirten gebrochenen Formuln, noch diese in ganzen Zahlen gefunden. Es ist nehmlich

$$(eqq-yy+rr)^2+4rryy=(eqq-yy-rr)^2+e.4qqrr.$$

Noch generaler kann ich auch solche Zahlen geben, welche zugleich in dieser Form $aa+mbb$ und dieser $vv+nzz$ enthalten sind; nehmlich es ist

$$(nyy-mxx+uu)^2+m.4uuxx=$$
$$(nyy-mxx-uu)^2+n.4uuyy.$$

Bey der schönen serie, welche Ew. für $n^{\sqrt{2}}$ gefunden, ist nur schad, dass dieselbe immer divergens wird, so oft n ein numerus >1 ist. Diesem kann aber leicht geholfen werden, wenn man für n setzt $\frac{1}{m}$, da dann m eine fractio unitate minor wird und $n^{\sqrt{2}}=\frac{1}{m^{\sqrt{2}}}$. Doch aber sind die summae serierum $a+b+c+d+$ etc. item $b+2c+3d+4e+$etc. immer infinitae, dass also auch mit dieser Beyhülfe die practische Berechnung nicht erleichtert wird. Zu diesem Ende habe ich dieses Mittel gefunden: Man suche erst diese seriem $\frac{(n-1)}{1(n+1)}+\frac{(n-1)^3}{3(n+1)^3}+\frac{(n-1)^5}{5(n+1)^5}+\frac{(n-1)^7}{7(n+1)^7}+$ etc. $=s$, welche allezeit convergens ist. Hernach setze man $2s\sqrt{2}=h$, so wird

$$n^{\sqrt{2}}=1+\frac{h}{1}+\frac{hh}{1.2}+\frac{h^3}{1.2.3}+\frac{h^4}{1.2.3.4}+\frac{h^5}{1.2.3.4.5}+\text{ etc.}$$

Bey Fermat findet sich noch ein sehr schönes theorema, dessen Demonstration er sagt gefunden zu haben. Nehmlich bey Anlass der Diophantaeischen Aufgabe, zwey quadrata zu finden, deren Summ ein Quadrat ist, sagt er, dass es unmöglich sey zwey cubos zu finden, deren Summ ein cubus sey, und zwey biquadrata, deren Summ ein biquadratum, und generaliter, dass diese Formul $a^n + b^n = c^n$ allzeit unmöglich sey, wenn $n > 2$. Ich habe nun wohl Demonstrationen gefunden dass $a^3 + b^3 \neq c^3$ und $a^4 + b^4 \neq c^4$, wo $\neq$ unmöglich gleich bedeutet. Aber die Demonstrationen für diese zwey casus sind so von einander unterschieden, dass ich keine Möglichkeit sehe, daraus eine allgemeine Demonstration für $a^n + b^n \neq c^n$ si $n > 2$ herzuleiten. Doch sicht man quasi per transennam ziemlich deutlich, dass je grösser n ist, je unmöglicher die Formul seyn müsse. Inzwischen habe ich noch nicht einmal beweisen können, dass summa duarum potestatum quintarum keine potestas quinta seyn könne. Dieser Beweis beruhet allem Ansehn nach nur auf einem glücklichen Einfall, und so lang man nicht darauf verfällt, möchte wohl alles Nachsinnen vergebens seyn. Da aber diese Aequation $aa + bb = cc$ möglich ist, so ist auch diese möglich $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$, woraus zu folgen scheint, dass auch diese $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = e^4$ möglich ist, doch habe ich bisher noch keinen Fall davon ausfindig machen können. Es können aber fünf biquadrata angegeben werden, deren Summ ein Biquadrat ist.

Euler.

LETTRE CLVI

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Décomposition des nombres premiers en quarrés. Suite.

St. Petersburg d. 26. April 1755.

Wenn ich mich nicht irre, ist mein letztes Schreiben an Ew. vom 28 Junii st. n. 1753 gewesen, und folglich eine geraume Zeit verflossen, darin mir nichts beygefallen, das ich Deroselben zu communiciren werth gehalten hätte, ohngeachtet ich die Proprietät, dass ein numerus primus hujus formae $1 + 4ef$ zu dieser $PP + eQQ$, allwo P et Q rationales sind, gebracht werden kann, öfters consideriret und auf unterschiedene Formen reduciret habe, als z. Ex. wenn $1 + 4ef = RR + 2abe\,SS$, so kann solcher numerus primus allezeit in $PP + eQQ$ verwandelt werden; oder auch wenn zwey numeri irrationales h et m gefunden werden können, so dass $h - m$ und hm rationales seyen und $h =$

$\frac{\sqrt{(4f-mm)}}{\sqrt{(emm+1)}}$, können gleichfalls die numeri quaesiti P et Q in rationalibus angegeben werden; imgleichen wenn $QQ = 4fvv + 2mv - emm$ gefunden werden kann, so wird $1 + 4ef = \frac{(4fv+m)^2 - 4fQQ}{mm} = \frac{(emm-v)^2 + eQQ}{vv}$, und endlich, weil der numerus primus $1 + 4ef =$ ist duobus quadratis $aa + bb$, quae in quocunque casu determinari possunt, so ist genug, wenn man nur einen numerum rationalem k finden kann hac lege, ut $aa(e + kk) + bb(e - kk)$ fiat quadratus, da es alsdann nicht schwer ist die numeros quaesitos P et Q zu finden, denn es wird

$$aa + bb = \frac{(hh+1)^2 aa}{4hh} + \frac{ekk(hh-1)^2 aa}{hh(e-kk)^2}$$

si sumatur

$$h = \frac{b(e-kk) \pm \sqrt{(aa(e+kk)^2 + bb(e-kk)^2)}}{a(e+kk)}.$$

Ferner ist auch diese Proprietät merkwürdig, ungeachtet ich mich um deren Demonstration nicht bemühet: Si quadratum aliquod divisum per numerum primum p hujus formae $4n + 1$, relinquat numerum r, dabitur etiam aliud quadratum, quod divisum per eundem numerum p, det residuum $p - r$.

Imgleichen numerus primus $4n + 1$, dividens numeros quadratos quoscunque, tot relinquere potest diversa residua quot $2n$ continet unitates, als z. Ex. wenn $n = 1$, so kann der divisor 5 nur zwey residua nachlassen, nehmlich 1 und 4; wenn $n = 3$, so lässet der divisor 13, dividens quadratos, sex residua, nehmlich 1, 3, 4, 9, 10, 12, et ita reliqui.

Goldbach.

LETTRE CLVII.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Même sujet. Réponse à la précédente.

Berlin d. 17. Mai 1755.

Ew. Betrachtungen über das theorema, dass die Zahl $1+4ef$, so oft sie ein numerus primus ist, immer in dieser Form P^2+eQ^2 enthalten sey, habe ich mit dem grössten Vergnügen zu ergründen gesucht und darin sehr wichtige Kunstgriffe wahrgenommen; nur ist es schad, dass dieselben noch so weit von einer vollständigen Demonstration entfernt sind. Doch ist es schon von keinem geringen Nutzen, dass, da man von der Wahrheit des theorematis versichert ist, auch alle die daraus hergeleiteten Formuln gewiss resolvirt werden können, welches sonsten sehr schwer fallen würde. Aus allen Bemühungen, die ich hierüber angewandt, deucht mich so viel sicher schliessen zu können, dass man niemals

eine solche Demonstration finden wird, aus welcher zugleich ex dato numero primo $1 + 4ef$, die quadrata P^2 und Q^2 selbst angegeben werden könnten; sondern man muss sich nur mit einer solchen begnügen, welche die Möglichkeit, dass $1 + 4ef = P^2 + eQ^2$, beweiset, ohne den modum anzuzeigen, wie diese Resolution wirklich anzustellen. Denn da dieselbe nur alsdann möglich ist, wenn $1 + 4ef$ ein numerus primus ist, so sehe ich nicht ab, wie man diese nothwendige Bedingung in Betrachtung ziehen könnte. Es ist also eine verlorne Mühe, die numeros P et Q generaliter durch e und f bestimmen zu wollen: denn wenn solches möglich wäre, so müssten auch die Zahlen P und Q gefunden werden können, wenn auch $1 + 4ef$ kein numerus primus wäre, welches doch gewiss öfters unmöglich ist.

Es ist mir endlich wohl gelungen zu beweisen, dass $1 + 4f = PP + QQ$, so oft $1 + 4f$ ein numerus primus ist; allein der Beweis hilft mir im geringsten nichts, um einen solchen numerum primum $1 + 4f$ würklich in zwey quadrata zu resolviren.

Neulich habe ich auch die Beweise zu Stande gebracht, dass $1 + 8f = 1 + 4.2f = PP + 2QQ$ und $1 + 12f = 1 + 4.3f = PP + 3QQ$, so oft nehmlich diese Zahlen $1 + 8f$ und $1 + 12f$ numeri primi sind. Doch habe ich bisher noch nicht weiter gehen können.

Ich sehe aber, dass sich diese Formuln noch weiter erstrecken, denn es ist nicht nur $1 + 8f = PP + 2QQ$, sondern auch $3 + 8f = PP + 2QQ$, wenn es numeri primi sind. Hernach ist auch $7 + 12f = PP + 3QQ$. Hernach, wenn $e = 5$ genommen wird, so hat man diese theoremata $1 + 20f = PP + 5QQ$, $9 + 20f = PP + 5QQ$, welche ich aber nicht beweisen kann. Vielleicht aber, wenn auch diese

Fälle mit in Betrachtung gezogen werden, findet man etwas eher Mittel, zu einer allgemeinen Demonstration zu gelangen.

Das theorema, dass wenn ein quadratum per numerum primum $p = 1 + 4n$ getheilt, das residuum r lässt, ein anderes Quadrat das residuum $p - r$ zurücklassen müsse, habe ich schon lang bewiesen. Denn wenn $1 + 4n$ numerus primus et a numerus datus, so können immer unendlich viel Zahlen $aa + xx$ gefunden werden, qui per $1 + 4n = p$ sint divisibiles; wenn also aa per p divisum r zurücklässt, so muss xx, $p - r$ zurücklassen.

Ew. ist der Beweis bekannt, dass $a^4 \pm b^4 = p^4$. Neulich bin ich auch mit dem Beweis zu Stande gekommen, dass $a^3 \pm b^3 = p^3$; weiter kann ich aber auch nicht kommen. Fermat hat aber nicht nur dies bewiesen, sondern auch dass $a^5 \pm b^5 = p^5$, $a^7 \pm b^7 = p^7$ und generaliter dass $a^n \pm b^n = p^n$, exceptis casibus $n = 1$ et $n = 2$. Allem Ansehn nach kommt es hier auf einen besondern Einfall an, und so lang man nicht darauf kommt, ist alle Arbeit vergebens. Ohne Zweifel wird man darauf sehen müssen, dass $a^5 + b^5$ ausser $a + b$ keine andere divisores primos haben kann, als hujus formae $10m + 1$, welches ich bewiesen habe.

Euler.

LETTRE CLVIII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Même sujet.

St. Petersburg d. 6. August 1755.

Ew. werthestes Schreiben vom 17 Mai habe ich d. 29. ejusd. wohl erhalten und daraus mit vielem Vergnügen ersehen, dass Sie meine Anmerkungen über die Verwandlung des numeri primi $1+4ef$ in $PP+eQQ$ richtig befunden. Sie führen zwar an, dass die von Ihnen demonstrirte Proposition, numerum $1+4f$, si est primus, esse $=PP+QQ$, zu würklicher Determination der numerorum P et Q im Geringsten nichts beyträget, allein ich bin der Meinung, quidquid per certum et determinatum numerum tentaminum inveniri potest, illud pro invento habendum esse, als z. Ex. wenn ein problema ad aequationem quatuor potestatum re-

duciret wird, wo man per unum, duo, vel tria tentamina die radicem satisfacientem finden muss. Imgleichen halte ich das problema: invenire omnes divisores numeri dati, pro solubili, quia solvi potest per finitum numerum tentaminum etc. In dem casu nun, da Ew. gefunden haben, dass ein jeder numerus primus hujus formae $1+4f=PP+QQ$, sind zugleich die numeri P et Q für gefunden zu achten, quia per numerum finitum tentaminum inveniri possunt, denn ich darf nur P oder Q den numeris integris 1, 2, 3, etc. successive $=$ setzen, und deren quadrata von dem numero primo $1+4f$ so lang subtrahiren, bis das residuum ein quadratum wird, wozu noch viele compendia, ut eligantur numeri idonei, angegeben werden können.

Die demonstrationes zu den casibus $1+8f$ und $1+12f$ möchte ich gern sehen, im Fall sie nicht weitläufig sind und eine sehr grosse Attention erfordern.

Sonst habe ich noch gefunden, dass wenn y durch diese Aequation

$$\frac{(ayy+2by-a)(byy-2ay-b)}{(yy+1)^2}=abeSS$$

und posita S rationali, y rationalis wird, alsdann auch die Aequation Statt hat

$$aa+bb=\frac{((ayy+2by-a)-(byy-2ay-b))^2}{(yy+1)^2}+2abeSS,$$

welcher casus, wie ich schon in meinem letzten Schreiben angemerket, allezeit auf die Form $PP+eQQ$ reducirt werden kann; ja wenn in dieser letzten Formul P oder Q nur unico casu gegeben wird, so kann ich daraus unzählige similes et rationales finden, nehmlich

$$\frac{(ePyy + 2eQy - P)^2 + e(Q + 2Py - eQyy)^2}{(eyy + 1)^2},$$

wenn ich vor y einen numerum quemcunque rationalem annehme, als z. Ex. weil $89 = \frac{9^2}{2^2} + \frac{11.5^2}{2^2}$, allwo $P = \frac{9}{2}$, $Q = \frac{5}{2}$, $e = 11$, so wird posita $y = 2$, der numerus primus $89 = \frac{607^2 + 11.179^2}{90^2}$, welches vielleicht noch zu andern Anmerkungen Gelegenheit geben wird.

Goldbach.

LETTRE CLIX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Même sujet Développements ultérieurs. Intégration d'équations différentielles analogues à celle de Riccati. Nomination d'Euler à l'Académie de Paris et lettre du comte d'Argenson. Sommation d'une série qui se rencontre dans le tome II de la Mécanique.

Berlin d. 23. August 1755.

Es muss allerdings die reductio numeri primi $1+4f$ ad formam $PP+QQ$ pro possibili gehalten werden, ungeacht keine Regul gegeben werden kann, in jedem Fall die quadrata PP und QQ selbst zu finden, sondern die Sache auf blosses Probiren ankommt. Ich hatte aber dieses nur angeführt um zu zeigen, dass um dieses theorema zu beweisen, quod $1+4f=PP+QQ$, die Demonstration nicht aus der wirklichen Resolution hergeleitet werden könne. Nehmlich dato numero f in genere, halte ich für unmöglich die Zahlen P und Q per f zu bestimmen. Eben so verhält sich auch die Sach mit diesem theoremate, quod $1+8f=2PP+QQ$ (wenn nehmlich $1+8f$ ein numerus primus

ist) dessen Demonstration unmöglich so beschaffen seyn kann, dass die valores P und Q würklich durch f ausgedrückt würden. Mein Beweis davon gründet sich auf folgende Sätze:

I. Numerus $2aa+bb$, si non est primus, alios non admittit divisores nisi qui ipsi sint formae $2pp+qq$ (posito scilicet, quod a et b sint numeri inter se primi).

II. Si $1+8f$ est primus, forma $a^{8f}-b^{8f}$, quicunque numeri pro a et b accipiantur, semper est divisibilis per $1+8f$ (dummodo neuter numerorum a et b sit per $1+8f$ divisibilis). Cum jam sit $a^{8f}-b^{8f}=(a^{4f}-b^{4f})(a^{4f}+b^{4f})$, alterutter factor $a^{4f}-b^{4f}$ vel $a^{4f}+b^{4f}$ per $1+8f$ erit divisibilis.

III. At non omnes numeri formae $a^{4f}-b^{4f}$ per $1+8f$ sunt divisibiles; nam si singuli hi numeri

$$2^{4f}-1,\ 3^{4f}-1,\ 4^{4f}-1,\ 5^{4f}-1,\ldots.(8f)^{4f}-1$$

per $1+8f$ essent divisibiles, eorum quoque differentiae tam primae quam secundae et sequentes omnes essent etiam per $1+8f$ divisibiles: at differentiae ultimae seu constantes sunt $2.3.4.5\ldots4f$, quae cum non sit per $1+8f$ divisibilis, sequitur etiam non omnes illos numeros per $1+8f$ esse divisibiles.

IV. Dantur ergo numeri pro a et b, quibus $a^{4f}-b^{4f}$ non est divisibilis per $1+8f$; iis ergo casibus numerus $a^{4f}+b^{4f}$ certe est per $1+8f$ divisibilis. At est

$$a^{4f}+b^{4f}=(a^{2f}-b^{2f})^2+2a^{2f}b^{2f},$$

ideoque numerus formae $PP+2QQ$, qui cum sit per $1+8f$ divisibilis, necesse est per (I), ut divisor $1+8f$ ipse sit numerus ejusdem formae $PP+2QQ$.

Wenn man einen einigen casum gefunden, quo formula $xx+eyy$ fit aequalis dato numero N, so können darau$_s$ infiniti alii in fractis scilicet gefunden werden. Als wenn

$aa + ebb = N$, ponatur $x = a + pz$ et $y = b - qz$, fietque $aa + 2apz + ppzz + ebb - 2ebqz + eqqzz = N$; at $aa + ebb = N$, ergo $2apz + ppzz - 2ebqz + eqqzz = 0$, unde fit $z = \frac{2ebq - 2ap}{pp + eqq}$. Ergo sumendo pro p et q numeros quoscunque, erit $x = \frac{eaqq + 2ebpq - app}{pp + eqq}$ et $y = \frac{bpp - ebqq + 2apq}{pp + eqq}$. Wenn aber e ein numerus negativus, so können aus einem einigen casu $aa - ebb = N$, in integris invento, infiniti alii etiam in integris gefunden werden, welches ich also kürzlich zeige:

Theorema. Si fuerit $aa - ebb = N$, tum infiniti casus in numeris integris x et y assignari possunt, quibus fiat $xx - eyy = N$ (dummodo e non sit numerus quadratus).

Demonstratio. Quicunque sit numerus e, dum non quadratus, semper assignari possunt numeri p et q, ut sit $pp - eqq = 1$ seu $pp = eqq + 1$. Cum jam sit per hypothesin $aa - ebb = N$, erit quoque $(aa - ebb)(pp - eqq) = N$. At est $(aa - ebb)(pp - eqq) =$

$$aapp - ebbpp - eaaqq + eebbqq =$$
$$(ap \pm ebq)^2 - e(bp \pm aq)^2.$$

Capiatur ergo $x = ap \pm ebq$ et $y = bp \pm aq$, erit

$$xx - eyy = N.$$

Jam quemadmodum ex primo casu $x = a$ et $y = b$, hinc duo adeo novi sunt inventi, ex his simili modo porro novi, ex iisque deinceps alii in infinitum elici poterunt. Q. E. D.

Die ganze Sache kommt also darauf an, dass pro quovis numero e die Zahlen p und q angegeben werden, ut sit $pp = eqq + 1$, welches in numeris integris allzeit geschehen kann, wie schon Pell und Fermat gezeiget. Dazu kann beygesetzte Tabelle dienen.

Ut sit $pp = eqq + 1$

si sit	erit	et
$e = 2$	$q = 2$	$p = 3$
$e = 3$	$q = 1$	$p = 2$
$e = 5$	$q = 4$	$p = 9$
$e = 6$	$q = 2$	$p = 5$
$e = 7$	$q = 3$	$p = 8$
$e = 8$	$q = 1$	$p = 3$
$e = 10$	$q = 6$	$p = 19$
$e = 11$	$q = 3$	$p = 10$
$e = 12$	$q = 2$	$p = 7$
$e = 13$	$q = 180$	$p = 694$
etc.		

Diese Tabelle enthält die kleinsten Werthe für p et q, welche durch die sogenannte Pellianische Methode gefunden werden. Diese Methode ist aber ziemlich beschwerlich, wenn die Zahlen für p und q, wie bey dem casu $e = 13$ geschicht, gross werden, und ich habe Mittel gefunden dieselbe sehr abzukürzen. Denn es geschieht in einigen Fällen, dass die kleinsten Zahlen p und q ungeheuer gross werden, als wenn $e = 61$, so ist $q = 226153980$ und $p = 1766319049$; — wenn $e = 109$, so ist $q = 15140424455100$ und

$$p = 158070671986249.$$

Ew. haben vormals auch solche Zahlen $\square + \triangle$ oder $\square + 2\triangle$ in Betrachtung gezogen, und neulich haben mich dieselben auf curieuse theoremata exclusiva geleitet. Als

I. Cum non omnes numeri sint aggregata ex quadrato et trigonali, seu formae $\square + \triangle$, dantur infiniti numeri in hac

forma non contenti, ejusmodi numerus si fuerit n, tum numerus $8n+1$ certe non est primus.

II. Infiniti dantur numeri in forma $\square + 2\triangle$ non contenti. Sit n hujusmodi numerus, et $4n+1$ certe non erit numerus primus.

Letztens bin ich ungefähr auf dieses problema gefallen:

Invenire aequationem cubicam $x^3 - Axx + Bx - C = 0$, quae habeat omnes suas radices rationales, et in qua coëfficientes A, B, C sint numeri quadrati. Vel si p, q, r sint ejus radices, eas ita comparatas esse oportet, ut primo $p+q+r$, secundo $pq+pr+qr$ et tertio pqr sint numeri quadrati.

Ich halte dieses problema um so viel schwerer, da ich glaube, dass für p, q, r nicht wohl kleinere Zahlen gefunden werden können, als diese: $p = 252782198228$, $q = 1633780814400$, $r = 3474741058973$.

Ich habe neulich wieder einige Untersuchungen über solche Differentialaequationen, dergleichen die Riccatiana ist, angestellt, welche sich nur in gewissen Fällen integriren lassen. Wenn nun für i ein numerus integer quicunque angenommen wird, so sind folgende aequationes immer integrabel:

I. $dy + yydx = aax^{2n-2}dx + ((2i+1)n \pm 1)ax^{n-2}dx.$

II. $dy + yydx = \frac{(in \pm 1)(in + n \pm 1)abx^{n-2}dx}{(a-bx^n)^2}$, vel haec aequatio $dy + yydx = \frac{mabx^{n-2}dx}{(a-bx^n)^2}$ toties est integrabilis, quoties fuerit $n = \frac{\sqrt{(1+4i(i+1)m)} \pm (2i+1)}{2i(i+1)}$. Ita si $i=2$, $m=3$ erit $n = \frac{\sqrt{73}+5}{12}$; unde integrabilis haec aequatio

$$dy + yydx = \frac{3abx^{\frac{\sqrt{73}-19}{12}}\,dx}{\left(a - bx^{\frac{\sqrt{73}+5}{12}}\right)^2}.$$

Porro sit $n = 2$, et $i = 2$, integrabilis erit haec aequatio (ponendo $a = 1$, $b = 1$) $dy + yydx = \frac{15dx}{(1-xx)^2}$, est vero integrale $y = \frac{15x + 14x^3 - 2x^5}{(1-xx)(1+6xx+2x^4)}$.

III. $dy + yydx = \frac{in(in \pm 1)bx^{n-2}dx}{a + bx^n}$;

IV. $dy + yydx = \frac{in(in \pm 1)adx}{xx(a+bx^n)}$;

V. Haec aequatio

$$dy + yydx = \frac{\lambda(\lambda-1)aa - \mu abx^n + \nu(\nu-1)bbx^{2n}}{xx(a+bx^n)^2} \cdot dx,$$

semper est integrabilis quoties sumto pro i numero integro quocunque fuerit

$$\mu = i(i+1)nn - (2i+1)n(\lambda - \nu) + \lambda + \nu - 2\lambda\nu.$$

So viel ich weiss, geniesst hier Niemand die Postfreyheit und so lang ich hier bin, hat mich meine Correspondenz jährlich wohl 200 Rthlr. gekostet. Ich gebe aber für keine Briefe das Postgeld mit grösseren Freuden aus, als diejenigen, welche von Ew. zu erhalten die Ehre habe, und wünschte, dass, wofern solches ohne Dero Unbequemlichkeit geschehen könnte, ich dieses Vergnügens öfters theilhaftig werden könnte.

Jüngsthin hat mir die Königl. Pariser Akademie die Ehre gethan mich unter ihre auswärtige Mitglieder aufzunehmen. Der H. Graf v. Argenson hat mir diese Nachricht selbst in einem Schreiben gemeldet, wovon ich die Freyheit nehme Ew. eine Copie beyzulegen. Euler.

Copie de la lettre du Marquis d'Argenson.

A Monsieur **Euler**, *Directeur de la classe des mathématiques de l'Académie de Berlin.*

Le Roy vient de vous choisir, Monsieur, d'après le voeu de Son Académie royale des sciences, pour remplir une place d'associé étranger dans cette Académie, et comme elle a nommé en même tems Milord Macclesfield, Président de la Société royale de Londres, pour remplir une pareille place qui vaque par la mort de M. Moivre, Sa Majesté a décidé que la première place de cette espèce, qui vaquera, ne sera pas remplie. L'extrême rareté de ces sortes d'arrangemens est une distinction trop marquée, pour ne pas vous en faire l'observation et vous assûrer de toute la part que j'y prends. L'Académie désiroit vivement de vous voir associé à ses travaux et Sa Majesté n'a pu qu'adopter un témoignage d'estime que vous méritez à si juste titre. Soyez persuadé, Monsieur, qu'on ne peut vous être plus parfaitement dévoué que je le suis.

M[is] D'Argenson.

P. S. In meiner Mechanica Tom. II. pag. 405 kommt diese series vor:

$$1 - \frac{n}{3} + \frac{n(n-2)}{3.5} - \frac{n(n-2)(n-4)}{3.5.7} + \frac{n(n-2)(n-4)(n-6)}{3.5.7.9} - \text{etc.}$$

deren Summ dort gegeben wird $= \frac{1}{n+1}$. Ich kann mich nicht mehr recht erinnern, wie ich damals auf diese Summ gekommen, glaube aber, dass damals mehrmals darüber mit Ew. zu conferiren die Ehre gehabt habe.

LETTRE CLX.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Félicitations à l'occasion de la nomination d'Euler. Prix remporté par son fils. Sommation d'une série. Théorème de nombres.

St Petersburg d. 9. December 1755.

Ew. gratulire ich zuvörderst zu der erhaltenen Stelle eines Académicien honoraire bey der Parisischen Acad. d. sciences und danke Deroselben für die mir übersandte Copie von dem Briefe des Mr. d'Argenson. Es fehlet aber dabey das Beste, nehmlich Ew. Antwort, welche, wie ich gänzlich glaube, sehr wohl abgefasset und digne de l'approbation des Quarante seyn wird. Ferner gereichet es mir zum grossen Vergnügen, dass Dero ältester Herr Sohn*) das praemium bey der hiesigen Akad. d. Wiss. erhalten hat; ich zweifle im Geringsten nicht, dass solches noch öfters geschehen

*) Jean-Albert Euler, plus tard secrétaire perpétuel de l'Académie de St.-Pétersbourg. Il était le filleul de Goldbach.

werde, wenn er die Mühe nehmen wird seine pièces zu solchem Ende einzusenden.

Vor die mir communicirten merkwürdigen theoremata sage ich schuldigsten Dank, und ob ich gleich wenige Hoffnung habe, dass ich dieselben jemals pro dignitate werde betrachten können, so ist es mir doch sehr lieb, dass Ew. noch immer fortfahren solche schöne découvertes zu machen. Mir ist seit meinem letztern Schreiben nichts sonderliches eingefallen. Was aber die seriem

$$1-\frac{n}{3}+\frac{n(n-2)}{3.5}-\frac{n(n-2)(n-4)}{3.5.7}+\text{etc.}=\frac{1}{n+1}$$

betrifft, so kann ich mich zwar nicht erinnern selbige schon gesehen zu haben, es ist aber deren summa ganz offenbar. Eine andere Bewandniss hat es mit den seriebus, deren denominatores in certis casibus $=0$ und folglich die summa seriei infinite magna werden kann.

Goldbach.

P. S. Theorema: Si sit $aa+bb=PP+eQQ$, ubi P et Q rationales, erit etiam

$$aa+((2e+1)b-eP-eQ)^2=MM+eNN,$$

ubi M et N rationales.



LETTRE CLXI.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Critique du théorème précédent.

Berlin d. 3. Januar 1756.

Ich habe nun schon eine geraume Zeit so viel andere Geschäfte gehabt, dass ich an numerische theoremata, dergleichen ich Ew. das letzte Mal vorzulegen die Ehre gehabt, nicht habe denken können. Die partes matheseos applicatae nehmen mir die meiste Zeit weg, wo es immer mehr zu untersuchen gibt, je mehr man damit umgeht. Weil nun mein Kopf mit so viel andern Sachen angefüllt ist, so mag das wohl die Ursach seyn, dass ich mich in das von Ew. communicirte und nach der Hand verbesserte theorema nicht finden kann. Vielleicht haben Ew. vergessen noch eine wesentliche Condition hinzuzusetzen.

Das theorema war: Si sit $aa+bb=P^2+eQ^2$ erit etiam
$$aa+((2e+1)b-eP-eQ)^2=M^2+eN^2.$$

Weil ich den Grund desselben nicht einsehen konnte, so habe ich die Richtigkeit desselben durch Exempel erforschen wollen.

I. Da $1^2+4^2=17=3^2+2.2^2$, so ist $a=1$, $b=4$, $P=3$, $Q=2$ und $e=2$, also müsste seyn
$$1^2+(5.4-2.3-2.2)^2=1^2+10^2=101=M^2+2N^2,$$
welches unmöglich ist.

II. Da $9^2+4^2=97=7^2+3.4^2$, so ist $a=9$, $b=4$, $P=7$, $Q=4$ und $e=3$, also müsste seyn
$$9^2+(7.4-3.7-3.4)^2=9^2+5^2=106=M^2+3N^2,$$
welches ebenfalls unmöglich ist.

Da ich nun nicht einmal ein Exempel finden kann, welches einträfe, so schliesse ich daraus, dass eine gewisse Bedingung in den Zahlen a, b, P und Q müsse weggelassen seyn, welche ich aber nicht ausfindig machen kann.

Euler.

LETTRE CLXII.

Goldbach à Euler.

Sommaire Amendement à ce théorème

St. Petersburg d. 21. Januar 1756.

So leid es mir ist, dass ich Ew. durch mein unrecht abgeschriebenes theorema einige Mühe verursacht habe, so lieb ist es mir hingegen, dass sie selbiges Ihrer Untersuchung werth gehalten, denn wenn Sie nichts darauf geantwortet hätten, würde ich auch gewiss nicht mehr daran gedacht haben, Nachdem ich solches aber auf Dero Veranlassung wieder übersehen, so habe ich zuletzt bemerket, dass es unendlich generaler gemacht werden kann, und der bey einer andern Gelegenheit von mir angeführte Vers: *Si non errasset, fecerat ille minus* findet hier abermal Statt. Es soll heissen: Si $aa + bb = PP + eQQ$, ubi P et Q sint numeri rationales, poterit etiam fieri

$$aa + (b + 2em(mb - mP - Q))^2 = MM + eNN,$$

ita ut M et N sint rationales, modo pro m sumatur numerus rationalis. In dem von Ew. angeführten ersten Exempel, woselbst $a = 1$, $b = 4$, $P = 3$, $Q = 2$ und $e = 2$, wird $1^2 + 4^2 = 3^2 + 2.2^2$, ergo etiam $1^2 + (4 + 4mm - 8m)^2$ seu $1^2 + 2^2(m-1)^4 = MM + 2NN$ de quo dubitare nefas. In dem andern exemple, wo $a = 9$, $b = 4$, $P = 7$, $Q = 4$, $e = 3$, oder $9^2 + 4^2 = 7^2 + 3.4^2$ wird

$$9^2 + (4 - 24m - 18mm)^2 = M^2 + 3N^2,$$

welches gleichfalls eine gewisse Wahrheit ist. So oft nun

$$aa + (b + 2em(mb - mP - Q))^2$$

ein numerus primus ist, so kann er diese Form $MM + eNN$ haben, wenn gleich $aa + bb$ kein numerus primus ist . . . .

Goldbach.

LETTRE CLXIII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Question relative au roulis et au tangage. Remarques sur le théorème précédent.

Berlin d. 10. Februar 1756.

— — Noch hat unser Joh. Albert keinen Preis bey der Pariser Akademie erhalten. Der Name desjenigen, so im vorigen Jahre den Preis erhalten, wurde nicht sogleich bekannt gemacht; man wusste nur, dass es ein junger Mensch war, welches vielleicht zu der Ew. hinterbrachten Nachricht Anlass gegeben haben mag. Es ist mir aber seitdem die Preisschrift selbst zugeschickt worden, deren Verfasser M. Chauchot, sous-constructeur de vaisseaux, genannt wird, welcher aber bald darauf gestorben seyn soll. Die Frage war: Diminuer le plus qu'il est possible les mouvemens de

roulis et de tangage d'un navire etc. Da aber die obgemeldte Schrift kein völliges Genüge geleistet, so ist eben diese Frage nochmals aufs künftige Jahr vorgelegt worden, worüber wir jetzt würklich arbeiten. Von meiner Danksagung an des Hrn. Comte d'Argenson Excellenz habe ich so wenig, als von allen meinen Briefen eine Abschrift behalten. Sie war schlecht gerathen, und also nicht wohl möglich viel darin zu verbessern. Mir hat sie am wenigsten gefallen, und deswegen wollt' ich kein Andenken davon aufbehalten.

Ew. theorema, dass, wenn $aa + bb = PP + eQQ$, auch $aa + (b + 2em(mb - mP - Q))^2 = MM + eNN$ sey, hat seine völlige Richtigkeit und ist deswegen sehr merkwürdig, dass dadurch dieses problema solvirt werden kann:

> Datis duobus quadratis aa et bb, quorum summa sit numerus formae $P^2 + eQ^2$, invenire infinita alia quadrata loco bb substituenda, quae priori aa addita summam exhibeant, quae pariter sit numerus formae $P^2 + eQ^2$.

Hier wird also das erstere quadratum aa beybehalten und anstatt des andern bb unendlich viel andere Werthe angegeben, dass die Summ allzeit in dieser Form $P^2 + eQ^2$ enthalten sey. Man könnte also das problema noch generaler also proponiren:

> Proposita summa duorum quadratorum $aa + bb$, quae sit numerus formae $P^2 + eQ^2$, invenire infinitas alias binorum quadratorum summas $xx + yy$, quae in eadem forma contineantur;

wovon ich folgende Solution gefunden: Cum sit

$$aa + bb = P^2 + eQ^2$$

tribuantur numeris x et y sequentes valores

$$x = a(tt + evv + rr - ss) + 2r(bs - Pt - eQv)$$
$$y = b(tt + evv - rr + ss) + 2s(ar - Pt - eQv)$$

ubi quidem pro litteris r, s, t, v numeros quoscunque accipere licet. Tum autem utique erit $xx + yy = M^2 + eN^2$; fiet enim

$$M = P(rr + ss + tt - evv) + 2t(eQv - ar - bs)$$

et

$$N = Q(rr + ss - tt + evv) + 2v(Pt - ar - bs).$$

Solchergestalt werden nicht nur unendlich viele, sondern sogar alle mögliche Werthe für x und y gefunden.

In diesem problemate wird vorausgesetzt, dass schon ein casus, da $aa + bb = P^2 + eQ^2$ bekannt sey, um daraus alle übrige zu finden; allein dieses ist auch nicht einmal nöthig, sondern proposito numero e quocunque, können unmittelbar alle mögliche summae binorum quadratorum angegeben werden, welche zugleich in der Form $P^2 + eQ^2$ enthalten sind. Man nehme nehmlich sogleich $a = exx - yy + zz$ und $b = 2yz$, so wird $aa + bb = (exx - yy - zz)^2 + e(2xz)^2$. Weil nun x, y und z nach Belieben angenommen werden können, so erstreckt sich diese Solution auf alle mögliche Fälle und scheinet also vor der vorhergehenden keinen geringen Vorzug zu haben.

Euler.

LETTRE CLXIV.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Même sujet.

St. Petersburg d. 23. März 1756.

Die von Ew. angeführte aequatio

$$aa + bb = (exx - yy - zz)^2 + e(2xz)^2$$

ist aus unserer vorigen correspondance schon bekannt, welcher Umstand Deroselben vielleicht entfallen war. Sonst habe ich auch noch einen andern hierher gehörigen *lusum naturae* bemerkt, nemlich wenn $1 + 4efg = PP + eQQ$, erit etiam $1 + 4e(fg + effyyxx) = (P - 2efyx)^2 + e(Q - x)^2$ posita $x = \frac{4fPy + 2Q}{4efyy + 1}$; so oft nun $e(g + efyyxx)$ ein numerus quadratus ist (posito valore dicto ipsius x), so oft kann $PP + eQQ$ in diese Form verwandelt werden $MM + fNN$, existentibus M et N rationalibus, denn es wird seyn

$$M = (P - 2efyx) \text{ und } N = Q - x.$$

Goldbach.

P. S. d. 27 März 1756. Es scheinet, dass die Uebereilungsfehler bey mir in den Briefen an Ew. je länger je gemeiner werden, wie es in dem letzten abermal

$$x = 4fPy + 2Q \text{ und nicht } x = \frac{4fPy + 2Q}{4efyy + 1}$$

hätte heissen sollen, welches ohne Beschwerde zu corrigiren bitte. Im übrigen wird vielleicht dieses raisonnement zum Beweise, dass ein numerus primus von dieser Form $1 + 4efg$ in $PP + eQQ$ verwandelt werden kann, etwas beytragen:

Si positis e, f, g rationalibus, fieri potest

$$1 + 4efg = PP + eQQ$$

ita ut P et Q sint rationales, poterit etiam fieri

$$1 + 4efg = MM + fNN = RR + gSS$$

ita ut M, N, R, S sint rationales (cum in numero $1 + 4efg$ numeri e, f et g sint natura sua permutabiles). Atqui in quovis numero primo $1 + 4efg = aa + bb$ verum est prius (nam poni potest $e = 1$, $P = a$, $Q = b$), ergo et posterius.

LETTRE CLXV.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Même sujet.

Berlin d. 17. April 1756.

Es hat seine völlige Richtigkeit, dass wenn $1+4efg = P^2+eQ^2$, auch seyn werde

$$(P-2efyx)^2+e(Q-x)^2 = 1+4ef(g-efy^2x^2)$$

posita $x = 4fPy+2Q$, und also auch dass, so oft $e(g+efy^2x^2)$ ein quadratum ist, diese Form in M^2+fN^2 verwandelt werde. Hieraus aber möchte wenig zu folgern seyn. Denn da e, f, g numeri inter se primi zu seyn pflegen, so sind die factores e und $g+efy^2x^2$ inter se primi, folglich kann ihr Product kein quadratum seyn; es wäre denn, dass man für y, x numeros fractos zulassen wollte, in welchem Fall man sich in noch grössere Schwierigkeiten verwickeln würde. Denn es sey $e=2, f=5$ und $g=1$,

also $1 + 4efg = 41 = 3^2 + 2 . 4^2$. Dahero $P = 3$ und $Q = 4$. Nun nehme man $x = 4fPy + 2Q = 60y + 8$, so ist allerdings $1 + 40(1 + 10y^2x^2) = (3 - 20yx)^2 + 2(4 - x)^2$. Es wäre also die Frage, ob $e(g + efy^2x^2) = 2(1 + 10y^2x^2)$ ein quadratum seyn könnte, welches aber unmöglich ist, so lang für x und y nur numeri integri angenommen werden. Wollte man aber auch Brüche zulassen, und fur x seinen Werth $60y + 8$ setzen, so wäre $yx = 60y^2 + 8y$, also $y^2x^2 = 3600y^4 + 960y^3 + 64yy$, und dahero geriethe man auf diese Frage, ob folgende Formul

$$72000y^4 + 19200y^3 + 1280y^2 + 2$$

ein Quadrat seyn könne. Wenn sich aber auch solches nach vieler Mühe finden sollte, so sehe ich nicht, was man damit gewonnen hätte. Inzwischen ist aber gewiss, dass diese Formul auch in gebrochenen Zahlen niemals ein Quadrat werden könne. Denn eher man noch den Werth für x substituirt, so setze man $yx = m$, also $2 + 20m^2 = \square$. Ferner $m = \frac{n}{4}$, folglich $2 + \frac{5}{4}nn = \square$ oder $5nn + 8 = \square$, welches offenbar unmöglich ist.

Das von Ew. angeführte Argument, dass wenn

$$1 + 4efg = P^2 + eQ^2,$$

auch seyn müsse $1 + 4efg = M^2 + fN^2 = R^2 + gS^2$, weil kein Grund vorhanden wäre, warum eine solche Auflösung bey einem der Factoren e, f, g mehr Platz haben sollte, als bey den andern, würde in der Metaphysic für eine herrliche Demonstration passiren können, wo man sich mit Beweisthümern zu begnügen pflegt, welche bey weitem nicht so bündig sind. Allein in der Mathematic kommen mir dergleichen Schlüsse immer verdächtig vor. Ew. dehnen zwar diesen Satz auf alle numeros rationales überhaupt aus, in

welchem Fall ich denselben für wahr halte, wenn nur $1+4efg$ ein numerus primus ist; welche nothwendige Bedingung gleichwohl im argumento nicht enthalten ist, und auch nicht erhellet, warum dieselbe hinzugesetzt werden sollte. Ohne diese Bedingung aber ist der Satz falsch, denn $1+4.1.5$ ist wohl $=P^2+5Q^2$ und doch ist $1+4.1.5=M^2+1.N^2$ unmöglich. Hernach, wenn man auch Mittel fände, die Bedingung, dass $1+4efg$ ein numerus primus seyn müsse, in den Beweis einzuflechten, so sehe ich keinen Grund, warum der Satz nicht auch wahr seyn sollte, wenn für P, Q, M, N, R, S nicht nur numeri rationales, sondern auch integri genommen würden; denn wenn die Reduction $1+4efg=P^2+eQ^2$ in integris Platz hat, so enthält der angegebene Beweis keinen Grund, warum die andern Reductionen nicht auch in integris Platz haben sollten. Allein in diesem Fall ist der Satz nicht mehr der Wahrheit gemäss, wie aus diesem Exempel erhellet: Es sey $e=3$, $f=5$, $g=11$, so wird $1+4efg=661$ (numero primo). Nun ist zwar $661=19^2+3.10^2$ und auch $661=16^2+5.9^2$; doch aber kann die dritte Resolution $661=R^2+11.S^2$ in integris auf keinerley Art bestehen. In Brüchen findet dieselbe aber Statt, indem $661=\left(\frac{13}{2}\right)^2+11\left(\frac{15}{2}\right)^2$; woraus klar abzunehmen, dass in dergleichen ratiociniis die grösste Behutsamkeit gebraucht werden müsse. Ich habe solches bey einigen, über einige theoremata Fermatiana gegebenen Demonstrationen zur Genüge erfahren. Als z. Ex. war der Beweis sehr leicht, dass wenn zwey summae duorum quadratorum mit einander multiplicirt werden, das Product auch eine summa duorum quadratorum seyn müsse, indem

$$(aa+bb)(cc+dd)=(ac\pm bd)^2+(ad\mp bc)^2.$$

Wer sollte nun daraus nicht schliessen, dass wenn eine summa duorum quadratorum durch eine andere summam duorum quadratorum getheilt werden kann, der Quotient nicht auch eine summa duorum quadratorum seyn müsse?

Die Sache ist zwar wahr; allein der erwähnte Schluss ist unrichtig, denn wenn derselbe richtig wäre, müsste auch dieser richtig seyn: Productum ex duobus numeris paribus semper est par: ergo si numerus par per alium sit divisibilis, quotus quoque erit par; welches doch offenbar falsch wäre.

Euler.

LETTRE CLXVI.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Même sujet.

St. Petersburg d. 18. Mai 1756

Was die Aequation

$$1 + efg = PP + eQQ = MM + fNN = \text{etc.}$$

betrifft, bin ich mit Ew. einerley Meinung, indem die Natur der Zahlen P, Q, M etc., nehmlich ob es numeri integri, oder fracti, oder surdi seyn sollen, nicht bestimmet wird, ohngeachtet die numeri integri e, f und g permutabiles sind. Dass aber die grosse Zahl $72000y^4 + 19200y^3 + 1280yy + 2$ kein Quadrat seyn kann, folget alsofort, wenn man dieselbe als ein exemplum regulae von $4n + 2 = \square$ betrachtet.

Indessen bekenne ich, dass ich noch nicht recht einsehe, warum Ew. zur Wahrheit dieser Aequation

$$1 + 4ef = PP + eQQ$$

erfordern, dass $1+4ef$ ein numerus primus sey, wenn P et Q rationales seyn sollen, da allein in dem casu, ubi $f=e+kk-1$ unzählige Exempel vorhanden sind, dass auch numeri non primi diese Eigenschaft haben können, als posita $e=k=3$, fit $1+4.3.11=5^2+3.6^2$.

Nachfolgendes theorema halte ich pro demonstrabili: Sit $p=aa+bb$ et sit $1+mQQ$ summa duorum quadratorum, erit etiam $p=aa+bb=PP+(xx-mp)QQ$, ita ut, si reliqui numeri sint rationales, fiat etiam x rationalis.

Goldbach.

LETTRE CLXVII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Même sujet.

Berlin d. 11. Juni 1756.

Dass diese grosse Zahl $72000y^4 + 19200y^3 + 1280y^2 + 2$ kein Quadrat seyn könne, folget nur alsdann aus der Formul $4n + 2 = \square$, wenn y ein numerus integer ist. So viel ich mich aber erinnere, begriff y auch numeros fractos, und da wird allerdings eine besondere Demonstration erfordert. Man darf nur diese Formul $8xx + 2$ betrachten, welche, wenn x auch ein Bruch seyn kann, infinitis modis ein Quadrat seyn kann, als $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{7}{2}$, etc. Dass nun ein Gleiches bey der obigen Formul nicht Statt finde, muss besonders bewiesen werden.

Dass ich zur Wahrheit dieser Aequation $1 + 4ef = PP + eQQ$ erfordere, dass $1 + 4ef$ ein numerus primus

seyn müsse, ist die Ursach, weil wenn $1 + 4ef$ kein numerus primus ist, solche Fälle vorkommen, da $1 + 4ef$ nicht dieser Formul $PP + eQQ$ gleich seyn kann; denn es sey z. Ex. $e = 1$, $f = 5$, so ist gewiss $1 + 4ef = 21$ nicht gleich $PP + QQ$. Inzwischen gebe ich gern zu, dass $1 + 4ef = PP + eQQ$ in unendlich vielen Fällen wahr ist, wenn gleich $1 + 4ef$ kein numerus primus ist. Wenn aber auch nur ein einiger Fall in contrarium könnte angeführt werden, so wäre derselbe hinlänglich die Wahrheit des Satzes zu zernichten. Hingegen, wenn diese Bedingung hinzugesetzt wird, dass $1 + 4ef$ ein numerus primus seyn müsse, so kann kein Fall in contrarium angeführt werden, wenn man nehmlich für P und Q die Brüche nicht ausschliesst, und deswegen glaube ich, dass der Satz wahr sey, ungeacht ich denselben nicht beweisen kann. Wenn aber die Bedingung, dass $1 + 4ef =$ numero primo, weggelassen wird, so kann man sicher behaupten, dass der Satz $1 + 4ef = PP + eQQ$ nicht wahr sey, weil die Anführung eines einzigen Exempels in contrarium hinreichend ist, denselben umzustossen.

Wenn man aber für P und Q nur numeros integros zulässt, zugleich aber die Condition festsetzt, dass $1 + 4ef$ ein numerus primus seyn müsse, so ist die Aequation $1 + 4ef = PP + eQQ$ in genere gewiss nicht demonstrabel, indem ich unendlich viel Fälle in contrarium anführen kann. Ja, das von Ew. angeführte Exempel, dass $1 + 4 . 3 . 11 = 133 = 5^2 + 3 . 6^2$, ungeacht 133 kein numerus primus ist, reichet eine Exception dar, indem $1 + 4 . 3 . 11$ nicht ist $P^2 + 11\,Q^2$, welches gleichwohl seyn müsste, wenn der Satz allgemein wahr wäre.

Das theorema, so Ew. anführen, dass wenn $p = aa + bb$ und $1 + mQ^2$ summa duorum quadratorum, auch seyn werde $p = aa + bb = P^2 + (xx - mp)\,Q^2$, ist nicht nur demonstrabel, sondern man kann auch in genere die Werthe für P und x anzeigen, welche dieser Aequation ein Genüge leisten. Denn es sey $1 + mQ^2 = rr + ss$, so nehme man $P = ar - bs$ und $x = \frac{as + br}{Q}$, alsdann wird augenscheinlich $aa + bb = P^2 + (xx - mp)\,Q^2$. Denn da

$$P^2 = aarr - 2abrs + bbss$$
$$xxQQ = aass + 2abrs + bbrr$$
$$-\,mpQQ\ (\text{ob } p = aa + bb) = -\,maaQQ - mbbQQ$$

folglich $P^2 + (xx - mp)\,Q^2 =$

$$(aa + bb)(rr + ss) - m(aa + bb)\,QQ = aa + bb,$$

weil $rr + ss = 1 + mQ^2$, per hypothesin.

Euler.



LETTRE CLXVIII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Probleme du cavalier au jeu des échecs.

Berlin d. 26. April 1757.

(Lettre de recommandation, donnée à Aepinus).

— — — Die Erinnerung einer mir vormals vorgelegten Aufgabe hat mir neulich zu artigen Untersuchungen Anlass gegeben, auf welche sonsten die Analysis keinen Einfluss zu haben scheinen möchte. Die Frage war: Man soll mit einem Springer auf einem Schachbrette alle 64 Plätze dergestalt durchlaufen, dass derselbe keinen mehr als einmal betrete. Zu diesem Ende wurden alle Plätze mit Marquen belegt, welche bey Berührung des Springers weggenommen wurden. Es wurde noch hinzugesetzt, dass man von einem gegebenen Platz den Anfang machen soll. Diese letztere Bedingung schien mir die Frage höchst schwer zu machen, denn ich hatte bald einige Marschrouten gefunden, bey welchen mir

aber der Anfang musste freygelassen werden. Ich sahe aber, wenn die Marschroute in se rediens wäre, also dass der Springer von dem letzten Platz wieder auf den ersten springen könnte, alsdann auch diese Schwierigkeit wegfallen würde. Nach einigen hierüber angestellten Versuchen habe ich endlich eine sichere Methode gefunden, ohne zu probiren, soviel dergleichen Marschrouten ausfindig zu machen, als man will, (doch ist die Zahl aller möglichen nicht unendlich). Eine solche wird in beygehender Figur vorgestellt:

54	49	40	35	56	47	42	33
39	36	55	48	41	34	59	46
50	53	38	57	62	45	32	43
37	12	29	52	31	58	19	60
28	51	26	63	20	61	44	5
11	64	13	30	25	6	21	18
14	27	2	9	16	23	4	7
1	10	15	24	3	8	17	22

Der Springer springt nehmlich nach der Ordnung der Zahlen. Weil vom letzten 64 auf N. 1 ein Springerzug ist, so ist diese Marschronte in se rediens.

Hier ist noch diese Eigenschaft angebracht, dass in areolis oppositis die differentia numerorum allenthalben 32 ist.

Euler.

LETTRE CLXIX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Troubles de la guerre. Notices sur la famille d'Euler.

Berlin d. 29. Juni 1762.

Nach dem so schweren Ungewitter, welches mich ausser Stand gesetzt, meine schuldigste Ehrerbietung Ew. schriftlich zu bezeugen, habe ich mich in der völligen Ungewissheit Dero Zustands noch nicht unterstehen dürfen meine gehorsamste Pflicht bey Ew. abzustatten. Ich hatte deswegen den Hrn. Prof. Müller ersuchet, mir darüber die nöthigen Erläuterungen zu ertheilen. Um so viel lebhafter war demnach meine Freude, als ich vorgestern Ew. gütigstes Schreiben*) zu erhalten das Glück hatte, und ich kann so wenig mein Vergnügen über Dero Wohlseyn als die dankbarsten Empfindungen meines Herzens über Dero fortdauernde ganz ungemein gnädige Gesinnung gegen mich und die Meinigen,

*) Cette lettre manque.

mit Worten ausdrücken; insonderheit bin ich über das huldreiche Andenken, dessen Ew. meinen ältesten Sohn haben würdigen wollen, innigst gerührt, und derselbe ist darüber auch vor Freude ganz ausser sich selbst. Nachdem ihm von Sr. K. M. eine Stelle bey unserer Akademie allergnädigst ertheilet worden, so hat er sich schon vor einigen Jahren zu unserm Vergnügen verheirathet, und da sein Einkommen wegen der Kriegsunruhen noch sehr gering, so lebt er mit seiner Frau bey uns und wir haben die Freude ein artiges Grosstöchterleyn erlebt zu haben. Die Göttliche Vorsehung hat bisher bey so mancherley Trübsalen so gnädiglich und wunderbar über uns gewaltet, dass wir auch wegen des Künftigen unser festes Vertrauen auf Dieselbe setzen. Mein zweiter Sohn, der auch noch in Petersburg geboren, hat sich mit allem Fleiss auf die Medicin gelegt und ist gegenwärtig in Halle, wohin ich ihn vor einem Jahr gebracht habe, und gedenket auf künftigen Herbst zu promoviren. Ich habe den Trost, dass seine Herren Professores seinen Fleiss und gute Aufführung nicht genug rühmen können. Mein jüngster Sohn, der hier A. 1743 geboren, hat sich dem Kriegswesen gewidmet und ist nun Lieutenant bey der Artillerie, wo man ungemein wohl mit ihm zufrieden ist. Ausser diesen haben wir noch zwey Töchter und leben hier in dem grössten Vergnügen durch die Gnade Gottes beysammen, ungeachtet hier Jedermann über die ausgestandenen harten Drangsale die bittersten Klagen führt; und ich auch das Unglück gehabt, dass mein Landgut in Charlottenburg, als unsere Stadt in Russischen Händen war, rein ausgeplündert worden. Der Hr. General Tschernyscheff, welcher mich vormals besucht hatte, schickte mir zwar sogleich eine Salvegarde, sie kam aber doch zu spät und ich

habe meine Hoffnung zu Ersetzung des erlittenen Verlusts noch nicht aufgegeben, da ich deswegen sowohl von des Hrn. Hettmanns als des Hrn. Grosskanzlers Hochgräfl. Excellenz die gnädigste Versicherung erhalten habe, und mir von der Akademie angerathen worden, mich auch deswegen bey unserm Gesandten, dem Hrn. Baron von Goltz, zu melden; doch scheinen mir die gegenwärtigen Umstände dazu noch nicht die günstigsten zu seyn. Doch überwiegt unsern Kummer himmelweit unsere inbrünstige Freude über die höchst wunderbare und göttliche Errettung unseres allertheuersten Königs, und unsere Kirchen erschallen immer von den herzlichsten Lobeserhebungen Seiner glorwürdigst regierenden Russisch Kaiserl. Majestät, welchen der Allerhöchste mit allem nur möglichen Segen überschütten wolle!

Ich habe das feste Vertrauen zu Ew. gnädigen Zuneigung, dass Dieselben über die weitläufige Erzählung meiner Umstände nicht ungeduldig werden, sondern uns noch ferner Dero hochgeschätzte Wohlgewogenheit zuzuwenden geruhen werden, zu welcher ich mich sammt den Meinigen auf das inständigste ganz gehorsamst empfehle. Der Allmächtige Gott wolle Ew. bey beständiger Gesundheit und allem wahrhaftigen Wohlseyn immerfort erhalten und in allen Stücken Seinen reichen und herzerquickenden Segen verspüren lassen. Ich habe die Ehre u. s. w.

Euler.

LETTRE CLXX.

EULER à GOLDBACH

SOMMAIRE. Théorème d'analyse.

Berlin d. 25. September 1762.

Simple lettre de politesse, comme la précédente. Un feuillet annexé contient ce qui suit:

Theorema. Si habeantur numeri quotcunque inaequales a, b, c, d etc., ex iisque formentur sequentes fractiones

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)\text{ etc.}}, \frac{b^n}{(b-a)(b-c)(b-d)\text{ etc.}}, \frac{c^n}{(c-a)(c-b)(c-d)\text{ etc.}}, \frac{d^n}{(d-a)(d-b)(d-c)\text{ etc.}}, \text{ etc.}$$

earum summa semper est $=0$, si exponens n (quem integrum intelligi oportet) minor sit numero factorum in singulis denominatoribus. Sin autem ei sit aequalis, summa fit $=1$.

Exemplum. Sint numeri propositi 10, 9, 7, 4, 2 erit

$$\frac{10^n}{1.3.6.8} - \frac{9^n}{1.2.5.7} + \frac{7^n}{3.2.3.5} - \frac{4^n}{6.5.3.2} + \frac{2^n}{8.7.5.2} = 0$$

si $n < 4$, at si $n = 4$, summa est $= 1$. Sit $n = 0$, erit

$$\frac{1}{144} - \frac{1}{70} + \frac{1}{90} - \frac{1}{180} + \frac{1}{560} = 0$$

est manifestum. In genere, fractionibus ad communem denominatorem reductis fit

$$35.10^n - 72.9^n + 56.7^n - 28.4^n + 9.2^n = 0,$$

dummodo $n < 4$.

Dieses theorema scheint nicht wenig merkwürdig zu seyn; es däucht mich aber, Ew. haben mir schon längst dergleichen etwas mitzutheilen geruhet.

Euler.

LETTRE CLXXI.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Billet de remercîment. Encore une observation sur le théorème des lettres précédentes relatif à la décomposition des nombres en quarrés.

St. Petersburg d. 19. October 1762.

Ew. beyde letztere Briefe sind mir d. 15. Juli und 11 October allhier richtig abgegeben worden. Für das mir communicirte schöne theorema sage ich schuldigsten Dank, befinde mich aber jetzo gänzlich ausser Stande selbiges pro dignitate zu betrachten*),

Ich habe unlängst einige tomos vom Hamburger Magazin

*) Les infirmités de l'âge de l'auteur se manifestent aussi dans l'écriture de cette lettre qui, quoique belle encore, est cependant incertaine et tremblante. Le lecteur voudra bien remarquer qu'il y a un espace de six ans entre la date de cette lettre et celle de la lettre précédente.



durchblättert und darin die grossen éloges welche Ew. an unterschiedenen Orten so billig beygelegt werden, mit ungemeinem Vergnügen beobachtet. Dero Hrn. Sohne gratulire ich von ganzem Herzen zur abermaligen Petersburgischen pièce victorieuse.

Goldbach.

P. S. Ich habe observiret, dass der Aequation

$$aa + bb = PP + eQQ$$

allezeit ein Gnügen geschiehet positis

$$P = \frac{bb - aa}{b},\ e = 3bb - aa,\ Q = \frac{\pm a}{b},$$

woraus unzählige dergleichen valores pro summa $aa + bb$ formiret werden können.

LETTRE CLXXII.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Décomposition des nombres en carés; suite. Autre théorème de nombres.

Berlin d. 9. November 1762.

Die Frage, welche Ew. zu berühren belieben, was für Zahlen in einer jeden von diesen Formuln $aa + bb$ und $pp + eqq$ zugleich enthalten sind? ist in der Lehre von den Zahlen nicht nur von der grössten Wichtigkeit, sondern fasset auch solche besondere Schwierigkeiten in sich, welche dieselbe höchst merkwürdig machen, insonderheit wenn mehr als zwey Formuln vorgeschrieben werden. Wenn nur zwo gegeben sind, und man sucht alle Zahlen N, so zugleich in diesen beyden Formuln $aa + mbb$ und $cc + ndd$ enthalten sind, wo m und n gegebene Zahlen sind, so finde ich $N = (mpp + nqq + rr + mnss)^2 - 4mn(pq - rs)^2$, denn daraus wird

$$N = (mpp - nqq - rr + mnss)^2 + m(2pr + 2nqs)^2 =$$
$$(mpp - nqq + rr - mnss)^2 + n(2qr + 2mps)^2.$$

Wenn aber mehr als zwey dergleichen Formuln vorgegeben sind, in welchen die Zahlen N enthalten seyn sollen, so hört die algebraische Hulfe fast gänzlich auf, und eben deswegen ist es um so viel merkwürdiger, dass alsdann dergleichen Fragen auf eine ganz andere Art ganz leicht aufgelöset werden können, wobey aber der Beweis noch fehlet. Also wenn solche Zahlen verlangt werden, so zugleich in diesen Formuln $aa + bb$, $cc + 2dd$, $ee + 3ff$, $gg + 5hh$, enthalten sind, so darf man nur die Zahl nehmen, die sich durch die gegebenen 1, 2, 3, 5 theilen lässt: diese ist nun 30. Alsdann, so oft $4.30x + 1 = 120x + 1$ ein numerus primus ist, so hat man eine Zahl für N, und zwey oder mehr dergleichen numeri primi, mit einander multiplicirt, geben ebenfalls Zahlen für N. Dahero sind diese numeri primi $120x + 1$ folgende: 241, 601, 1201, 1321, 1801 etc. von welchen der erste

$$241 = 15^2 + 4^2 = 13^2 + 2.6^2 = 7^2 + 3.8^2 = 14^2 + 5.3^2,$$

wobey dieses insbesondere zu merken ist, dass diese Eigenschaft nur den in der Formul $120x + 1$ enthaltenen numeris primis zukommt. Hernach, da Ew. gezeigt, dass eine summa duorum quadratorum $aa + bb$ auch in dieser Form $PP + eQQ$ enthalten ist, wenn $e = 3bb - aa$ oder $3aa - bb$, ja noch allgemeiner, wenn $e = (2\alpha + 1)bb - \alpha\alpha aa$, so können daher noch gar schöne Erläuterungen der obigen Eigenschaften gezogen werden, als z. Ex. dass eine solche Zahl $aa + nbb$ auch zugleich in dieser Form

$$PP + ((2\alpha + n)aa - \alpha\alpha bb)QQ$$

enthalten ist, wo es sich aber fügen kann, dass P und Q Brüche seyn müssen. Als, es sey $a = 7$, $n = 3$, $b = 8$ und

die Zahl $aa + nbb = 241$, so ist dieselbe auch in dieser Form $PP + eQQ$ enthalten, sumto

$$e = (2\alpha + 3)\,49 - 64\alpha\alpha = 147 + 98\alpha - 64\alpha\alpha =$$
$$147 + 49\beta - 16\beta\beta \text{ (posito } 2\alpha = \beta).$$

Solche Zahlen für e sind demnach

$$147, \begin{matrix} 82, & 181, & 150, & 87, \\ 180, & -15, & & \end{matrix}$$

oder (per □ dividendo) 3, 5, 6, 82, 87, 181, wobey also sehr merkwürdig ist, dass die Zahl 241 auch in dieser Form $PP + 82QQ$ enthalten ist, welches aus obiger Regel nicht kann erkannt werden, denn hier ist $P = \frac{81}{7}$ und $Q = \frac{8}{7}$.

Den Beweis von dem theoremate numerico, wovon letztens Ew. Erwähnung zu thun die Ehre gehabt, ist auch ganz sonderbar. Ich betrachtete diesen Bruch

$$\frac{x^n}{(x-a)(x-b)(x-c)\text{ etc.}},$$

vom welchem bekannt ist, dass sich derselbe in diese einfache Brüche $\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} +$ etc. auflösen lässt, und die Zahlen A, B, C, numeri constantes werden, wenn nur der exponens n kleiner ist, als der numerus factorum in denominatore. Nun aber bestimme ich die Zähler A, B, C, etc. folgendergestalt: Um A zu finden, multiplicire ich alles in $x - a$ und bekomme

$$A = \frac{x^n}{(x-b)(x-c)\text{ etc.}} - \frac{B(x-a)}{x-b} - \frac{C(x-a)}{x-c} - \text{etc.},$$

und weil ich weiss, dass A nicht von x dependirt, so muss für A immer einerley Werth herauskommen, ich mag für x annehmen was ich will. Ich setze also $x = a$, und da bekomme ich $A = \frac{a^n}{(a-b)(a-c)\text{ etc.}}$, ebenso wird

$$B = \frac{b^n}{(b-a)(b-c)\,\text{etc.}}, \quad C = \frac{c^n}{(c-a)(c-b)\,\text{etc.}},$$

also ist in genere

$$\frac{x^n}{(x-a)(x-b)(x-c)\,\text{etc.}} = \frac{a^n}{(a-b)(a-c)\ldots(x-a)} +$$

$$\frac{b^n}{(b-a)(b-c)\ldots(x-b)} + \frac{c^n}{(c-a)(c-b)\ldots(x-c)} + \text{etc.}$$

und diese letztern Brüche auf die andere Seite hinübergetragen:

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)\ldots(a-x)} + \frac{b^n}{(b-a)(b-c)(b-d)\ldots(b-x)} +$$

$$\frac{c^n}{(c-a)(c-b)(c-d)\ldots(c-x)} + \text{etc.} = 0.$$

Euler.

LETTRE CLXXIII.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Mécontentement de la tournure que prennent les affaires de l'Académie de Berlin. Allusion au retour d'E. en Russie.

Berlin d. 1. October 1763.

(Extrait).

— — Noch hat sich hier der Anschein nicht verloren, dass die hiesige Akademie in eine Académie françoise verwandelt werden soll. So sehr ich mich vor einer nochmaligen Ortsveränderung entsetze, so würde ich mich doch in diesem Fall dazu entschliessen müssen, und nichts würde mich dabey herzlicher erfreuen, als Ew. nochmals sehen zu können.

Euler.

LETTRE CLXXIV.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Arrivée de D'Alembert à Berlin. Sa nomination probable à la présidence de l'académie.

Berlin d. 11. October 1763.

(Extrait).

— — Als sich letztens M. D'Alembert einige Zeit hier aufhielt und von S. M. dem König mit den höchsten Gnadenbezengungen überhäuffet wurde, hatte ich auch Gelegenheit denselben persönlich kennen zu lernen, nachdem schon seit geraumer Zeit unser Briefwechsel, wegen einiger gelehrter Streitigkeiten unterbrochen gewesen, in welche ich mich nicht einlassen wollte. Nun aber ist unsere Freundschaft auf das vollkommenste wieder hergestellt worden, und man kann mir nicht genug beschreiben, mit wie grossen Lobeserhebungen er beständig mit Sr. königl. Majestät von mir gesprochen. Unter der Hand wird versichert, dass er doch künftigen May wiederkommen und die Präsidentenstelle unserer Akademie antreten würde. Euler.

LETTRE CLXXV.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Démonstration d'un théorème proposé par Goldbach et relatif à la décomposition des nombres en carrés. La présidence de la Société de Göttingue offerte a Euler, dans le cas que Haller persiste à y résigner.

Berlin d. 15. November 1765.

Ew. mir überschriebenes theorema hat bei mir die lebhafteste Freude erweckt, weil ich daraus schliessen zu können glaube, dass Dero Gemüth besonders aufgemuntert und vergnügt gewesen. Ich habe dieses theorema mit allem Fleiss untersuchet und endlich gefunden, dass sich dasselbe folgendergestalt ganz leicht beweisen lässt:

Si P^2+2eQ^2 est quadratum, ponatur $P^2+2eQ^2=R^2$, addatur utrinque P^2, erit $2P^2+2eQ^2=R^2+P^2$ et per 2 dividendo

$$P^2+eQ^2=\tfrac{1}{2}(R^2+P^2)=\left(\frac{R+P}{2}\right)^2+\left(\frac{R-P}{2}\right)^2$$

ideoque P^2+eQ^2 summa duorum quadratorum. Q. E. D.

— — Mir hat die hiesige französische Colonie auch die Ehre angethan und mich Ancien ihrer Kirchen und Mitglied des Consistorii erwählet, ob ich aber diese Ehre lang geniessen werde, ist sehr zweifelhaft. Auf künftige Ostern muss sich der Herr von Haller erklären, ob er seine Stelle als Präsident der Göttingischen Akademie wieder antreten will oder nicht. Im letztern Fall dürfte ich genöthigt werden, eine sehr grosse Veränderung vorzunehmen.

Euler.

LETTRE CLXXVI.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Fait intéressant relatif aux *Leçons de calcul intégral*. Affaires de l'Académie de Berlin. Jean Bernoulli III

Berlin d. 17. December 1763.

(Dernière lettre).

— — Schon vor einigen Monaten habe ich mein Werk von dem Calculo integrali, woran ich schon seit vielen Jahren gearbeitet, völlig zu Stande gebracht, und die Haude'sche Buchhandlung allhier ist Willens dasselbe nächstens zu verlegen. Das Gerücht davon hatte einen jungen lehrbegierigen Menschen aus der Schweiz hierhergetrieben, welcher sich nichts anders als die Erlaubniss ausgebeten, dieses Werk abzuschreiben, und ist darauf wieder zurückgereiset. Das Wunderbarste dabey ist, dass dieser Mensch von seiner Profession ein Kürschner gewesen.

Hätte ich dieses Schreiben nur einen Posttag aufschieben dürfen, so wäre ich vielleicht im Stande gewesen, Ew. einige Nachricht von der neuen Einrichtung der hiesigen Akademie zu geben, weil der junge Herr Bernoulli*), ein Sohn des Johann Bernoulli, der in Petersburg gewesen, der vor einiger Zeit hierher verschrieben worden, die Versicherung erhalten, dass um die Mitte dieses Monats, bey der Ankunft Sr. königl. Majestät alles bey der Akademie regulirt werden soll.

Euler.

*) Jean Bernoulli III, petit fils de Jean B I. et fils de Jean B. II. né à Bâle le 4 nov. 1744, mort à Berlin le 13 juillet 1807.

LETTRE CLXXVII.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Théorème de nombres.

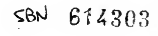
St. Petersburg d. 10. Januar 1764.

(Dernière lettre).

P. S. In formula $PP + eQQ$, si sit $e = kk - (aa + bb)$, ubi k numerus rationalis, tota formula redigi poterit ad summam duorum quadratorum $aa + bb$, fiat enim

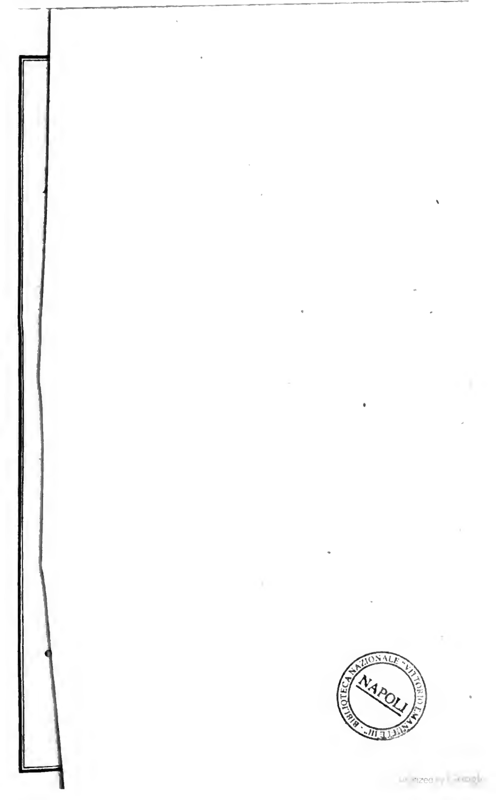
$$P = \frac{aa + bb - ak}{a - k}, \ Q = \frac{b}{a - k}.$$

Goldbach.

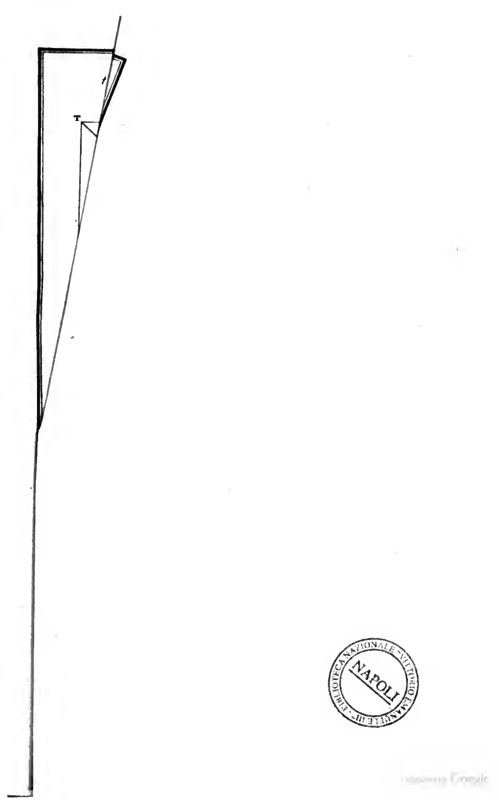




DE L'IMPRIMERIE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.






T
t

